I.V. MECHTCHERSKI

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

I.V. MECHTCHERSKI

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

AVANT-PROPOS

Le présent « Recueil de problèmes de mécanique rationnelle » du professeur I. Méchtcherski est une traduction de la 32e édition russe. A l'origine il a été composé en s'inspirant des idées et sous la direction de I. Méchtcherski par un groupe de professeurs de mécanique rationnelle de l'Institut polytechnique de Léningrad pour servir de manuel d'enseignement de la mécanique à cet Institut, mais dans la suite il a connu une large diffusion tant en U.R.S.S. qu'à l'étranger.

L'une des raisons principales de ce succès est le choix heureux de problèmes contenus. Leur exposé concret confère aux étudiants l'expérience nécessaire pour appliquer des théorèmes et méthodes de portée générale à la solution de problèmes techniques que le futur ingénieur peut rencontrer dans sa pratique.

Le « Recueil » a été récrit plusieurs fois.

Les progrès de la science et de la technique des dernières décennies ont rendu nécessaire une nouvelle révision de l'ouvrage. Dans l'édition présentée on a essayé, tout en restant dans le cadre de la mécanique rationnelle, d'aborder les nouveaux problèmes techniques et d'étudier d'une façon plus exhaustive les aspects de la mécanique classique insuffisamment éclairés jusqu'à ce jour.

On a ainsi introduit dans le « Recueil » de nouveaux problèmes sur l'orientation dans l'espace, la dynamique du vol cosmique, les oscillations non linéaires, la géométrie des masses et la mécanique analytique. On a de même inséré de nouveaux problèmes se rapportant à la cinématique du point, la cinématique du mouvement relatif et du mouvement plan d'un corps solide, la dynamique du point matériel et d'un système, la dynamique du point et d'un système de masse variable, la stabilité du mouvement. Un certain nombre de nouveaux problèmes ont également été rajoutés dans presque toutes les autres parties du « Recueil ». Des retouches ont été apportées à la présentation de la matière.

Le « Recueil » contient 1 744 problèmes à double numération (le premier

chiffre indiquant le numéro du paragraphe, le second celui du problème de ce paragraphe).

La 32[e] édition en langue russe a été préparée par un groupe de professeurs des écoles supérieures de Léningrad. Les nouveaux problèmes ont été composés et rédigés par: D. Merkine (statique); M. Bat (cinématique, §§ 15 à 18), A. Kelzon (§§ 21 à 25) et D. Merkine (§§ 10 à 14 et 19 à 20); A. Kelzon (dynamique du point matériel); M. Bat (dynamique d'un système matériel, §§ 34 à 44) et N. Bouténine (§ 45); M. Bat (mécanique analytique, §§ 46, 47) et D. Merkine (§§ 48, 49); D. Merkine (dynamique du vol cosmique); N. Bouténine (théorie des oscillations et stabilité du mouvement).

De nouveaux problèmes nous ont été aimablement fournis également par M. Kolovski, I. Livchitz et B. Smolnikov.

Nous remercions vivement les professeurs G. Stepanov et V. Chtchelkatchov et leurs collaborateurs pour les précieuses remarques et les conseils ayant contribué à l'amélioration de ce « Recueil ».

N. Bouténine
A. Lourier
D. Merkine

PREMIÈRE PARTIE

Statique du corps solide

CHAPITRE I

SYSTÈME PLAN DE FORCES

§ 1. Forces agissant suivant une droite

1.1. Deux poids de 10 N et 5 N suspendus à une même corde y sont fixés en différents endroits, le plus grand des poids étant suspendu plus bas. Quelle est la tension de la corde?

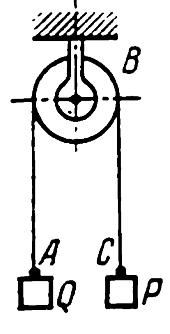
Rép. 10 N et 15 N.

1.2. Un remorqueur tire trois barges de différentes dimensions se suivant en file. La force de traction de l'hélice du remorqueur vaut, à l'instant considéré, 1 800 kgf. La résistance de l'eau à l'avancement du remorqueur est de 600 kgf; la résistance de l'eau à l'avancement de la première barge est également de 600 kgf, pour la deuxième, de 400 kgf et pour la troisième de 200 kgf. La résistance à la traction maximale du câble disponible est de 200 kgf. Combien de câbles faut-il tendre entre le remorqueur et la première barge, entre celle-ci et la deuxième et entre la deuxième et la troisième si le mouvement est rectiligne et uniforme?

Rép. 6, 3 et 1 câble.

1.3. Le poids $Q=30$ N est équilibré à l'aide d'un contrepoids attaché à l'extrémité du câble ABC s'enroulant sur une poulie. Le poids du câble est de 5 N. Abstraction faite de la raideur du câble, du frottement et du rayon de la poulie, déterminer le poids P et les efforts F_A, F_C qui tendent le câble à ses extrémités A et C, ainsi que l'effort F_B dans la section médiane B du câble, dans les cas suivants:

1) lorsque les points A et C se trouvent à une même hauteur;
2) lorsque A est plus haut que C;
3) lorsque A est plus bas que C.



Probl. 1.3

Rép. 1) $P=30$ N; $F_A=30$ N; $F_B=32{,}5$ N; $F_C=30$ N;
2) $P=25$ N; $F_A=30$ N; $F_B=27{,}5$ N; $F_C=25$ N;
3) $P=35$ N; $F_A=30$ N; $F_B=32{,}5$ N; $F_C=35$ N.

1.4. Un homme pesant 64 kgf se trouve au fond d'un puits; à l'aide d'un câble qui passe sur une poulie fixe il retient une charge de 48 kgf. 1) Quelle

est la pression exercée par l'homme sur le fond du puits? 2) Quelle charge maximale peut-il retenir à l'aide du câble?

Rép. 1) 16 kgf; 2) 64 kgf.

1.5. Un train roule sur une voie rectiligne horizontale à une vitesse constante; le poids du train sans l'électromotrice est de 1 200 t. Quelle est la force de traction de l'électromotrice si la résistance à l'avancement du train est égale à 0,005 de la pression du train sur les rails?

Rép. 6 t.

1.6. Un train de voyageurs comporte une électromotrice, un wagon de bagages de 40 t et 10 wagons de 50 t chacun. Déterminer les tensions dans les attelages et la force de traction de l'électromotrice, si la résistance à l'avancement du train est égale à 0,005 de son poids. Supposer que la résistance à l'avancement est répartie suivant la rame proportionnellement aux poids et que le mouvement du train est uniforme.

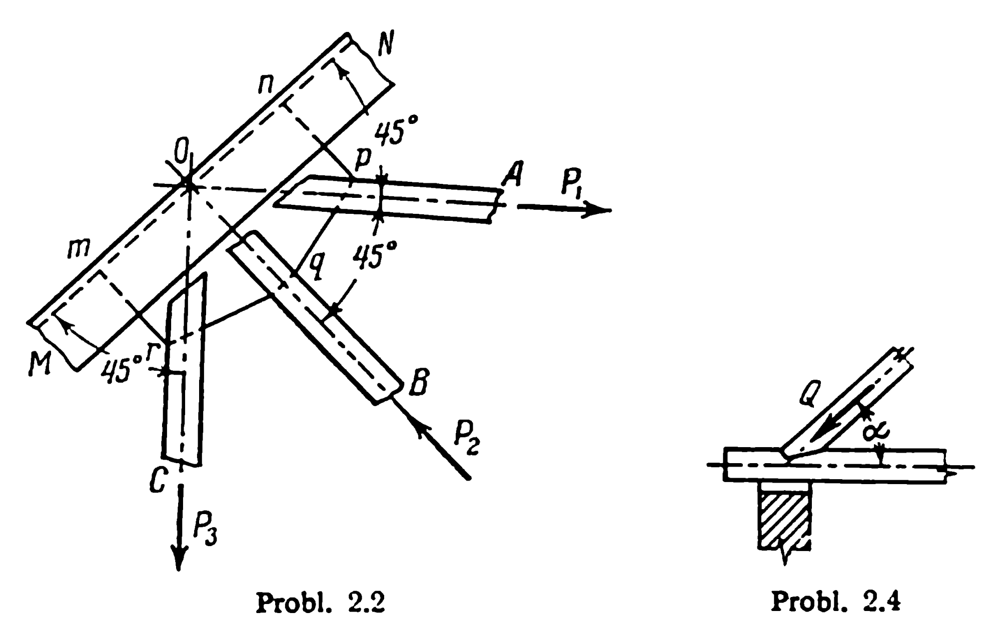
Rép. La force de traction de l'électromotrice est de 2,7 t, $T_{11}=0,25$ t; $T_{10}=2\cdot 0,25$ t, etc. (l'indice inférieur indique le numéro du wagon à partir de l'électromotrice).

§ 2. Forces concourantes

2.1. Des forces de 1, 3, 5, 7, 9 et 11 N sont appliquées au centre d'un hexagone régulier et dirigées vers ses sommets. Trouver la grandeur et la direction de leur résultante et de la force qui l'équilibre.

Rép. 12 N; le sens de la force qui équilibre la résultante est opposé à celui de 9 N.

2.2. Déterminer l'effort transmis par la plaque *mnpqr* à la barre *MN*, si les efforts agissant suivant les lignes *OA*, *OB* et *OC* sont: $P_1=P_3=141$ N et $P_2=100$ N.



Probl. 2.2 Probl. 2.4

Les directions des efforts sont indiquées sur la figure.

Rép. 100 N; l'effort agit suivant OB dans le sens opposé à celui de P_2.

2.3. Décomposer la force de 8 N en deux de 5 N chacune. Peut-on décomposer cette même force en deux de 10 N, 15 N, 20 N,..., 100 N?

Rép. Oui, si les directions des composantes ne sont pas précisées.

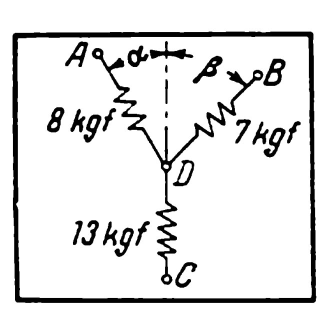
2.4. Une force $Q=250$ kgf agit suivant la direction d'un chevron incliné sous un angle $\alpha=45°$ par rapport à l'horizontale. Déterminer l'effort S dans la tige horizontale et la force N agissant sur le mur suivant la verticale.

Rép. $S=N=177$ kgf.

2.5. Deux tracteurs longent un canal rectiligne à une vitesse constante, en traînant une barge à l'aide de deux câbles. Les câbles subissent des tensions de 80 kgf et 96 kgf et forment un angle de 60°. Trouver la résistance de l'eau P à l'avancement de la barge et les angles α et β formés par les câbles avec les bords du canal, si la barge se déplace parallèlement à ceux-ci.

Rép. $P=153$ kgf; $\alpha=33°$, $\beta=27°$.

2.6. Les extrémités A, B et C de trois balances à ressort sont fixées sur une planche horizontale. Trois cordes attachées aux crochets de ces balances sont tendues et liées en un nœud D. Les indications des balances sont: 8, 7 et 13 kgf. Déterminer les angles α et β formés par les directions des cordes, comme indiqué sur la figure.



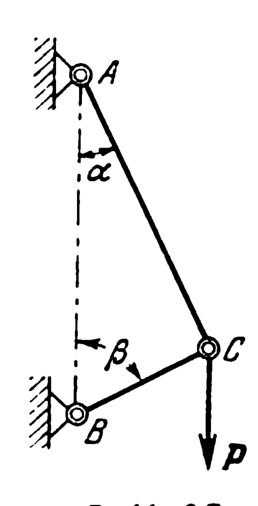
Probl. 2.6

Rép. $\alpha=27{,}8°$; $\beta=32{,}2°$.

2.7. Les barres AC et BC sont articulées en un point C et aux points A et B d'un mur vertical. La force verticale $P=1\,000$ N agit au point C.

Déterminer les réactions des barres sur le boulon d'articulation C si les angles formés par les barres avec le mur sont: $\alpha=30°$ et $\beta=60°$.

Rép. 866 N; 500 N.

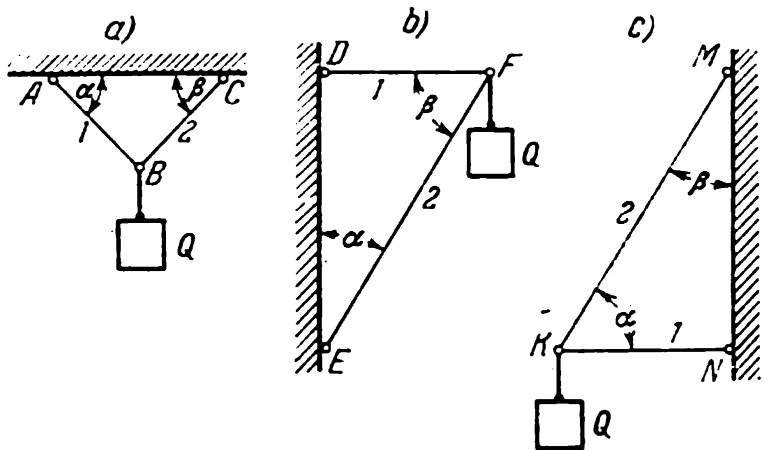


Probl. 2.7

2.8. Les figures *a*, *b* et *c* ainsi que celle du problème précédent décrivent schématiquement un système de barres articulées. Des charges Q de 1000 kgf sont suspendues aux boulons d'articulation B, F et K.

Déterminer les efforts dans les barres pour les cas suivants:

a) $\alpha=\beta=45°$.
b) $\alpha=30°$, $\beta=60°$.
c) $\alpha=60°$, $\beta=30°$.

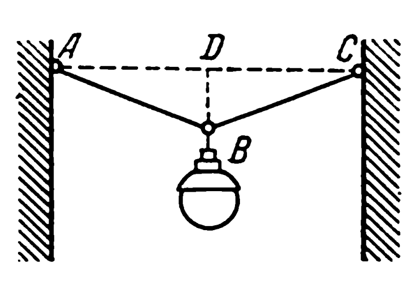


Probl. 2.8

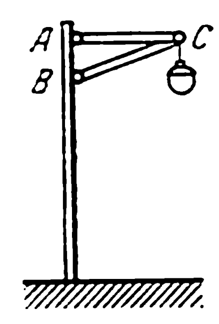
Rép. a) $S_1 = S_2 = 707$ kgf; b) $S_1 = 577$ kgf; $S_2 = -1\ 154$ kgf*; c) $S_1 = -577$ kgf; $S_2 = 1\ 154$ kgf.

2.9. Un réverbère est suspendu au point médian B du câble ABC attaché par ses extrémités aux crochets A et C situés sur la même horizontale. Déterminer les tensions T_1 et T_2 dans les tronçons AB et BC du câble, si le réverbère pèse 15 kgf, la longueur du câble ABC est de 20 m et celle de la flèche BD du point de suspension, de 0,1 m; le poids du câble est considéré comme négligeable.

Rép. $T_1 = T_2 = 750$ kgf.



Probl. 2.9



Probl. 2.10

2.10. Un réverbère pesant 30 kgf est suspendu à un poteau vertical au moyen d'une traverse $AC = 1{,}2$ m et d'une contre-fiche $BC = 1{,}5$ m. Trouver les efforts S_1 et S_2 dans les barres AC et BC, articulées aux points A, B et C.

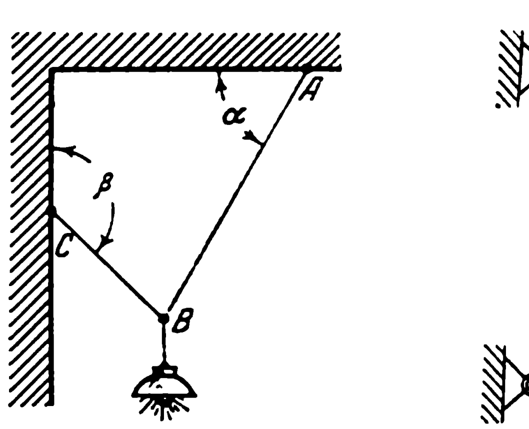
Rép. $S_1 = 40$ kgf; $S_2 = -50$ kgf.

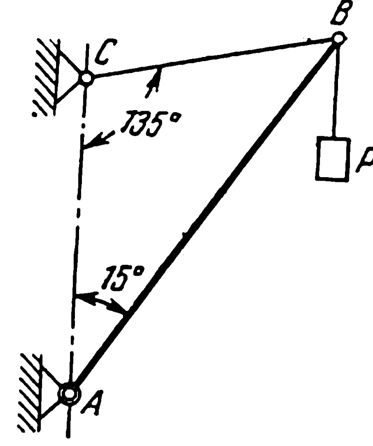
2.11. Une lampe électrique pesant 2 kgf est suspendue au plafond par un cordon AB et tirée vers le mur par une corde BC. Déterminer les tensions: T_A du cordon AB et T_C de la corde BC si $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$. Les poids du cordon et de la corde sont négligeables.

Rép. $T_A = 1{,}46$ kgf; $T_C = 1{,}04$ kgf.

---

* Le signe moins indique que la barre est comprimée.





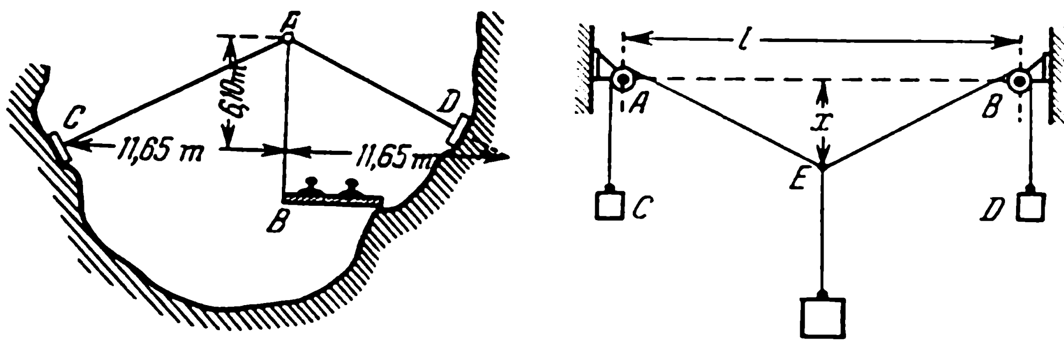
Probl. 2.11 Probl. 2.12

2.12. Une grue à pylône est constituée par la volée *AB* articulée au pylône au point *A* et par la chaîne *CB*. L'extrémité *B* de la volée porte une charge $P=200$ kgf. Les angles $\widehat{BAC}=15°$, $\widehat{ACB}=135°$. Déterminer la tension *T* dans la chaîne *CB* et l'effort *Q* dans la volée *AB*.

Rép. $T=104$ kgf; $Q=283$ kgf.

2.13. Le tronçon d'une voie ferrée, situé dans une gorge montagneuse, est suspendu comme l'indique la figure. Trouver les efforts dans les barres *AC* et *AD* en supposant la suspension *AB* chargée d'une force $P=50$ t.

Rép. Les barres *AC* et *AD* sont comprimées par une même force de 53,9 t.



Probl. 2.13 Probl. 2.14

2.14. Une corde *CAEBD* passe sur deux poulies fixes *A* et *B* situées sur la même droite horizontale $AB=l$. Deux poids de *p* kgf chacun et un poids de *P* kgf sont suspendus respectivement aux extrémités *C* et *D* et au point *E* de cette corde. Déterminer la flèche *x* du point *E* à l'état d'équilibre. Négliger le frottement dans les poulies, leurs dimensions et le poids de la corde.

Rép. $x=\dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2-P^2}}$.

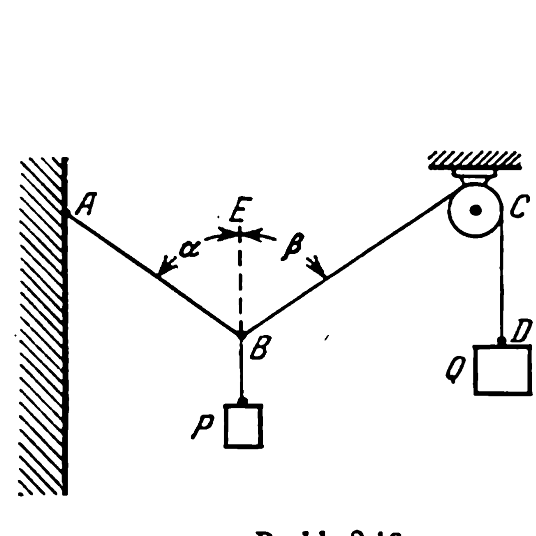
2.15. Une charge de 25 N est maintenue en équilibre par deux cordes passant sur des poulies et tendues par des poids. L'un des poids vaut 20 N;

le sinus de l'angle formé par la corde correspondante avec la verticale est 0,6. Déterminer la valeur p du second poids et l'angle α formé par la seconde corde avec la verticale. Négliger le frottement dans les poulies et le poids de la corde.

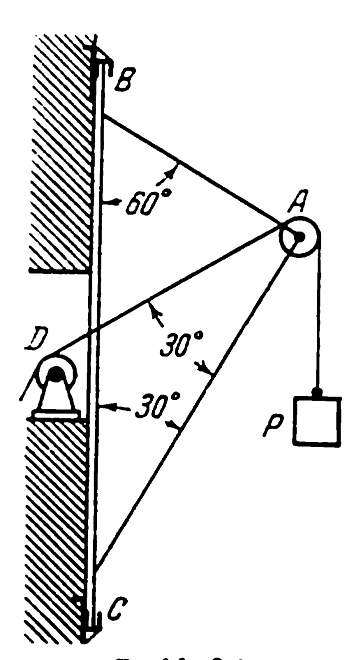
Rép. $p=15$ N; $\sin\alpha=0,8$.

2.16. Un poids P et une corde BCD passant sur une poulie sont attachés au point B d'une corde AB dont l'autre extrémité est fixée au point A; un poids Q pesant 10 kgf est attaché à l'extrémité D. En négligeant le frottement dans la poulie, déterminer la tension T de la corde AB et la valeur de la charge P, si dans l'état d'équilibre les angles formés par les cordes avec la verticale BE sont: $\alpha=45°$, $\beta=60°$.

Rép. $T=12,2$ kgf; $P=13,7$ kgf.



Probl. 2.16



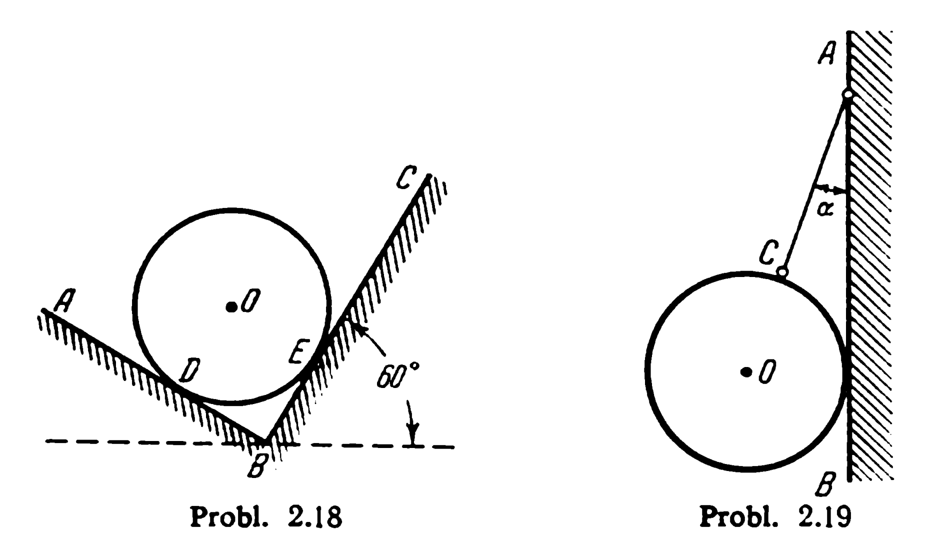
Probl. 2.17

2.17. Une charge $P=2$ t est montée par une grue BAC à l'aide d'une chaîne enroulée sur la poulie A et sur la poulie D fixée au mur, de sorte que $\widehat{CAD}=30°$. Les angles formés par les barres de la grue sont: $\widehat{ABC}=60°$, $\widehat{ACB}=30°$. Déterminer les efforts Q_1 et Q_2 dans les barres AB et AC.

Rép. $Q_1=0$; $Q_2=-3,46$ t.

2.18. Une boule homogène O pesant 6 kgf repose sur deux plans inclinés lisses orthogonaux AB et BC. Déterminer la pression exercée par la boule sur chaque plan sachant que le plan BC forme avec l'horizontale un angle de 60°.

Rép. $N_D=5,2$ kgf; $N_E=3$ kgf.



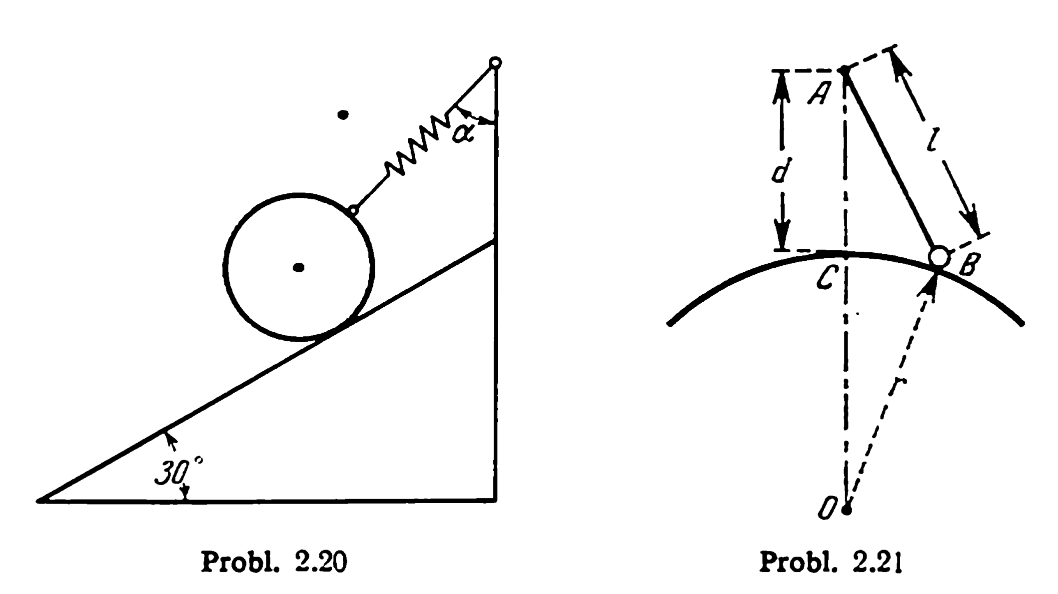
Probl. 2.18 Probl. 2.19

2.19. Une boule homogène O pesant P kgf est fixée à un mur lisse vertical AB par un filin AC. Le filin forme avec le mur un angle α. Déterminer la tension du fil T et la pression Q exercée par la boule sur le mur.

Rép. $T=\frac{P}{\cos\alpha}$; $Q=P\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

2.20. Une boule homogène de 20 kgf est retenue sur un plan incliné lisse par un filin attaché à une balance à ressort fixée au-dessus du plan; la balance indique 10 kgf. Le plan fait avec l'horizontale un angle de 30°. Déterminer l'angle α, formé par le filin avec la verticale, et la pression Q exercée par la boule sur le plan. Négliger le poids de la balance à ressort.

Rép. $\alpha=60°$; $Q=17{,}3$ kgf.



Probl. 2.20 Probl. 2.21

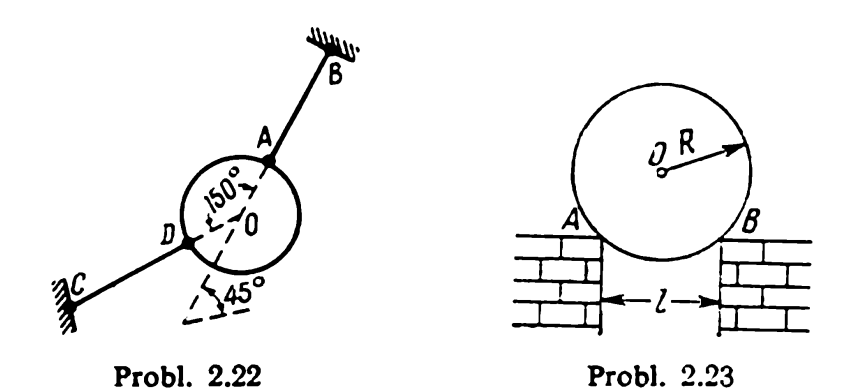
2.21. Une bille B de poids P et de rayon négligeable est suspendue en un point fixe A par un fil AB et repose sur la surface lisse d'une sphère de rayon r; la distance du point A à la surface de la sphère $AC=d$, la longueur

du fil $AB=l$, la droite AO est verticale. Déterminer la tension T du fil et la réaction Q de la sphère.

Rép. $T=P\dfrac{l}{d+r}$; $Q=P\dfrac{r}{d+r}$.

2.22. Une boule homogène pesant 10 N est maintenue en équilibre par deux filins AB et CD situés dans un même plan vertical et formant un angle de 150°. Le filin AB forme avec l'horizontale un angle de 45°. Déterminer la tension des filins.

Rép. $T_B=19{,}3$ N; $T_C=14{,}1$ N.



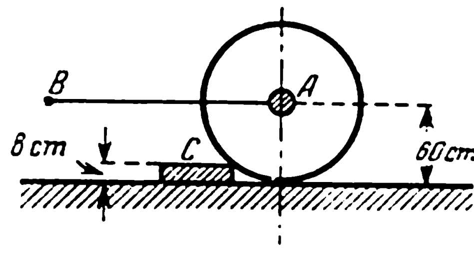
Probl. 2.22 Probl. 2.23

2.23. Une chaudière dont le poids $P=4$ t est uniformément réparti suivant sa longueur et de rayon $R=1$ m, repose sur les ressauts d'une maçonnerie. La distance entre les murs de la maçonnerie $l=1{,}6$ m. Faisant abstraction de la friction, trouver la pression exercée par la chaudière sur la maçonnerie aux points A et B.

Rép. $N_A=N_B=3{,}33$ t.

2.24. Un rouleau compacteur pèse 2 t, son rayon est de 60 cm. Déterminer l'effort horizontal P nécessaire pour faire passer le rouleau sur une dalle d'une hauteur de 8 cm, dans la position indiquée sur la figure.

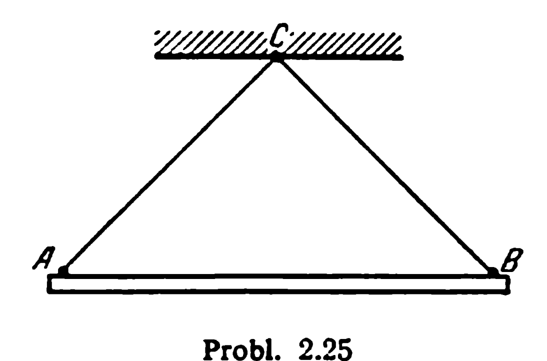
Rép. $P=1{,}15$ t.



Probl. 2.24

2.25. Une barre homogène AB pesant 16 kgf et longue de 1,2 m est suspendue à un point C par deux filins AC et CB de longueurs identiques égales à 1 m. Déterminer les tensions dans les filins.

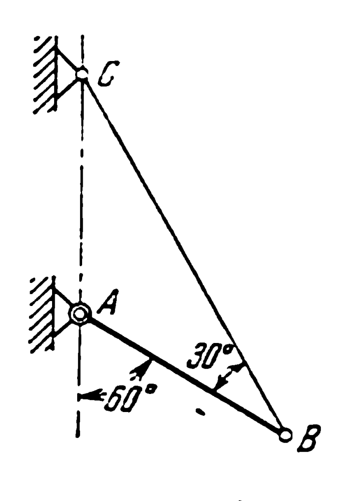
Rép. La tension dans chacun des filins est de 10 kgf.



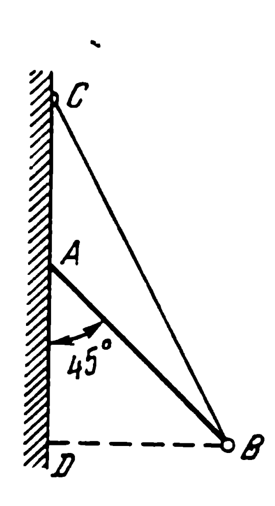
Probl. 2.25

2.26. Une barre homogène AB pesant 2 kgf est articulée en son extrémité A à un mur vertical et se trouve retenue sous un angle de 60° à la verticale par un filin BC formant avec elle un angle de 30°. Déterminer la grandeur et la direction de la réaction R de l'articulation.

Rép. $R = 1$ kgf; $\widehat{R, AC} = 60°$.



Probl. 2.26



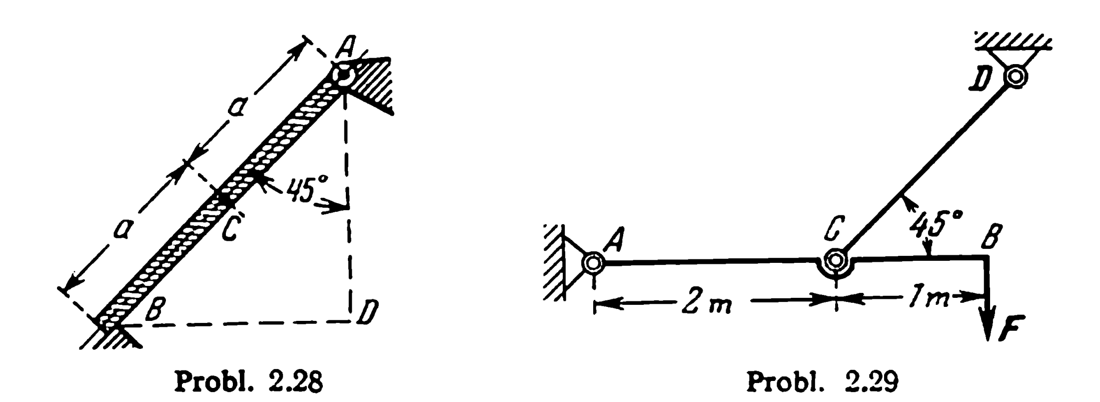
Probl. 2.27

2.27. L'extrémité supérieure A d'une barre homogène AB pesant 5 kgf et longue de 2 m s'appuie sur un mur vertical lisse. Un filin BC est attaché à son extrémité inférieure B. Trouver la distance AC à laquelle il faut fixer le filin au mur pour que la barre soit en équilibre en formant un angle $\widehat{BAD} = 45°$. Trouver la tension T du filin et la réaction R du mur.

Rép. $AC = AD = 1{,}41$ m; $T = 5{,}6$ kgf; $R = 2{,}5$ kgf.

2.28. La croisée AB de la fenêtre, donnée en profil sur la figure, peut tourner autour de l'axe horizontal de l'articulation A; son bord inférieur s'appuie sur un ressaut. Trouver les réactions des appuis, si le poids de la croisée est de 89 kgf et se trouve appliqué en son milieu C et si $AD=BD$.

Rép. $R_A=70{,}4$ kgf; $R_B=31{,}5$ kgf.



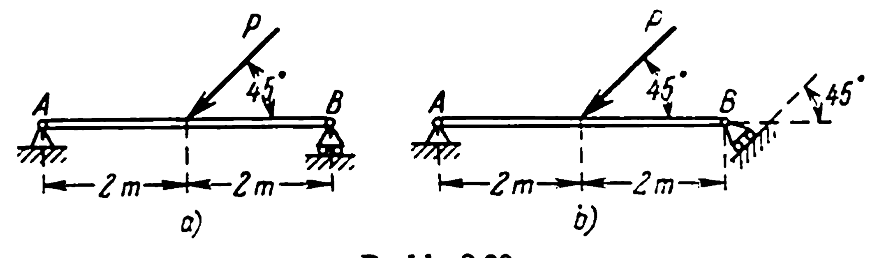
Probl. 2.28

Probl. 2.29

2.29. La poutre AB est retenue en position horizontale par la tige CD; les fixations en A, C et D sont des articulations. Déterminer les réactions des appuis A et D, si une force verticale $F=5$ t agit à l'extrémité de la poutre. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Le poids de la poutre est négligeable.

Rép. $R_A=7{,}9$ t; $R_D=10{,}6$ t.

2.30. La poutre AB est articulée à l'appui A et son extrémité B repose sur des rouleaux. Une force $P=2$ t agit en son milieu et forme avec son axe

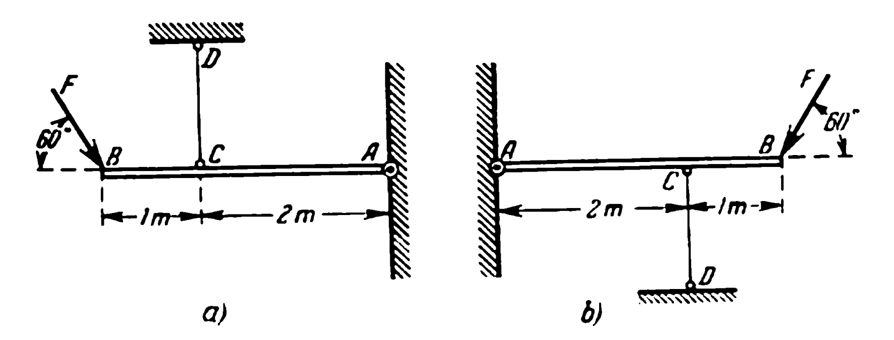


Probl. 2.30

un angle de 45°. Déterminer les réactions des appuis pour les cas *a*) et *b*). Les dimensions sont indiquées sur le dessin; négliger le poids de la poutre.

Rép. a) $R_A=1{,}58$ t; $R_B=0{,}71$ t; b) $R_A=2{,}24$ t; $R_B=1$ t.

2.31. La poutre AB est retenue en position horizontale par une tige verticale CD (cf. figure). Une force $F=3$ t agit à l'extrémité de la poutre sous un angle de 60° par rapport à l'horizontale. Déterminer les efforts S dans



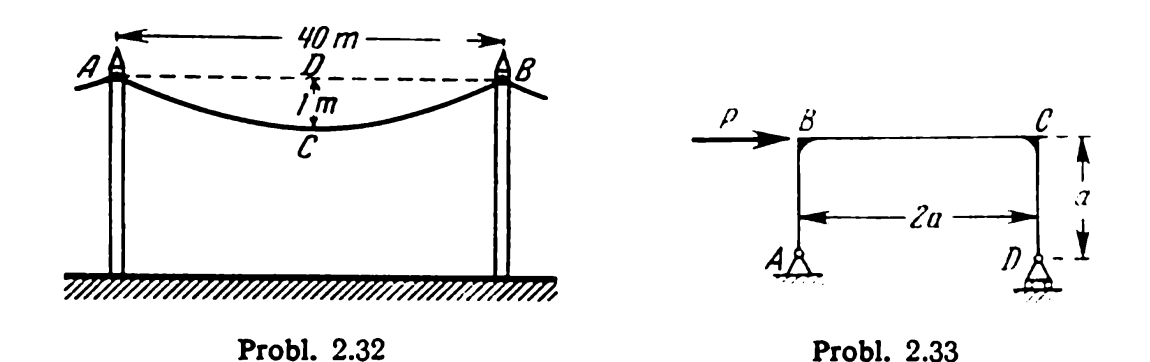
Probl. 2.31

les tiges CD et la pression Q exercée par la poutre sur le mur dans les cas *a*) et *b*), si les fixations en A, C et D sont des articulations. Les dimensions sont donneés sur la figure; négliger les poids de la tige et de la poutre.

Rép. a) $S=3{,}9$ t; $Q=1{,}98$ t; b) $S=3{,}9$ t; $Q=1{,}98$ t.

2.32. Un câble électrique ACB est tendu entre deux poteaux de sorte qu'il forme une courbe de faible déclivité dont la flèche $CD=f=1$ m. La distance entre les poteaux $AB=l=40$ m. Le poids du câble $Q=40$ kgf. Déterminer la tension du câble: T_C en son point médian, T_A et T_B à ses extrémités. Supposer que le poids de chaque moitié du câble est appliqué à la distance $\frac{l}{4}$ du poteau le plus proche.

Rép. $T_C=\frac{Ql}{8f}=200$ kgf; $T_A=T_B=201$ kgf.



Probl. 2.32

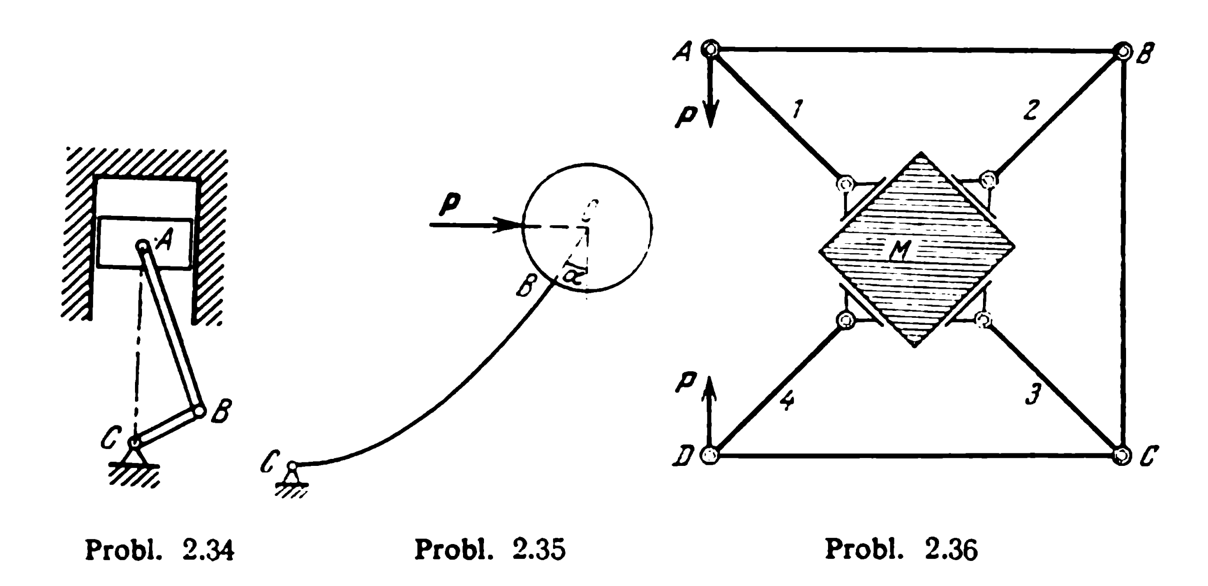
Probl. 2.33

2.33. Déterminer, pour le portique indiqué sur la figure, les réactions des appuis R_A et R_D lorsqu'une force horizontale P est appliquée au point B. Faire abstraction du poids du portique.

Rép. $R_A=P\,\frac{\sqrt{5}}{2}$, $R_D=\frac{P}{2}$.

2.34. Dans un moteur à combustion interne l'aire du piston est égale à 200 cm^2, la longueur de la bielle $AB=30$ cm, de la manivelle $BC=6$ cm. La pression des gaz sur le piston, à l'instant donné, est $P_1=10$ kgf/cm^2, sous le piston elle est $P_2=2$ kgf/cm^2. Trouver la force T qu'exerce la bielle AB sur la manivelle BC, due à la différence des pressions, si l'angle $\widehat{ABC}=90°$, le frottement entre le piston et le cylindre étant négligeable.

Rép. $T=1,6$ t.



Probl. 2.34 Probl. 2.35 Probl. 2.36

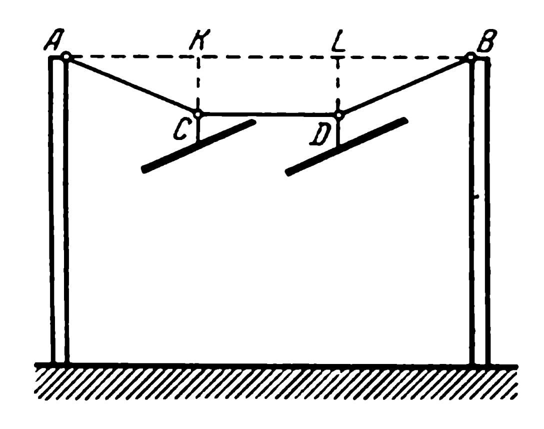
2.35. Un ballon pesant G kgf est maintenu en équilibre par le filin BC. Le ballon est soumis à l'action des forces de portance Q et de pression du vent P. Déterminer la tension dans le filin au point B et l'angle α.

Rép. $T=\sqrt{P^2+(Q-G)^2}$; $\alpha=\text{arc tg}\,\frac{P}{Q-G}$.

2.36. Pour comprimer les quatre côtés d'un cube en ciment M on utilise un mécanisme à articulation dans lequel les éléments AB, BC et CD coïncident avec les côtés du carré $ABCD$ et les éléments *1*, *2*, *3*, *4*, de même longueur, sont dirigés suivant les diagonales de ce carré; on applique aux points A et D (cf. figure) deux forces égales en module. Déterminer les forces N_1, N_2, N_3, N_4, qui compriment le cube, et les efforts S_1, S_2, S_3 dans les éléments AB, BC et CD, si les forces appliquées aux points A et D sont de 5 t.

Rép. $N_1=N_2=N_3=N_4=7,07$ t; les forces de traction $S_1=S_2=S_3=5$ t.

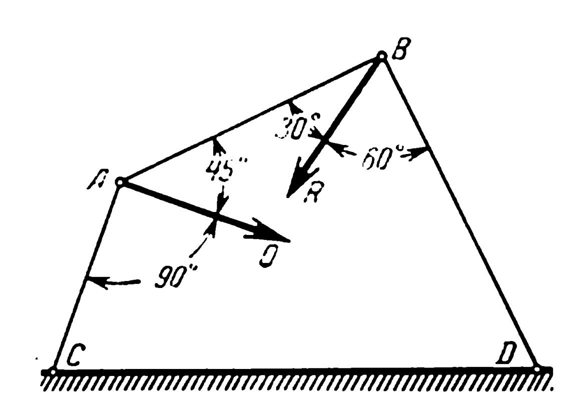
2.37. Deux fils de tramway sont suspendus à des câbles transversaux dont chacun est attaché à deux poteaux. Les poteaux sont disposés le long de la voie à une distance de 40 m l'un de l'autre. Pour chaque



Probl. 2.37

câble transversal les distances $AK=KL=LB=5$ m; $KC=LD=0{,}5$ m. En négligeant le poids du câble, trouver les tensions T_1, T_2 et T_3 dans les tronçons AC, CD et DB, si le poids de 1 m de fil est de 0,75 kgf.

Rép. $T_1=T_3=301{,}5$ kgf; $T_2=300$ kgf.



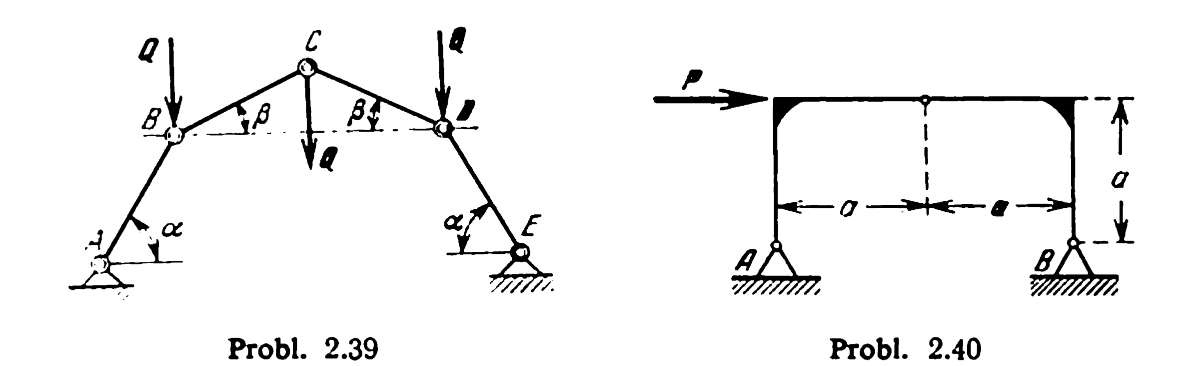
Probl. 2.38

2.38. Une force $Q=100$ N est appliquée sous un angle $\widehat{BAQ}=45°$ à l'articulation A du système de barres quadrilatère articulé $ABDC$ dont le côté CD est fixe. Déterminer la grandeur de la force R appliquée à l'articulation B sous un angle $\widehat{ABR}=30°$ pour que le quadrilatère $ABDC$ soit en équilibre étant donné que les angles $\widehat{CAQ}=90°$ et $\widehat{DBR}=60°$.

Rép. $R=163$ N.

2.39. Un système polygonal de tiges articulées est composé de quatre éléments égaux; les articulations A et E sont fixes; une charge verticale Q est appliquée aux articulations B, C et D. A l'état d'équilibre la pente des éléments extrêmes $\alpha = 60°$. Déterminer la pente β des éléments BC et CD.

Rep. $\beta = 30°$.

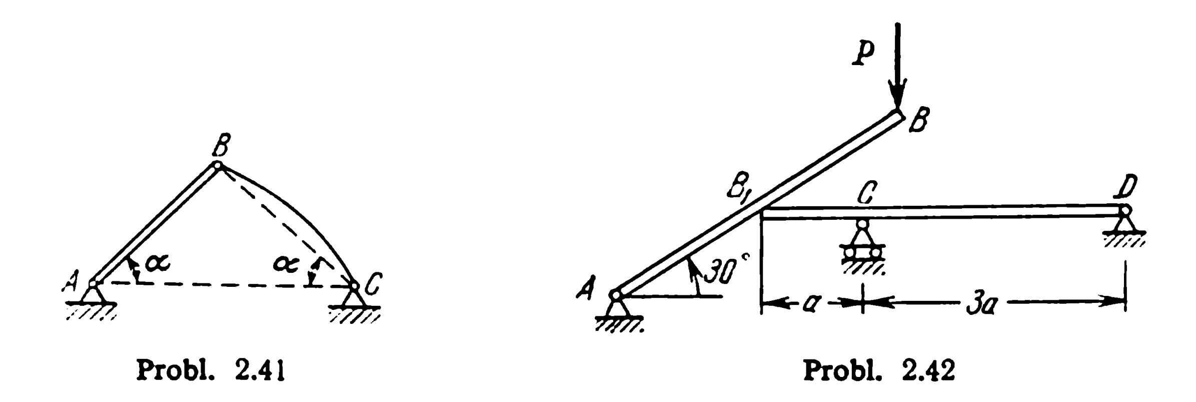


Probl. 2.39 Probl. 2.40

2.40. Déterminer les réactions des appuis A et B d'un arc à trois articulations (cf. figure) lorsqu'on y applique une force horizontale P. Négliger le poids de l'arc.

Rép. $R_A = R_B = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.41. Une barre rectiligne homogène AB de poids P et une tige curviligne quelconque BC de poids négligeable sont articulées au point B et



Probl. 2.41 Probl. 2.42

aux appuis A et C situés sur l'horizontale AC. Les droites AB et BC forment avec la droite AC des angles $\alpha = 45°$. Déterminer les réactions des appuis A et C.

Rép. $R_A = \dfrac{\sqrt{10}}{4}P$; $R_C = \dfrac{\sqrt{2}}{4}P$.

2.42. Une poutre inclinée AB, à l'extrémité de laquelle agit une force P, s'appuie en son milieu B_1 sur l'extrémité d'une poutre à console CD. Déterminer les réactions aux appuis; négliger les poids des poutres.

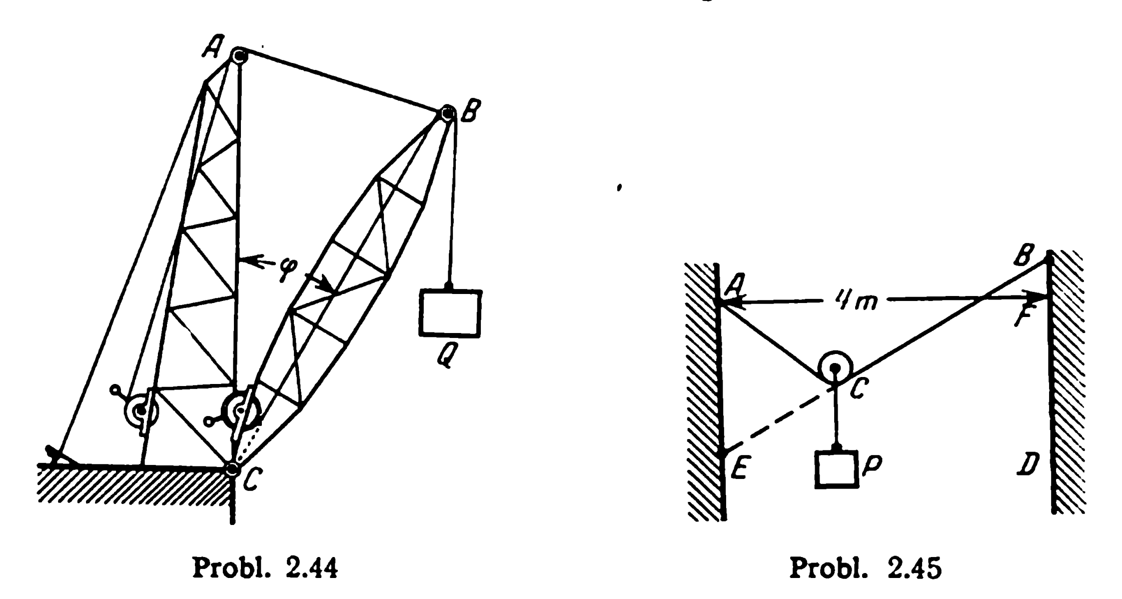
Rép. $R_A=P$; $R_C=\frac{4\sqrt{3}}{3}P$; $R_D=\frac{2\sqrt{3}}{3}P$.

2.43. Etant donné un système de quatre arcs dont les dimensions sont indiquées sur la figure, déterminer les réactions des appuis A, B, C et D si l'on applique une force horizontale P.

Rép. $R_A=P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_B=P$; $R_C=P$; $R_D=P\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Probl. 2.43

2.44. Une grue comprend une tour fixe AC et une ferme mobile BC articulée au point C et maintenue au moyen d'un câble AB. La charge $Q=40$ t est suspendue à une chaîne enroulée sur une poulie au point B et reliée au treuil suivant la droite BC. La longueur $AC=BC$. Déterminer



Probl. 2.44 Probl. 2.45

la tension T du câble AB et la force P comprimant la ferme suivant la droite BC en fonction de l'angle $\widehat{ACB}=\varphi$. Négliger le poids de la ferme et le frottement dans la poulie.

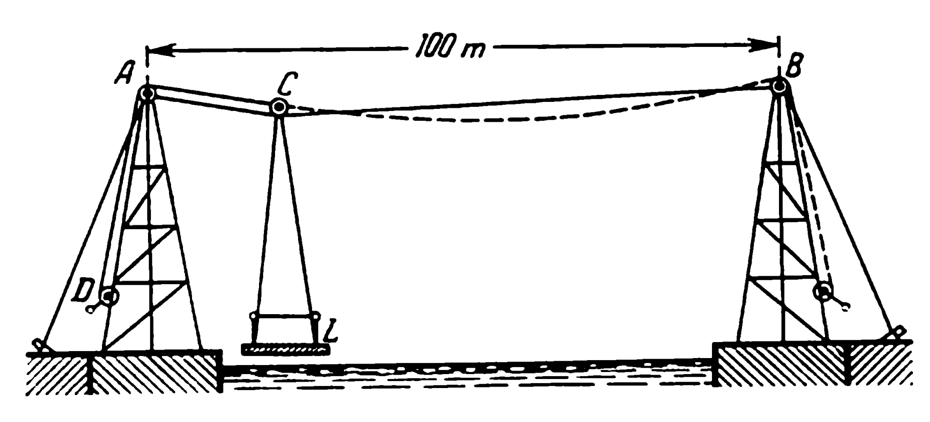
Rép. $T=80\sin\frac{\varphi}{2}$ t; $P=80$ t indépendamment de l'angle φ.

2.45. Une poulie C portant la charge $P=18$ N peut glisser le long d'un câble flexible ACB dont les extrémités sont fixées aux murs. La distance entre ceux-ci est de 4 m; la longueur du câble est de 5 m. Déterminer la tension dans le câble lorsque la poulie et sa charge sont en équilibre. Négliger le poids du câble et de la poulie ainsi que le frottement du câble sur la poulie. (Voir fig. p. 21.)

Les tensions dans les tronçons AC et CB du câble sont égales; leur grandeur peut être déterminée de la similitude du triangle des forces et du triangle isocèle dont l'un des côtés latéraux est la droite BCE, la base étant sur la verticale BD.

Rép. 15 N indépendamment de la hauteur BF.

2.46. Pour passer une rivière on a construit une nacelle L qui est suspendue au moyen d'une poulie C à un filin d'acier AB fixé aux sommets des tours A et B. Pour déplacer la poulie vers la rive gauche on se sert d'un câble CAD passant sur une poulie A et s'enroulant sur le treuil D; on se sert d'un câble identique pour déplacer la nacelle vers la rive droite. Les points A et B sont situés sur la même horizontale à une distance $AB=$ $=100$ m; le filin ACB est long de 102 m, le poids de la nacelle est de 5 t. Déterminer les tensions dans le câble CAD et dans le filin ACB à l'instant où la longueur du tronçon $AC=20$ m. Négliger les poids des câbles et du filin ainsi que le frottement entre la poulie et le filin.



Probl. 2.46

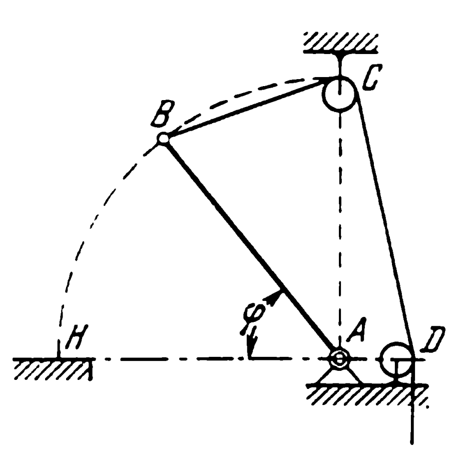
Rép. $S_{CAD}=0{,}75$ t; $S_{CB}=S_{CA}=9{,}56$ t.

2.47. La croisée de la fenêtre AB, représentée schématiquement en profil sur la figure, pèse 100 kgf et s'ouvre en tournant autour de l'axe horizontal A à l'aide d'une corde BCD passant sur les poulies C et D. La poulie C, de dimensions négligeables, et le point A sont situés sur la même verticale; le poids de la croisée est appliqué en son milieu; on néglige aussi le frottement. Trouver la tension T dans la corde en fonction de l'angle φ

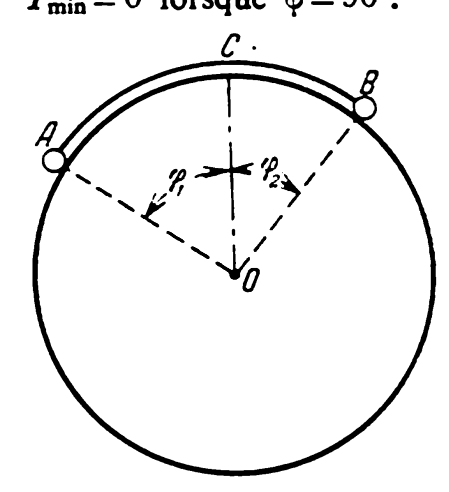
formé par la croisée AB avec l'horizontale AH, ainsi que sa plus grande et sa plus petite valeur si $AB=AC$.

Rép. $T=100\sin\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)$ kgf ;

$T_{max}=70{,}7$ kgf lorsque $\varphi=0$; $T_{min}=0$ lorsque $\varphi=90^\circ$.



Probl. 2.47



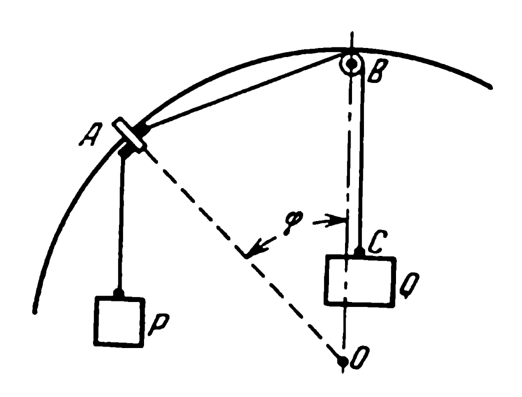
Probl. 2.48

2.48. Deux billes A et B de dimensions négligeables sont reliées par un fil AB de 0,2 m de longueur et reposent sur un cylindre circulaire lisse d'axe horizontal et de rayon $OA=0{,}1$ m. La première bille pèse 1 N, la seconde 2 N. Déterminer les angles φ_1 et φ_2, formés par les rayons OA et OB avec la droite verticale OC à l'état d'équilibre, et les pressions N_1 et N_2 des billes sur le cylindre aux points A et B.

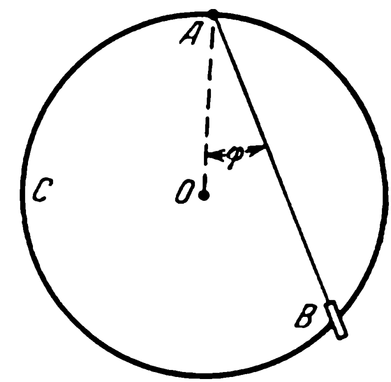
Rép. $\varphi_1=2-\varphi_2$; $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\sin 2}{2+\cos 2}$; $\varphi_1=84^\circ45'$; $\varphi_2=29^\circ50'$;

$N_1=\cos\varphi_1$ N $=0{,}092$ N; $N_2=2\cos\varphi_2$ N $=1{,}73$ N.

2.49. Un anneau lisse A peut glisser sans frottement sur une circonférence fixe en fil de fer située dans le plan vertical. Un poids P est suspendu à cet anneau. On y attache l'extrémité d'une corde ABC passant sur une poulie B, immobile, de dimensions négligeables, située au point supérieur



Probl. 2.49



Probl. 2.50

de la circonférence. Un poids Q est suspendu à l'autre extrémité C de cette corde. Déterminer l'angle au centre φ de l'arc AB à l'état d'équilibre, et indiquer les conditions de cet équilibre. Négliger le poids de l'anneau et le frottement dans la poulie.

Rép. $\sin\frac{\varphi_1}{2}=\frac{Q}{2P}$; $\varphi_2=\pi$; la première position d'équilibre est possible lorsque $Q<2P$, la seconde pour n'importe quelle valeur de Q et P.

2.50. Un anneau lisse B de poids p et de dimensions négligeables glisse sur une circonférence en fil de fer ABC de rayon R située dans le plan vertical. L'anneau est attaché à l'aide d'un fil élastique AB au plus haut point A de la circonférence. Déterminer l'angle φ dans la position d'équilibre; la tension du fil T est en raison de son allongement relatif, le coefficient de proportionnalité étant k. (Voir fig. p. 23.)

Si l'on désigne par L et l les longueurs du fil respectivement dans les états tendu et non tendu, alors $T=k\,\frac{L-l}{l}$.

Rép. $\cos\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{kl}{kR-pl}$, si $k\geqslant\frac{2p}{2R-l}$; dans le cas contraire $\varphi=0$.

2.51. Le point M subit l'attraction de trois centres fixes $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ dont les forces sont proportionnelles aux distances: $F_1=k_1r_1$, $F_2=k_2r_2$, $F_3=k_3r_3$, où $r_1=MM_1$, $r_2=MM_2$, $r_3=MM_3$, les coefficients de proportionnalité étant k_1, k_2, k_3. Déterminer les coordonnées x et y du point M à l'état d'équilibre.

Rép. $x=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}$; $y=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}$.

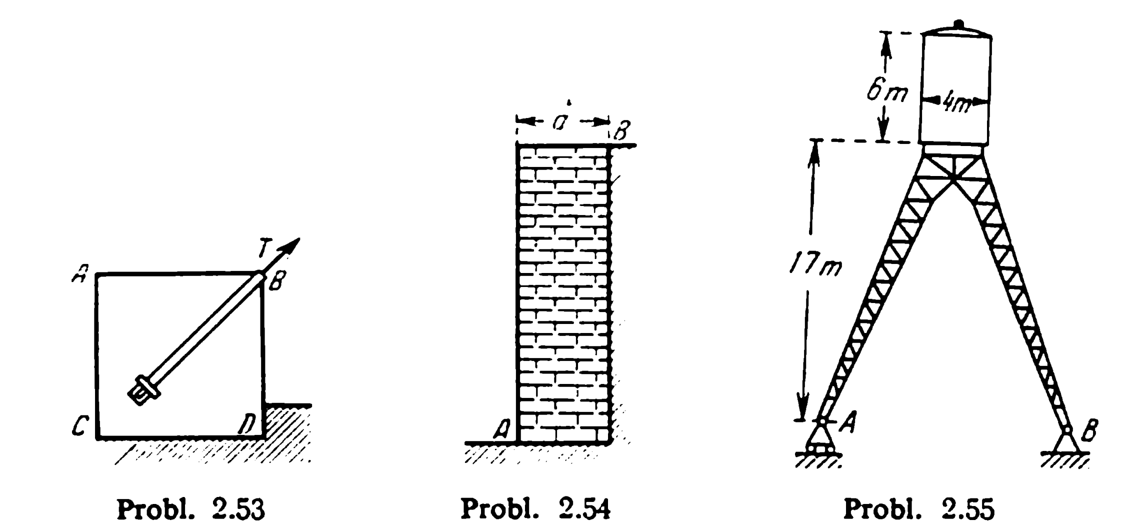
2.52. Une plaque rectangulaire homogène de 5 kgf est suspendue de façon à pouvoir tourner librement autour d'un axe horizontal passant par l'un de ses côtés. Un vent soufflant uniformément la retient dans une position inclinée sous un angle de 18° par rapport au plan vertical. Déterminer la résultante de la force de pression du vent exercée sur la plaque perpendiculairement à son plan.

Rép. 5 sin 18°=1,55 kgf.

2.53. L'extrémité de la chaîne d'un pont est encastrée dans un fondement de maçonnerie en forme de parallélépipède rectangle dont la section moyenne est $ABDC$. Les côtés $AB=AC=5$ m, le poids spécifique du maçonnage est de 2,5 gf/cm³, la chaîne est disposée suivant la diagonale BC. Trouver la longueur a du troisième côté du parallélépipède, si la tension dans la chaîne est $T=100$ t.

Le fondement doit être calculé au renversement autour de l'arête D; faire abstraction de la résistance du sol.

Rép. $a\geqslant 2{,}3$ m.



Probl. 2.53 Probl. 2.54 Probl. 2.55

2.54. Un remblai est soutenu par un mur vertical AB. Trouver la largeur nécessaire du mur a si la pression de la terre sur le mur, dirigée horizontalement, est appliquée au tiers de sa hauteur et vaut 6 t/m (pour un mètre de longueur du mur) ; le poids spécifique du maçonnage est de 2 gf/cm³.

Le mur doit être calculé au renversement autour de l'arête A.

Rép. $a \geqslant 1{,}42$ m.

2.55. Un château d'eau, formé par un réservoir cylindrique d'une hauteur de 6 m et dont le diamètre est de 4 m, est fixé à quatre poteaux inclinés disposés symétriquement; le fond du réservoir est à 17 m au-dessus du niveau des appuis; le poids du château d'eau est de 8 t; la pression du vent est calculée d'après l'aire de la projection de la surface du réservoir sur le plan perpendiculaire à la direction du vent, la pression spécifique du vent étant de 125 kgf/m². Déterminer la distance nécessaire AB entre les appuis des poteaux.

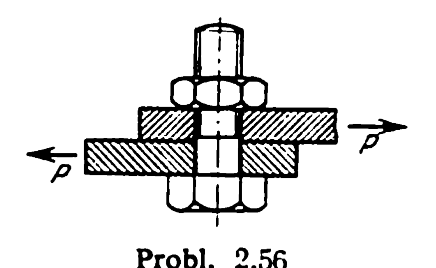
La distance AB doit être calculée au renversement par la pression du vent lorsque la direction de celle-ci est horizontale.

Rép. $AB \geqslant 15$ m.

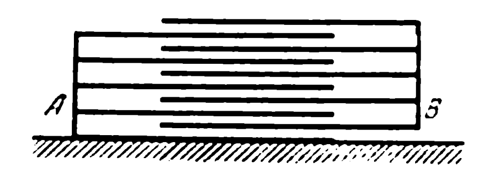
2.56. Déterminer la force avec laquelle il faut serrer le boulon joignant deux tôles d'acier soumises à une traction P de 2000 kgf. Le boulon est placé avec jeu et ne doit pas travailler en cisaillement. Le coefficient de frottement entre les tôles vaut 0,2. (Voir fig. p. 26.)

Indication: Le boulon ne doit pas travailler en cisaillement; c'est pourquoi il faut le serrer avec une force créant entre les tôles un frottement suffisant pour empêcher le glissement. La force agissant le long de l'axe du boulon est la force de serrage recherchée.

Rép. 10 000 kgf.



Probl. 2.56



Probl. 2.57

2.57. Des feuilles de papier étant disposées comme l'indique la figure, leurs extrémités libres sont collées de manière à obtenir deux paquets A et B. Le poids de chaque feuille est de 6 gf, le nombre total des feuilles est de 200, le coefficient d'adhérence entre les feuilles ainsi qu'entre une feuille et la table sur laquelle elle repose est de 0,2. Supposant l'un des paquets immobile, déterminer le plus petit effort horizontal P nécessaire pour retirer le second.

Rép. Lorsqu'on retire A de B la force $P=24{,}12$ kgf, lorsqu'on retire B de A la force $P=23{,}88$ kgf.

2.58. Un wagon se déplaçant sur un plan incliné de pente 0,008 atteint une vitesse déterminée et se déplace ensuite uniformément. Calculer la résistance R à l'avancement du wagon à cette vitesse, son poids étant de 50 t.

La pente du chemin est la tangente de l'angle que forme ce chemin avec une droite horizontale; la pente étant petite le sinus de cet angle peut être considéré comme égal à sa tangente.

Rép. $R=400$ kgf.

2.59. Un train monte avec une vitesse constante sur une voie rectiligne dont la pente est de 0,008; le poids du train sans la locomotive électrique est de 1 200 t. Déterminer la traction P de la locomotive, si la résistance à l'avancement vaut 0,005 de la pression exercée par le train sur les rails.

Rép. $P=15{,}6$ t.

2.60. La pente tg α d'un plan incliné rugueux est telle qu'un corps posé sur ce plan descend à une vitesse constante qui lui est communiquée à l'instant du départ. Déterminer le coefficient de frottement f.

Rép. $f=\operatorname{tg}\alpha$.

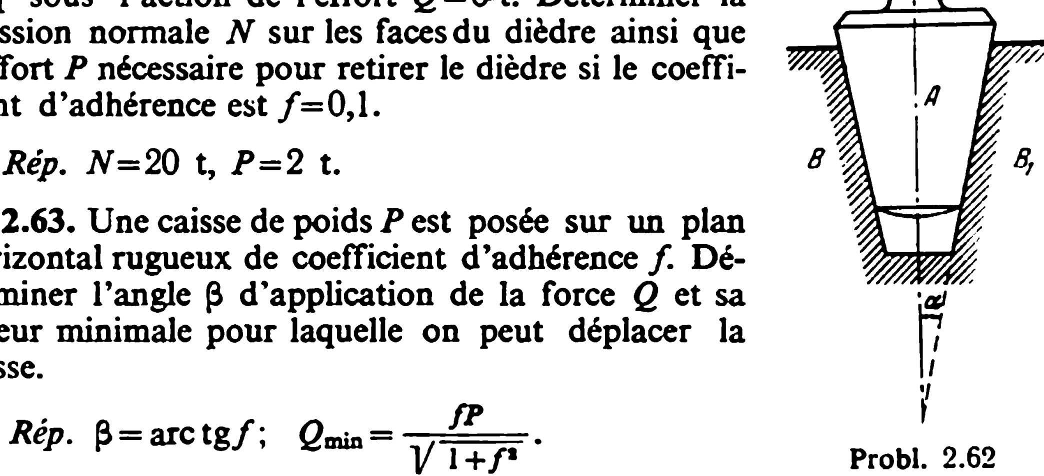
2.61. Déterminer la pente naturelle d'un talus si le coefficient d'adhérence du sol est $f=0{,}8$.

On appelle pente naturelle la plus grande pente du talus par rapport à l'horizontale pour laquelle une particule du sol se trouvant sur ce talus reste en équilibre.

Rép. 38°40′.

2.62. Un dièdre A dont la tangente du demi-angle au sommet $\operatorname{tg}\alpha=0{,}05$ est poussé dans une cavité BB_1 sous l'action de l'effort $Q=6$ t. Déterminer la pression normale N sur les faces du dièdre ainsi que l'effort P nécessaire pour retirer le dièdre si le coefficient d'adhérence est $f=0{,}1$.

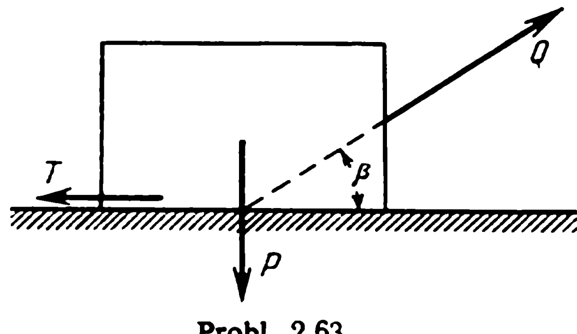
Rép. $N=20$ t, $P=2$ t.



Probl. 2.62

2.63. Une caisse de poids P est posée sur un plan horizontal rugueux de coefficient d'adhérence f. Déterminer l'angle β d'application de la force Q et sa valeur minimale pour laquelle on peut déplacer la caisse.

Rép. $\beta=\operatorname{arc\,tg} f$; $Q_{\min}=\dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$.



Probl. 2.63

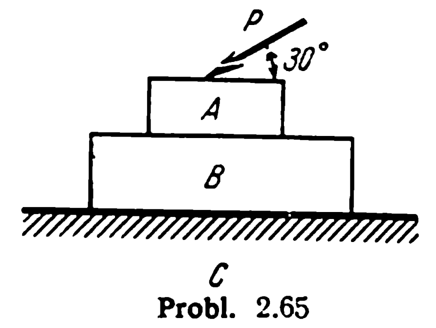
Probl. 2.64

2.64. Trois charges A, B, C pesant respectivement 10, 30 et 60 kgf se trouvent sur un plan incliné de pente tg α par rapport à l'horizontale. Les charges sont reliées par des câbles (cf. figure). Les coefficients d'adhérence entre les poids et le plan sont respectivement: $f_A=0{,}1$, $f_B=0{,}25$ et $f_C=0{,}5$.

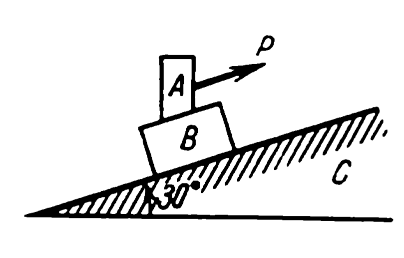
Déterminer l'angle α pour lequel les corps descendent uniformément sur le plan. Trouver aussi les tensions des câbles T_{AB} et T_{BC}.

Rép. $\alpha=\operatorname{arc\,tg} 0{,}38$; $T_{AB}=2{,}7$ kgf; $T_{BC}=6{,}5$ kgf.

2.65. Sur la face supérieure d'une poutre rectangulaire B pesant 200 kgf se trouve une poutre rectangulaire A de 100 kgf. La surface inférieure de la poutre B repose sur une surface horizontale C, le coefficient d'adhérence entre ces deux surfaces étant $f_2=0{,}2$. Le coefficient d'adhérence entre les poutres A et B, $f_1=0{,}5$. Une force $P=60$ kgf agit sur la poutre A sous un angle $\alpha=30°$ sur l'horizontale.



Probl. 2.65



Probl. 2.66

La poutre A se déplacera-t-elle par rapport à B? La poutre Bse déplacera-t-elle par rapport au plan C ? (Voir fig. p. 28.)

Rép. Les poutres A et B sont en équilibre.

2.66. Deux corps A et B reposent sur un plan incliné C (cf. figure). Le corps A pèse 100 kgf, le corps B 200 kgf. Le coefficient d'adhérence entre A et B est $f_1=0{,}6$, entre B et C, $f_2=0{,}2$.

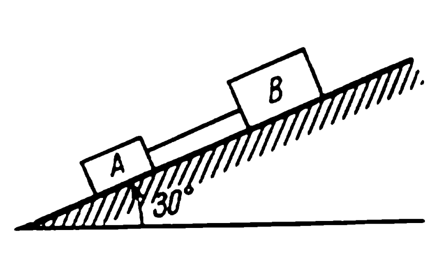
Etudier l'état du système pour différentes valeurs de la force P appliquée au corps A parallèlement au plan incliné.

Rép. Pour $P<98$ kgf les deux corps descendent sans déplacement réciproque; pour 98 kgf $<P<102$ kgf les deux corps sont au repos; pour $P>102$ kgf le corps B est immobile et le corps A glisse vers le haut sur le corps B.

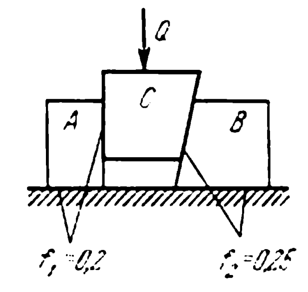
2.67. Deux poutres rectangulaires A et B qui pèsent respectivement 200 et 400 kgf se trouvent sur un plan incliné et sont reliées par un câble. Les coefficients d'adhérence de ces poids et du plan incliné sont $f_A=0{,}5$ et $f_B=2/3$. Le système se déplacera-t-il ou restera-t-il au repos? Trouver la tension T du câble et la valeur de la force d'adhérence agissant sur chaque corps.

Rép. Le système restera au repos.

$F_A=86{,}6$ kgf, $F_B=213{,}4$ kgf, $T=13{,}4$ kgf.



Probl. 2.67



Probl. 2.68

2.68. Le dièdre C est inséré entre deux corps A et B reposant sur un plan horizontal rugueux. L'une des faces du dièdre est verticale, l'autre forme avec la verticale un angle $\alpha=\text{arc tg } 1/3$.

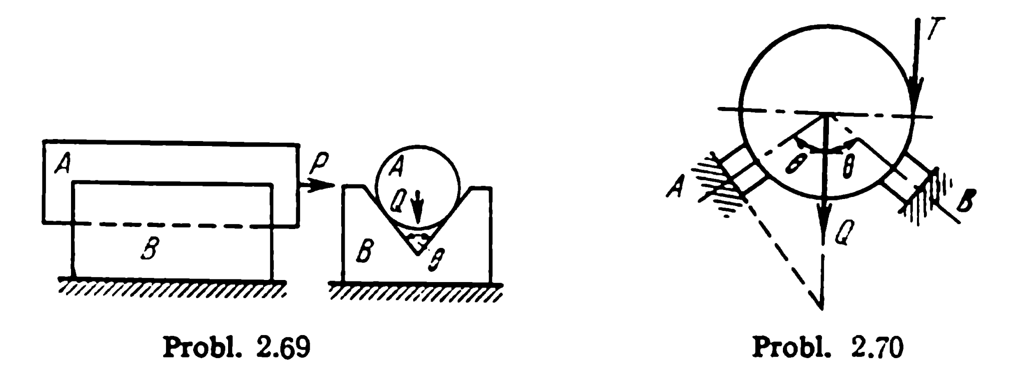
Le corps A pèse 400 kgf, le corps B 300 kgf; les coefficients d'adhérence entre les surfaces sont indiqués sur la figure. Trouver la valeur de la force Q sous l'action de laquelle l'un des corps se déplacera, ainsi que la valeur de la force d'adhérence F entre le plan horizontal et le corps resté immobile.

Rép. $Q=70$ kgf, c'est le corps A qui se déplacera; $F_B=83$ kgf.

2.69. Le cylindre A repose sur un guide B dont la section droite est un dièdre symétrique d'angle au sommet θ. Le coefficient d'adhérence entre le cylindre A et le guide B est f. Le poids du cylindre est Q. Pour quelle valeur de la force P le cylindre commencera-t-il à se mouvoir

horizontalement? Quel doit être l'angle Θ pour que le mouvement s'accomplisse lorsque l'action de la force P est égale au poids du cylindre Q?

Rép. $P = \frac{Qf}{\sin\frac{\theta}{2}}$; $\theta = 2 \arcsin f$.



Probl. 2.69 Probl. 2.70

2.70. Un cylindre de poids Q est posé sur deux appuis A et B disposés symétriquement par rapport à la verticale passant par le centre du cylindre. Le coefficient d'adhérence entre le cylindre et les appuis est f. Déterminer la valeur de la force tangentielle T pour laquelle le cylindre commence à tourner. Pour quel angle θ ce dispositif sera-t-il autofreiné?

Rép. $T = \frac{fQ}{(1+f)^2 \cos\theta - f}$; $\theta \leqslant \arccos \frac{f}{1+f^2}$.

§ 3. Forces parallèles

3.1. Déterminer les réactions verticales des appuis sur lesquels reposent les extrémités d'une poutre horizontale de longueur l soumise à une charge uniformément répartie d'intensité p N par unité de longueur (p est considéré comme coefficient de charge linéique). Le poids de la poutre est compris dans la charge uniformément répartie.

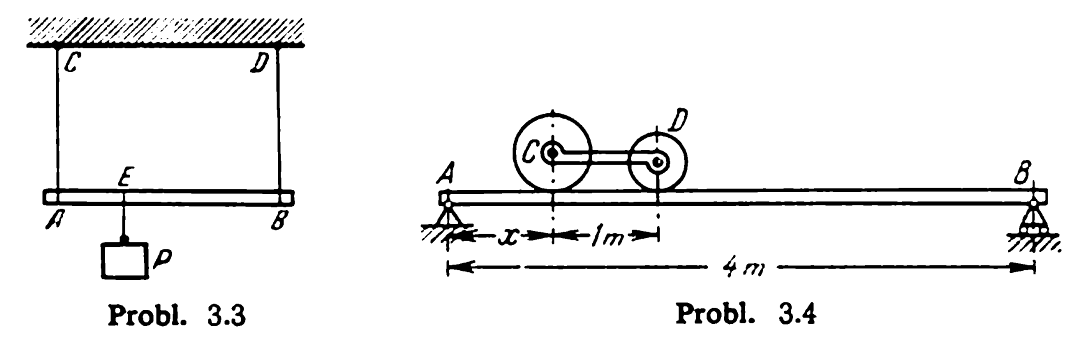
Rép. $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} pl$ N.

3.2. Déterminer les réactions verticales des appuis d'une poutre horizontale de longueur l, si la charge P agit à une distance x du premier appui.

Rép. $R_1 = P\frac{l-x}{l}$; $R_2 = P\frac{x}{l}$.

3.3. Une barre homogène AB longue de 1 m et pesant 2 kgf est suspendue horizontalement par deux cordes verticales AC et BD. Un poids $P = 12$ kgf est suspendu au point E de cette barre, $AE = \frac{1}{4}$ m. Déterminer les tensions des cordes T_C et T_D (voir fig. p. 30).

Rép. $T_C = 10$ kgf; $T_D = 4$ kgf.

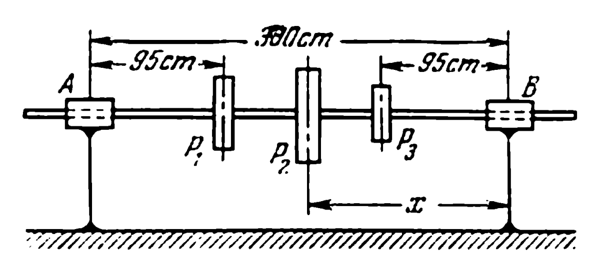


Probl. 3.3 Probl. 3.4

3.4. Deux charges dont l'une C est de 200 kgf et l'autre D de 100 kgf sont posées sur une poutre horizontale reposant sur deux appuis distants de 4 m, de sorte que la réaction de l'appui A est le double de celle de B, si l'on néglige le poids propre de la poutre. La distance CD entre les charges est de 1 m. Quelle est la distance x de la charge C à l'appui A?

Rép. $x=1$ m.

3.5. Trois poulies de poids $P_1=300$ kgf, $P_2=500$ kgf, $P_3=200$ kgf sont solidaires d'un arbre de transmission AB. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Déterminer à quelle distance x du palier B la poulie de poids P_2

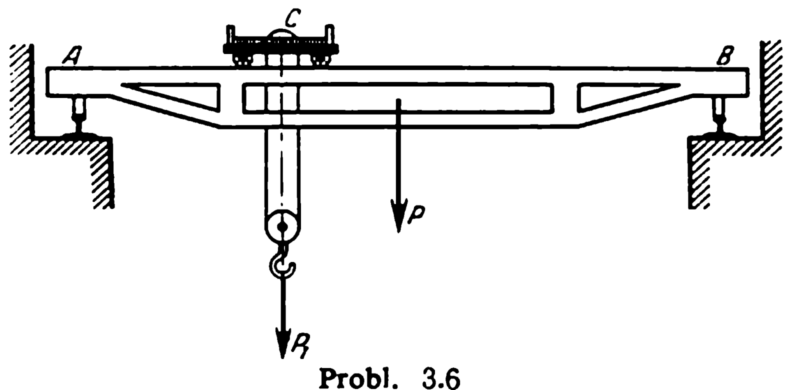


Probl. 3.5

doit être fixée pour que la réaction du palier A soit égale à celle du palier B; négliger le poids propre de l'arbre.

Rép. $x=139$ cm.

3.6. Trouver les valeurs des pressions qu'exerce sur les rails le pont roulant AB en fonction de la position du chariot C comportant un treuil. La position du chariot est déterminée par la distance entre son point médian



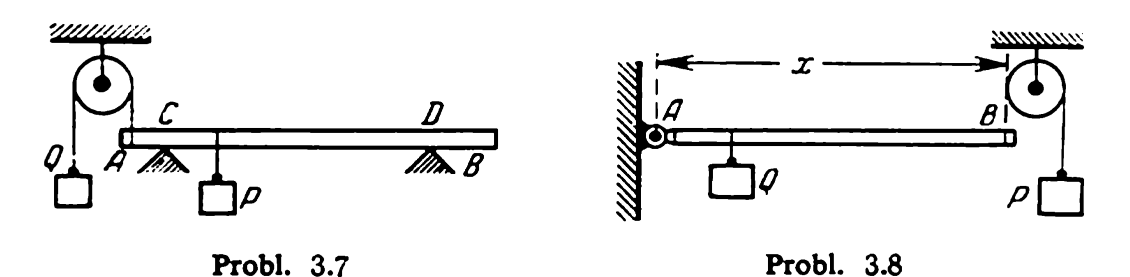
Probl. 3.6

et le rail gauche exprimée en fractions de la longueur totale du pont. Le poids du pont $P=6$ t, le poids du chariot avec la charge q'uil porte est $P_1=4$ t.

Rép. $F_A=(7-4n)$ t; $F_B=(3+4n)$ t; $n=\frac{AC}{AB}$.

3.7. Une poutre AB longue de 10 m et d'un poids de 200 kgf repose sur deux appuis C et D. L'appui C est à 2 m de l'extrémité A et l'appui D à 3 m de l'extrémité B. L'extrémité A de la poutre est relevée au moyen d'un câble passant sur une poulie; une charge $Q=300$ kgf est suspendue à l'autre extrémité de ce câble. Une charge $P=800$ kgf est suspendue à 3 m de l'extrémité A de la poutre. Déterminer les réactions des appuis en négligeant le frottement dans la poulie.

Rép. $R_C=300$ kgf; $R_D=400$ kgf.



Probl. 3.7 Probl. 3.8

3.8. La barre horizontale AB de 100 N peut tourner autour de l'axe fixe de l'articulation A. L'extrémité B est relevée par un fil passant sur une poulie; un poids $P=150$ N est suspendu à l'autre extrémité de ce fil. Une charge $Q=500$ N est suspendue en un point situé à une distance de 20 cm de l'extrémité B. Quelle est la longueur x de la barre AB, si cette dernière est en équilibre?

Rép. $AB=25$ cm.

3.9. L'extrémité A d'une barre horizontale AB de 20 kgf, longue de 5 m, est soulevée par une corde passant sur une poulie, une charge de 10 kgf étant suspendue à l'autre extrémité de cette corde. L'extrémité B est soulevée de la même manière au moyen d'une charge de 20 kgf. Des charges pesant respectivement 5, 10, 15 et 20 kgf sont suspendues aux points C, D, E et F distants de 1 m ($AC=FB=1$ m). En quel point faut-il soutenir la barre pour qu'elle reste en équilibre? (Voir fig. p. 32.)

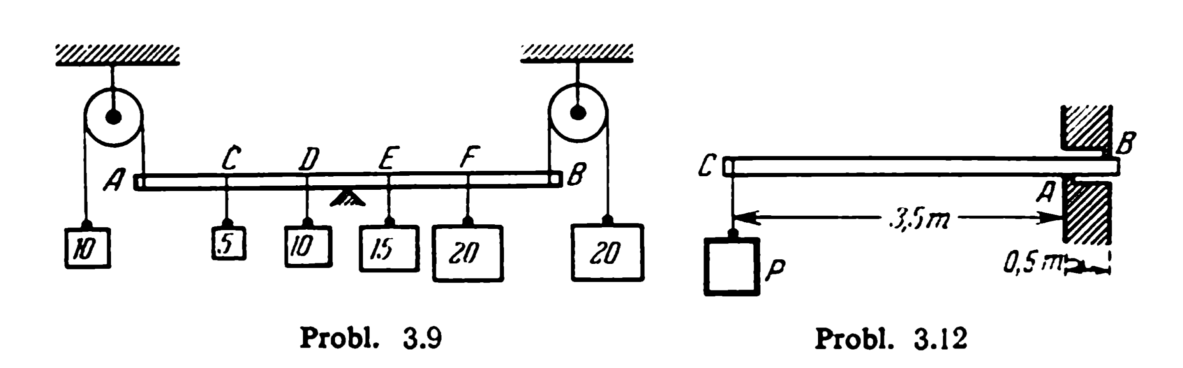
Rép. En son milieu.

3.10. Quatre charges équidistantes sont suspendues à une barre homogène longue de 3 m et pesant 6 N (la première et la quatrième charge sont suspendues aux extrémités de la barre). La première charge, à gauche, pèse 2 N, chacune des charges suivantes est de 1 N plus lourde que la précédente. A quelle distance x de l'extrémité gauche faut-il suspendre la barre pour qu'elle reste en équilibre?

Rép. $x=1{,}75$ m.

3.11. Une poutre homogène horizontale est articulée au mur et repose sur un appui situé à 160 cm du mur. La longueur de la poutre est de 400 cm, son poids de 320 kgf. La poutre soutient deux charges de 160 et de 240 kgf situées à 120 et à 180 cm du mur. Déterminer les réactions des appuis.

Rép. 790 kgf, dirigée vers le haut; 70 kgf, dirigée vers le bas.



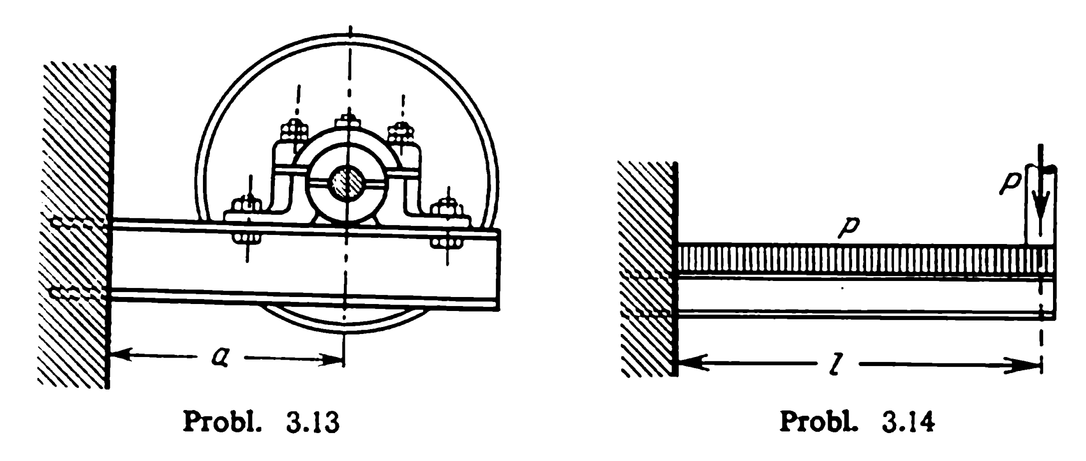
Probl. 3.9 **Probl.** 3.12

3.12. Une poutre homogène horizontale longue de 4 m et pesant 0,5 t est encastrée dans un mur épais de 0,5 m en sorte qu'elle s'y appuie aux points A et B. Déterminer les réactions en ces points, si l'on suspend une charge $P=4$ t à l'extrémité libre de la poutre.

Rép. $R_A=34$ t, dirigée vers le haut; $R_B=29{,}5$ t, dirigée vers le bas.

3.13. L'une des extrémités d'une poutre horizontale est encastrée dans un mur, l'autre soutient le palier d'un arbre. La poutre subit l'action d'une charge verticale $Q=120$ kgf égale à la somme des poids de l'arbre, des poulies et du palier. Négligeant le poids propre de la poutre et admettant que la charge Q agisse à une distance $a=750$ mm du mur, calculer les réactions de l'encastrement.

Rép. La réaction $R=120$ kgf; le moment de réaction $M=90$ kgfm.



Probl. 3.13 **Probl.** 3.14

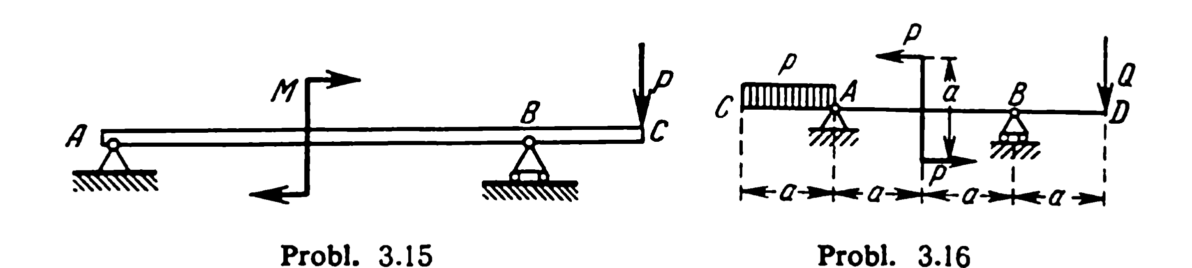
3.14. Une poutre horizontale soutenant un balcon est soumise à l'action d'une charge uniformément répartie d'intensité $p=200$ kgf/m. La charge $P=200$ kgf de la colonne est transmise à l'extrémité libre de la

poutre. La distance de l'axe de la colonne au mur est $l=1,5$ m. Déterminer les réactions à l'encastrement.

Rép. $R=500$ kgf; $M=525$ kgfm.

3.15. Une console horizontale est soumise à l'action d'un couple de forces de moment $M=6$ tm et d'une charge verticale $P=2$ t appliquée au point C de la poutre. La longueur de la travée de la poutre $AB=3,5$ m, la longueur de la console $BC=0,5$ m. Déterminer les réactions des appuis.

Rép. $R_A=2$ t, dirigée vers le bas; $R_B=4$ t, dirigée vers le haut.



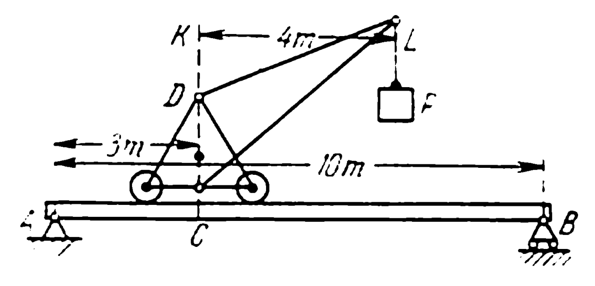
Probl. 3.15 Probl. 3.16

3.16. Une poutre horizontale à deux consoles est soumise à l'action d'un couple de forces (P, P), d'une charge uniformément répartie sur la console gauche, d'intensité p, et d'une charge verticale Q appliquée au point D de la console droite. Déterminer les réactions des appuis, si $P=1$ t, $Q=2$ t, $p=2$ t/m, $a=0,8$ m.

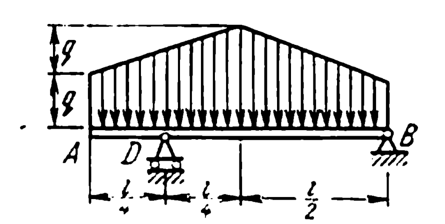
Rép. $R_A=1,5$ t; $R_B=2,1$ t.

3.17. Les rails d'une grue sont posés sur une poutre AB longue de 10 m. Le poids de la grue est de 5 t et son centre de gravité est situé sur l'axe CD; le poids de la charge P est de 1 t; le poids propre de la poutre AB est de 3 t; la portée de la grue $KL=4$ m; $AC=3$ m. Trouver les réactions des appuis aux points A et B lorsque la flèche DL de la grue et la poutre AB se trouvent dans un même plan vertical.

Rép. $R_A=5,3$ t; $R_B=3,7$ t.



Probl. 3.17



Probl. 3.18

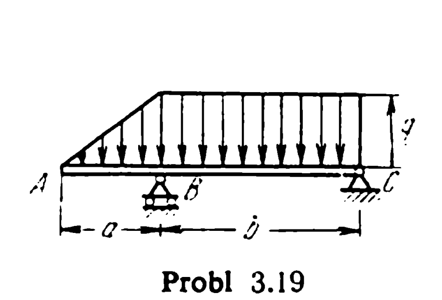
3.18. La poutre AB de longueur l m porte une charge répartie indiquée sur la figure. Le coefficient de charge est q kgf/m aux extrémités

A et B et $2q$ kgf/m au milieu de la poutre. Négligeant le poids propre de la poutre, trouver les réactions des appuis D et B.

Rép. $R_D = ql$ kgf; $R_B = 0{,}5\ ql$ kgf.

3.19. Une poutre horizontale AC reposant sur deux appuis B et C porte entre ces appuis une charge uniformément répartie de coefficient de charge linéique q kgf/m; sur le tronçon AB ce coefficient diminue linéairement jusqu'au zéro. Trouver les réactions des appuis B et C; négliger le poids propre de la poutre.

Rép. $R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right)$ kgf; $\quad R_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right)$ kgf.



Probl 3.19

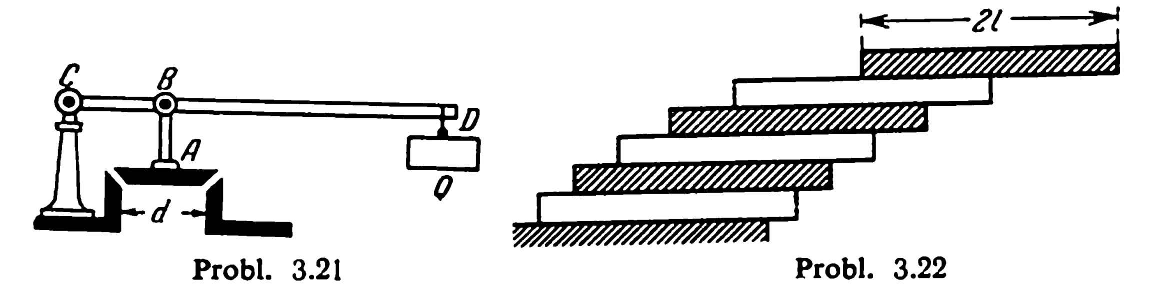
Probl. 3.20

3.20. La vanne rectangulaire AB d'un canal d'irrigation peut tourner autour de l'axe O. Lorsque le niveau de l'eau est faible la vanne est fermée, mais pour un certain niveau H de l'eau la vanne tourne autour de l'axe et ouvre le canal. Déterminer la hauteur H pour laquelle s'ouvre la vanne; négliger le frottement et le poids de la vanne.

Rép. $H = 3h \sin\alpha$.

3.21. La soupape de sûreté A d'une chaudière à vapeur est reliée par une tige AB à un levier homogène CD long de 50 cm et pesant 1 kgf, pouvant tourner autour de l'axe fixe C; le diamètre de la soupape $d = 6$ cm, le bras du levier $BC = 7$ cm. Quelle charge Q faut-il suspendre à l'extrémité D du levier pour que la soupape s'ouvre sous une pression de 11 atm dans la chaudière (1 atm = 1 kgf/cm^2)?

Rép. $Q = 43$ kgf.



Probl. 3.21

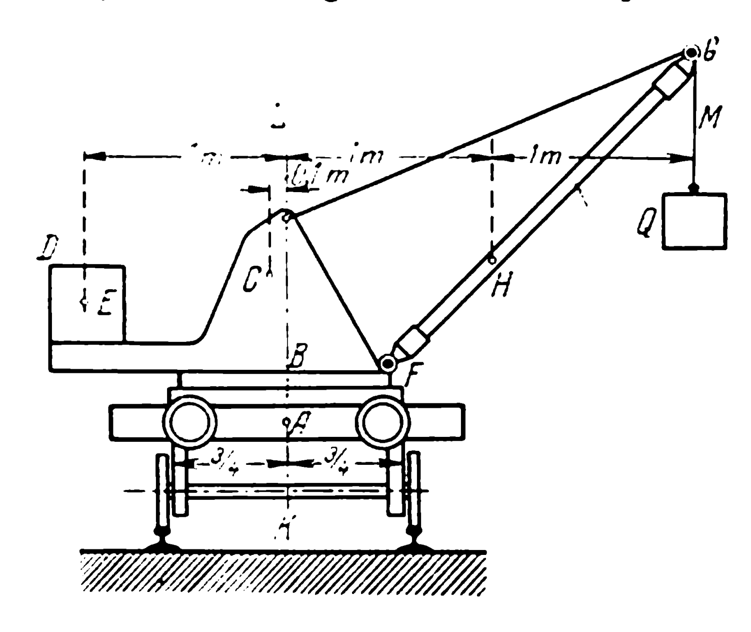
Probl. 3.22

3.22. Des plaques identiques et homogènes de longueur $2l$ sont superposées de manière qu'une partie de chacune d'elles déborde la plaque sous-jacente. Déterminer les longueurs limites des parties en saillie pour lesquelles les plaques sont en équilibre.

Leurs poids s'additionnent successivement à partir de la plaque supérieure.

Rép. l, $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{3}l$, $\frac{1}{4}l$, $\frac{1}{5}l$, etc.

3.23. Une grue s'appuie sur des rails distants de 1,5 m. Le poids de son chariot est de 3 t, son centre de gravité se trouve au point A de la ligne

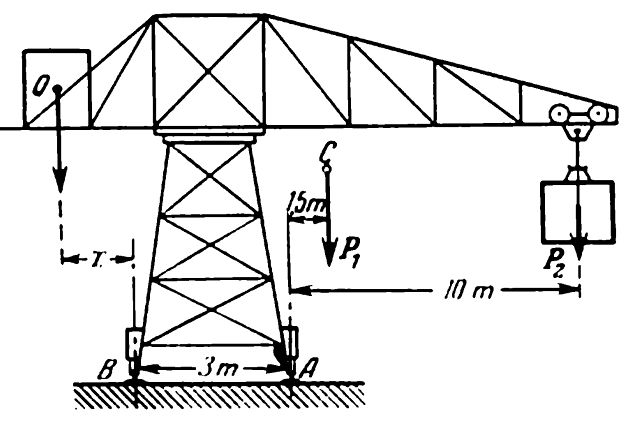


Probl. 3.23

KL d'intersection du plan de symétrie du chariot avec le plan de la figure. Le treuil B de la grue pèse 1 t, son centre de gravité est au point C à une distance de 0,1 m de la droite KL. Le contrepoids D pèse 2 t, son centre de gravité est au point E à une distance de 1 m de la droite KL. La flèche FG pèse 0,5 t, son centre de gravité se trouve au point H à une distance de 1 m de la droite KL. La portée de la grue $LM=2$ m. Déterminer la plus grande charge Q pour laquelle la grue ne chavire pas.

Rép. $Q=5{,}18$ t.

3.24. Le centre de gravité d'une grue mobile sur rails pesant (sans le contrepoids) $P_1=50$ t, est situé au point C dont la distance au plan verti-

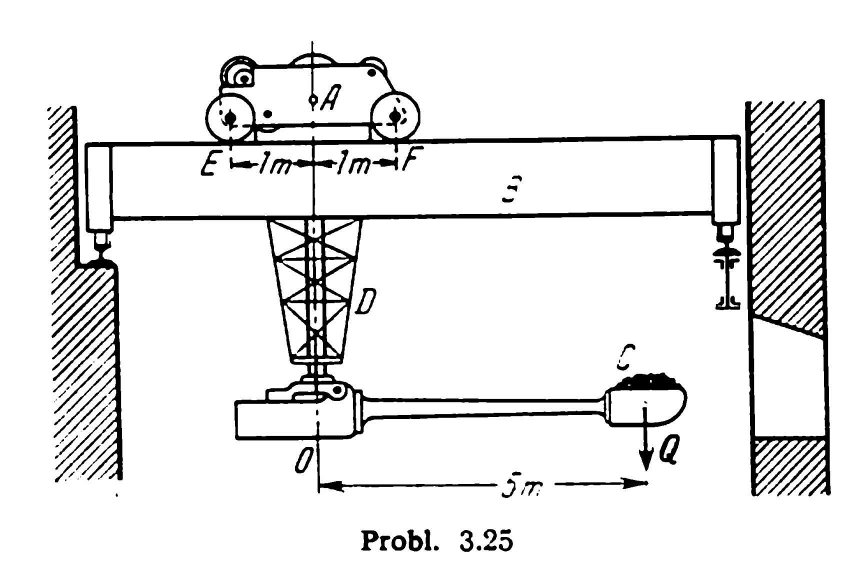


Probl. 3.24

cal passant par le rail droit *A* est de 1,5 m. Le chariot de la grue est prévu pour soulever une charge $P_2=25$ t; sa portée est de 10 m. Déterminer le plus petit poids *Q* du contrepoids et la plus grande distance *x* allant de son centre de gravité au plan vertical passant par le rail gauche *B* de manière à ce que la grue ne se renverse pas pour toutes les positions du chariot chargé ou non. Négliger le poids du chariot.

Rép. $Q=33{,}3$ t; $x=6{,}75$ m.

3.25. La grue de chargement d'un four Martin comporte un treuil *A* roulant sur des rails qui reposent sur les poutres du pont roulant *B*. A sa partie inférieure le treuil comporte une colonne *D* servant à fixer une pelle *C*. Quel doit être le poids *P* du treuil et de la colonne pour que la

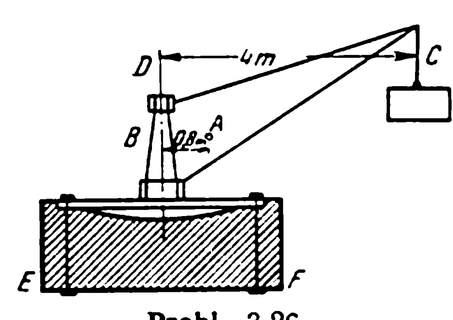


Probl. 3.25

charge $Q=1{,}5$ t se trouvant dans la pelle à une distance de 5 m de l'axe vertical *OA* du treuil ne le renverse pas? Le centre de gravité du treuil est situé sur l'axe *OA*; la distance de l'axe de chacune des roues à l'axe *OA* est de 1 m.

Rép. $P \geqslant 6$ t.

3.26. Une grue est montée sur un fondement de maçonnerie. Son poids $G=2{,}5$ t se trouve appliqué en son centre de gravité *A* à une distance $AB=0{,}8$ m de son axe; sa portée est $CD=4$ m. La base du fondement de forme rectangulaire a pour côté $EF=2$ m; le poids spécifique de la maçonnerie est de 2 gf/cm³. Calculer la profondeur minimale du fondement, si la grue est destinée à lever des charges maximales de 3 t, le fondement devant être calculé au renversement autour de l'arête *F*.



Probl. 3.26

Rép. 1,1 m.

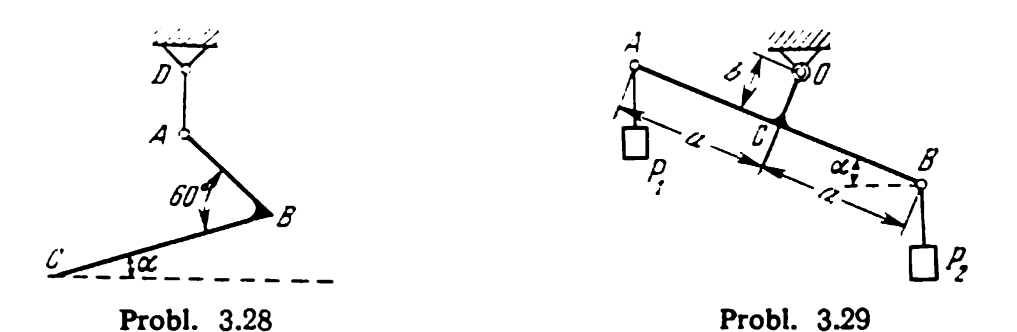
3.27. Une aiguille magnétique est suspendue à un fil fin et se trouve disposée horizontalement dans la méridienne magnétique. Les composantes horizontales de la force du champ magnétique terrestre agissant sur les pôles de l'aiguille en sens opposés valent chacune 2 mgf, la distance entre les pôles étant de 10 cm. De quel angle faut-il tordre le fil pour que l'aiguille forme un angle de 30° avec la méridienne magnétique sachant que pour tordre le fil de 1°, il faut appliquer un couple de moment égal à 5 mgfcm?

Le moment du couple de torsion est en raison de la torsion.

Rép. 32°.

3.28. Deux barres homogènes AB et BC de même section droite reliées à leurs extrémités sous un angle de 60° forment le levier coudé ABC. La barre AB est deux fois plus courte que la barre BC. Le levier est suspendu à son extrémité A par un fil AD. Déterminer l'inclinaison α de la barre BC sur l'horizontale lorsque le levier est en équilibre; négliger les dimensions latérales des barres.

Rép. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}$; $\alpha = 19°5'$.



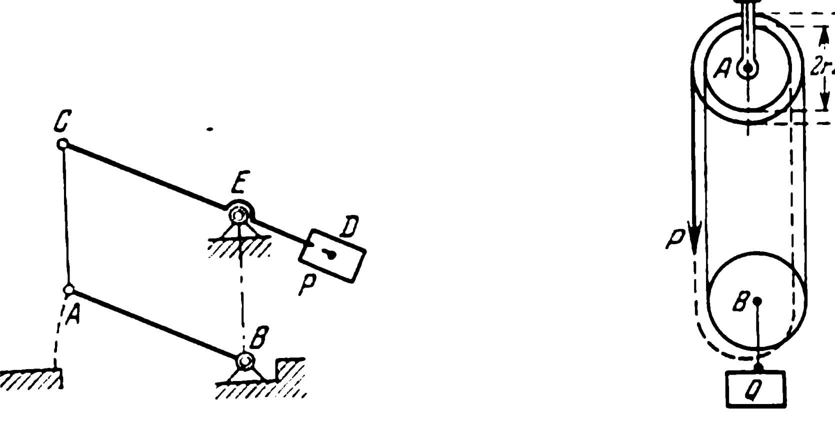
Probl. 3.28 Probl. 3.29

3.29. Deux barres AB et OC dont le poids spécifique est de $2p$ par unité de longueur sont reliées au point C en formant un angle droit. La barre OC peut tourner autour de l'axe horizontal O; $AC=CB=a$, $OC=b$. Deux poids P_1 et P_2 sont suspendus aux points A et B; $P_2>P_1$. Déterminer la pente $\operatorname{tg} \alpha$ de la barre AB sur l'horizontale à l'état d'équilibre.

Rép. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{P_2-P_1}{P_2+P_1+p(4a+b)}$.

3.30. Un pont-levis AB se relève au moyen de deux poutres CD longues de 8 m et pesant 400 kgf, situées de part et d'autre du pont; la longueur du pont $AB=CE=5$ m; la longueur de la chaîne $AC=BE$; le poids du pont est appliqué au milieu de AB et vaut 3 t. Calculer le poids des contrepoids P.

Rép. $P = 1\,383$ kgf.

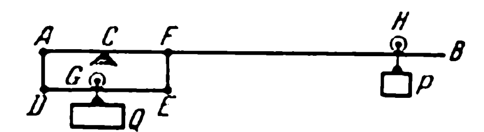


Probl. 3.30 Probl. 3.31

3.31. Deux poulies solidaires A dont l'axe est suspendu à un crochet fixe, forment la partie principale d'un palan différentiel. Leurs gorges sont munies de dents qui engrènent une chaîne sans fin formant deux boucles dont l'une supporte la poulie mobile B. Celle-ci soulève la charge Q; l'effort P est appliqué au tronçon de la boucle libre qui pend de la grande poulie fixe. Les rayons des poulies A sont R et r, $r < R$. Trouver la dépendance de l'effort P par rapport à la valeur de la charge soulevée Q et déterminer cet effort dans le cas: $Q = 500$ N, $R = 25$ cm, $r = 24$ cm. Négliger le frottement.

Rép. $P = \frac{1}{2} Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10\,\text{N}$.

3.32. Un levier différentiel comporte une barre AB reposant sur un prisme d'appui fixe au point C; une traverse DE est liée au levier AB par de biellettes articulées AD et EF. La charge $Q = 1$ t est suspendue à la traverse au point G au moyen d'un prisme. La distance entre les verticales



Probl. 3.32

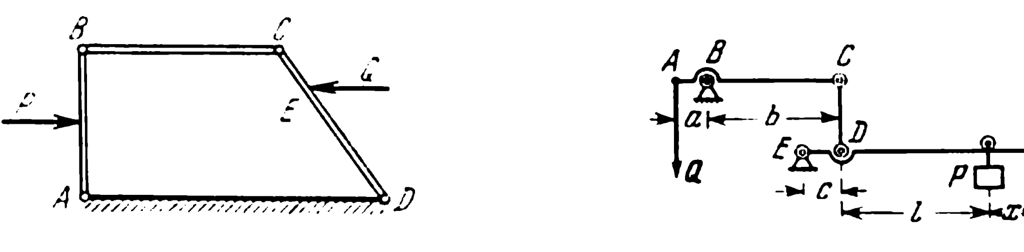
menées par les points C et G est de 1 mm. Déterminer quel poids P doit être suspendu au levier AB en un point H à la distance $CH = 1$ m pour équilibrer la charge Q. Négliger le frottement.

Rép. $P = 1$ kgf.

3.33. Dans un mécanisme articulé l'élément BC est parallèle à l'élément fixe AD. L'élément $AB = h$ est perpendiculaire à AD. Une force horizontale P est appliquée au milieu de AB. Quelle force horizontale Q faut-il appliquer à l'élément CD en un point E, si $CE = \frac{CD}{4}$, pour que le méca-

nisme soit en équilibre? Trouver la réaction dans l'articulation *D*. Négliger les poids des éléments.

Rép. $Q=\frac{2}{3}P$; $R_D=\frac{1}{6}P$, dirigée suivant *AD* à droite.



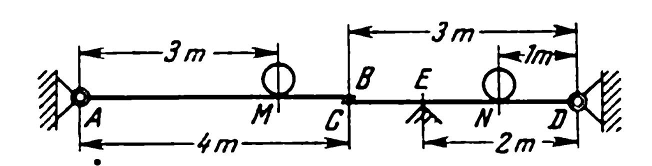
Probl. 3.33 **Probl. 3.34**

3.34. Pour mesurer de grands efforts *Q* on a construit un système de deux leviers à bras inégaux *ABC* et *EDF* reliés par la tringle *CD*. Ce système repose sur deux appuis fixes aux points *B* et *E*. Une charge *P* pesant 12,5 kgf peut se déplacer sur le levier *EDF*. La force *Q* appliquée au point *A* est équilibrée par cette charge située à une distance *l* du point *D*.

A quelle distance *x* faut-il déplacer la charge *P* pour conserver l'équilibre lorsque la force *Q* croît de 1000 kgf? On a : $a=3{,}3$ mm, $b=660$ mm, $c=50$ mm.

Rép. $x=2$ cm.

3.35. Une poutre *AB* longue de 4 m et pesant 200 kgf peut tourner autour d'un axe horizontal *A* et s'appuie par son extrémité *B* sur une autre poutre *CD* longue de 3 m et pesant 160 kgf, prenant appui en un point *E* et articulée au mur en *D*. Deux charges de 80 kgf chacune sont posées



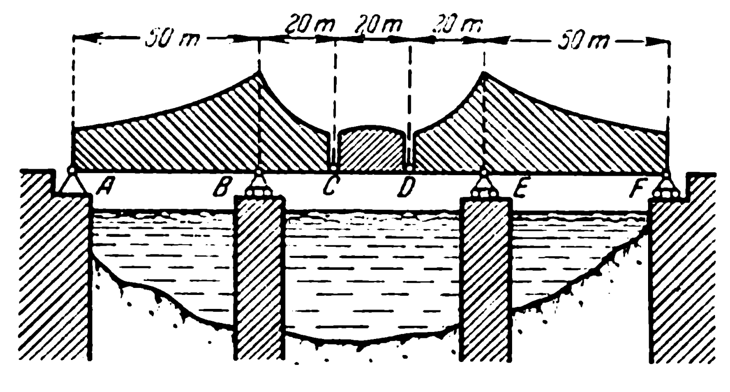
Probl. 3.35

aux points *M* et *N*. On a : $AM=3$ m, $ED=2$ m, $ND=1$ m. Déterminer les réactions des appuis.

Rép. $R_A=120$ kgf; $R_B=160$ kgf; $R_E=400$ kgf; $R_D=0$.

3.36. Un pont à cantilever comporte trois tronçons : *AC*, *CD* et *DF* dont les extrémités reposent chacune sur deux appuis. Les dimensions sont les suivantes : $AC=DF=70$ m, $CD=20$ m, $AB=EF=50$ m. La densité de charge sur le pont est de 6 t par mètre. Trouver les pressions dues à cette charge sur les appuis *A* et *B* (voir fig. p. 40).

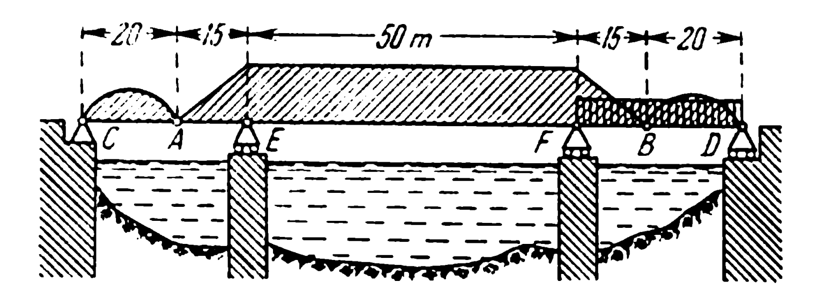
Rép. $N_A=102$ t; $N_B=378$ t.



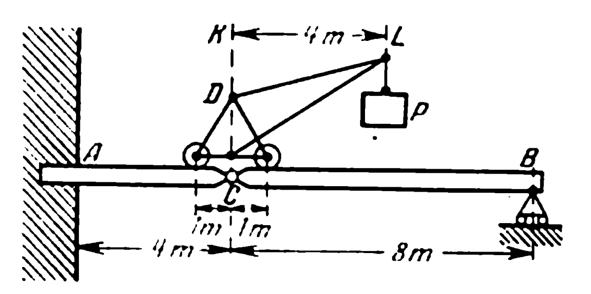
Probl. 3.36

3.37. Un pont à cantilever comporte une ferme principale *AB* et deux fermes latérales *AC* et *BD*. Le poids propre d'un mètre courant de la ferme *AB* est de 1,5 t, celui des fermes *AC* et *BD* de 1 t. Déterminer les réactions de tous les appuis à l'instant où la travée *FD* est occupée entièrement par un train dont le poids peut être remplacé par une charge uniformément répartie sur cette travée, ayant une densité de charge de 3 t/m. Les dimensions sont les suivantes : $AC=BD=20$ m; $AE=BF=15$ m; $EF=50$ m.

Rép. $R_C=10$ t; $R_D=40$ t; $R_E=54{,}25$ t; $R_F=160{,}75$ t.



Probl. 3.37



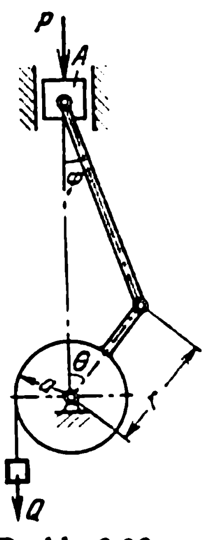
Probl. 3.38

3.38. L'extrémité *A* d'une poutre brisée *ABC* est encastrée dans le mur et son extrémité *B* repose sur un appui mobile; au point *C* la poutre possède une articulation. La poutre est chargée par une grue pouvant porter un poids $P=1$ t; la portée de la grue $KL=4$ m, son poids $Q=5$ t, son centre de gravité est situé sur la verticale *CD*. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Si l'on néglige le poids propre de la poutre quelles sont les réac-

tions des appuis aux points A et B lorsque la grue et la poutre AB sont dans un même plan vertical?

Rép. $R_A=5{,}375$ t; $R_B=0{,}625$ t; $M_A=20{,}5$ tm.

3.39. En négligeant le frottement entre le coulisseau A et le guide et celui des articulations et des paliers du mécanisme à manivelle, déterminer la force P nécessaire pour maintenir la charge Q dans la position du mécanisme indiquée sur la figure. Trouver les valeurs minimale et maximale de P assurant l'immobilité de la charge Q, si le coefficient de frottement entre le coulisseau A et le guide est f.



Probl. 3.39

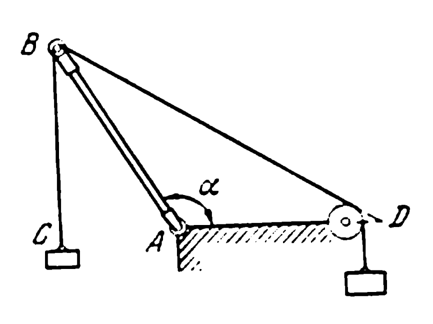
Rép. $P=\dfrac{Qa\cos\varphi}{r\sin(\varphi+\theta)}$; $P_{\min}=\dfrac{Qa}{r}\,\dfrac{\cos\varphi-f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}$;

$$P_{\max}=\frac{Qa}{r}\,\frac{\cos\varphi+f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

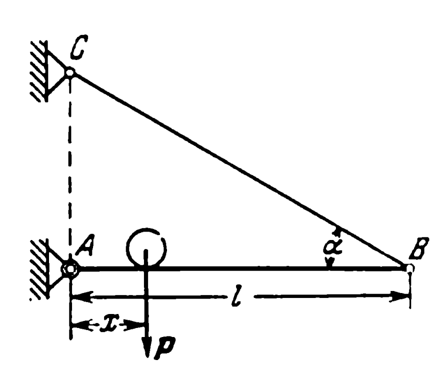
§ 4. Système plan arbitraire de forces

4.1. Un poids C pesant 10 N est suspendu par une corde à l'extrémité B d'une barre homogène AB pouvant tourner autour de l'articulation A. De l'extrémité B on tend un câble passant sur la poulie D et supportant un poids de 20 N. Trouver la valeur de l'angle $\widehat{BAD}=\alpha$ pour laquelle la barre est en équilibre sachant que $AB=AD$ et que la barre pèse 20 N. Négliger le frottement dans la poulie.

Rép. $\alpha=120°$.



Probl. 4.1



Probl. 4.2

4.2. La poutre horizontale d'une grue de longueur l est articulée à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité B étant suspendue à un mur par une tringle BC dont la pente par rapport à l'horizontale est tg α. Une charge P peut se déplacer sur la poutre, sa position étant définie par la distance variable x de l'articulation A. Déterminer la tension T de la tringle BC en fonction de la position de la charge. Négliger le poids de la poutre.

Rép. $T=\dfrac{Px}{l\sin\alpha}$.



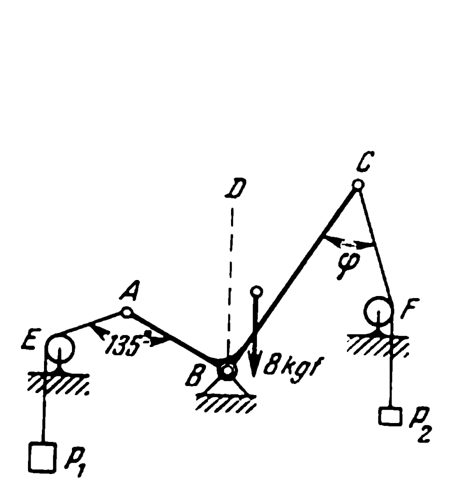
Probl. 4.3

4.3. Une boule homogène de poids Q et de rayon a et un poids P sont suspendus par des cordes au point O (cf. figure). La distance $OM=b$. Déterminer l'angle φ que forme la droite OM avec la verticale à l'équilibre.

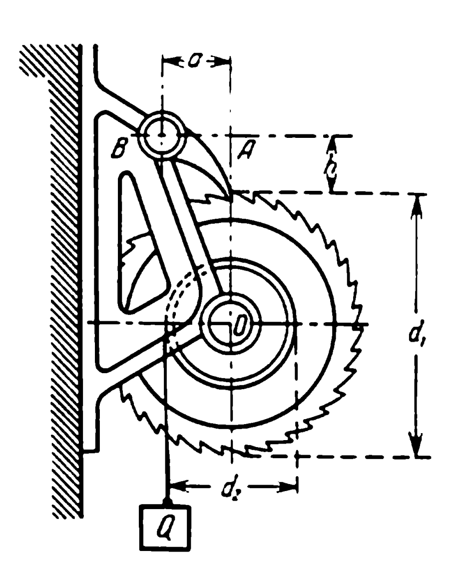
Rép. $\sin\varphi = \frac{a}{b}\,\frac{P}{P+Q}$.

4.4. Un levier coudé ABC d'axe fixe B pèse 8 kgf; le bras $AB=4$. dm, le bras $BC=1$ m, le centre de gravité du levier est situé à 2,12 dm de la droite verticale BD. Des cordes passant sur les poulies E et F sont attachées aux points A et C et tendues par les poids $P_1=31$ kgf et $P_2=10$ kgf. Négligeant le frottement dans les poulies, déterminer l'angle $\widehat{BCF}=\varphi$ à l'état d'équilibre, si $\widehat{BAE}=135°$.

Rép. $\varphi_1=45°$; $\varphi_2=135°$.



Probl. 4.4



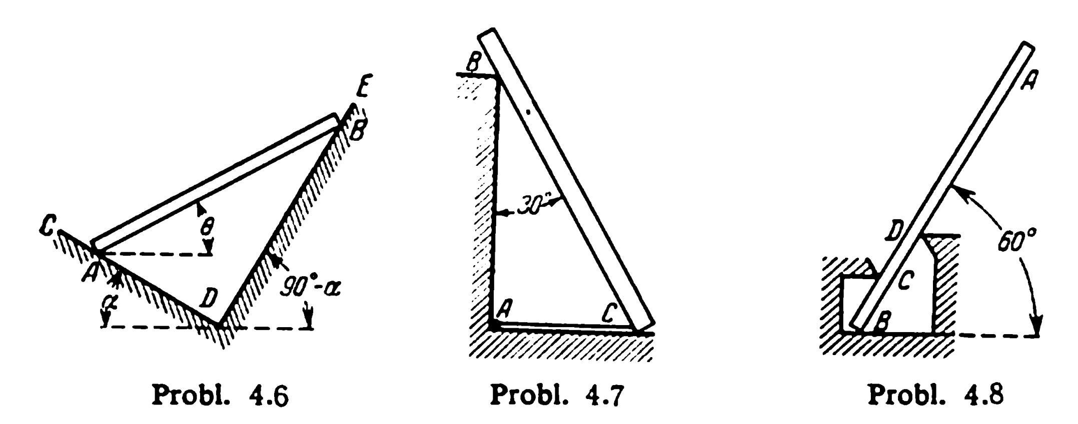
Probl. 4.5

4.5. Un treuil est muni d'une roue à cliquet de diamètre d_1 avec un déclic A. Un câble supportant une charge Q s'enroule sur un cylindre de diamètre d_2 solidaire de la roue. Déterminer la pression R sur l'axe B du déclic A sachant que : $Q=50$ kgf, $d_1=420$ mm, $d_2=240$ mm, $h=50$ mm, $a=120$ mm. Négliger le poids du déclic.

Rép. $P=Q\,\frac{d_2}{d_1}\,\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}=31$ kgf.

4.6. Une poutre homogène AB de poids P s'appuie sur deux droites lisses et obliques CD et DE situées dans le plan vertical; la première forme un angle α avec l'horizontale, la seconde un angle de $90°-\alpha$. Trouver l'angle Θ d'inclinaison de la poutre sur l'horizontale à l'état d'équilibre et les pressions qu'elle exerce sur les droites d'appui.

Rép. $N_A=P\cos\alpha$; $N_B=P\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{ctg}2\alpha$; $\Theta=90°-2\alpha$ pour $\alpha\leqslant 45°$.



Probl. 4.6 Probl. 4.7 Probl. 4.8

4.7. Une poutre homogène pesant 60 kgf et longue de 4 m s'appuie par l'une de ses extrémités sur un plancher lisse et en un point intermédiaire B, sur un poteau haut de 3 m formant ainsi un angle de 30° avec la verticale. La poutre est maintenue dans cette position par une corde AC tendue sur le plancher. Négligeant le frottement déterminer la tension de la corde T et les réactions R_B du poteau et R_C du plancher.

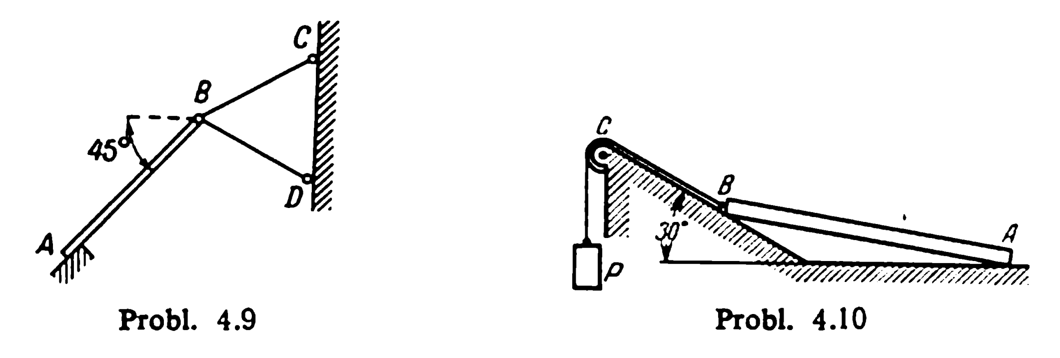
Rép. $T=15$ kgf; $R_B=17{,}3$ kgf; $R_C=51{,}3$ kgf.

4.8. Une poutre homogène AB pesant 20 kgf s'appuie sur un plancher horizontal et lisse en un point B sous un angle de 60° et repose, en outre, sur deux appuis C et D. Déterminer les réactions des appuis aux points B, C et D, si $AB=3$ m, $CB=0{,}5$ m, $BD=1$ m.

Rép. $R_B=20$ kgf; $R_C=30$ kgf; $R_D=30$ kgf.

4.9. Une plaque homogène AB de poids $P=100$ kgf s'appuie librement au point A et se trouve maintenue sous un angle de 45° avec l'horizontale par deux tiges BC et BD. Le triangle BCD est isocèle. Les points C et D sont situés sur la droite verticale CD. Négliger les poids des tiges et supposer que les points B, C et D sont des articulations. Quels sont la réaction de l'appui A et les efforts dans les tiges?

Rép. $R_A=35{,}4$ kgf; $S_C=89{,}5$ kgf; $S_D=-60{,}6$ kgf.



Probl. 4.9 Probl. 4.10

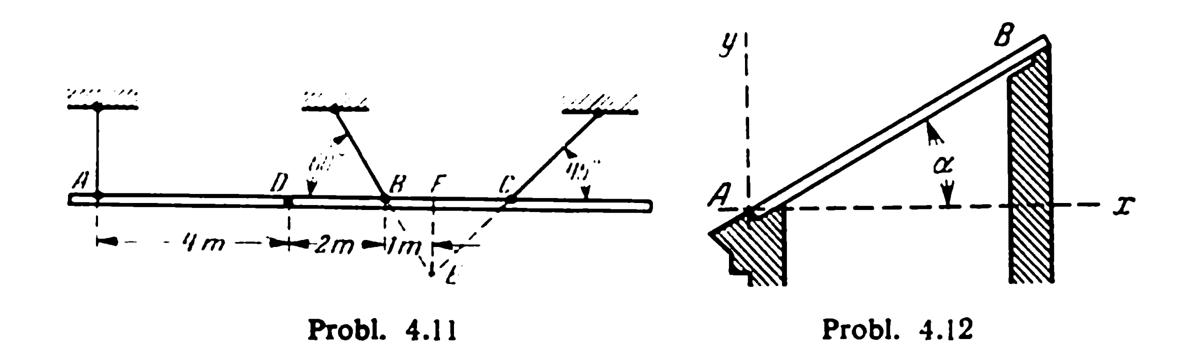
4.10. Une barre homogène AB pesant 100 N s'appuie par une extrémité sur un plancher lisse horizontal et par l'autre sur un plan lisse incliné sous un angle de 30° sur l'horizontale. A l'extrémité B la barre est mainte-

nue par une corde passant sur une poulie C et portant une charge P; la partie BC de la corde est parallèle au plan incliné. Négligeant le frottement dans la poulie, déterminer la charge P et les pressions N_A et N_B sur le plancher et sur le plan incliné.

Rép. $P=25$ N; $N_A=50$ N; $N_B=43{,}3$ N.

4.11. Lors de l'assemblage d'un pont il a fallu soulever une partie de la ferme de pont ABC par trois câbles disposés comme l'indique la figure. Le poids de cette partie de la ferme est de 4 200 kgf, le centre de gravité est situé au point D. Sachant que $AD=4$ m, $DB=2$ m, $BF=1$ m, trouver les tensions des câbles, si la droite AC est horizontale.

Rép. $T_A=1\,800$ kgf; $T_B=1\,757$ kgf; $T_C=1\,243$ kgf.



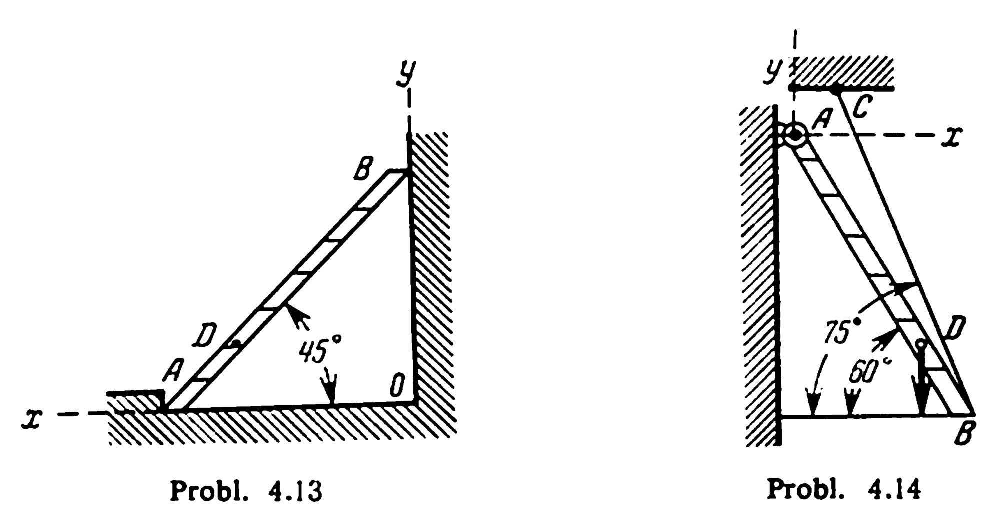
Probl. 4.11

Probl. 4.12

4.12. Les chevrons d'une pente de comble comportent une poutre AB dont l'extrémité supérieure B est posée sur un appui lisse; l'extrémité inférieure A bute contre un mur. La pente du toit est: $\operatorname{tg} \alpha=0{,}5$; la poutre AB est soumise à une charge verticale de 900 kgf appliquée en son milieu. Déterminer les réactions des appuis aux points A et B.

Rép. $X_A=180$ kgf; $Y_A=540$ kgf; $R_B=402$ kgf.

4.13. Un escalier homogène AB pesant 20 kgf est adossé contre un mur lisse sous un angle de 45° par rapport à l'horizontale; en un point D situé



Probl. 4.13

Probl. 4.14

à une distance égale au tiers de la longueur de l'escalier se trouve un homme pesant 60 kgf. Trouver la pression de l'escalier sur l'appui A et sur le mur.

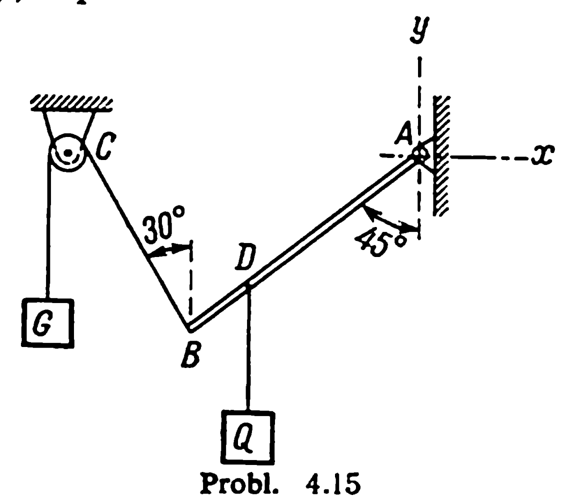
Rép. $X_A = 30$ kgf; $Y_A = -80$ kgf; $X_B = -30$ kgf.

4.14. Sur un escalier homogène de 240 kgf, long de 6 m, pouvant tourner autour d'un axe horizontal A et formant un angle de 60° avec l'horizontale se trouve un homme de 80 kgf, au point D situé à 2 m de l'extrémité B. L'extrémité B de cet escalier est soutenue par une corde BC formant un angle de 75° avec l'horizontale. Déterminer la tension T de la corde et la réaction A de l'axe.

Rép. $T = 335$ kgf;

$X_A = 86{,}7$ kgf;

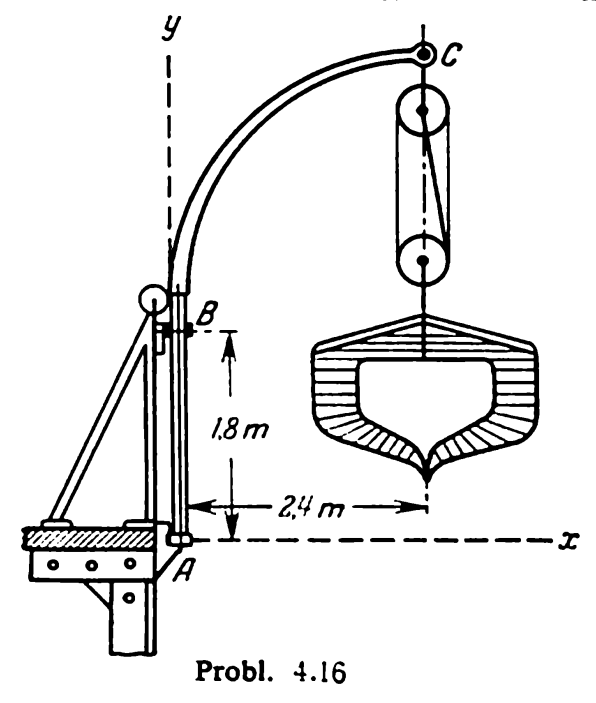
$Y_A = -3{,}44$ kgf.



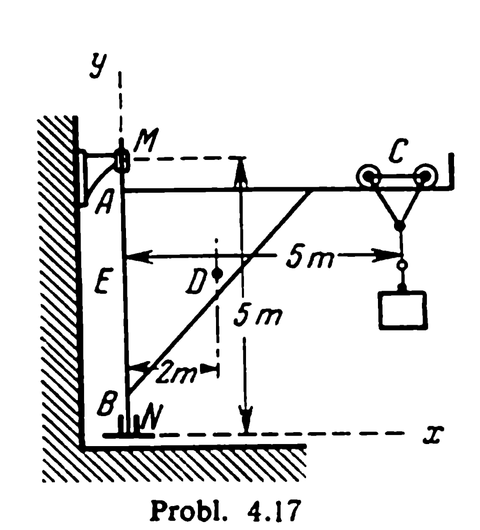
Probl. 4.15

4.15. Une poutre homogène AB de $P = 100$ kgf est articulée à un mur en A et soutenue sous un angle de 45° par rapport à la verticale par un câble passant sur une poulie et portant une charge G. Le tronçon BC du câble forme avec la verticale un angle de 30°. Une charge Q de 200 kgf est suspendue au point D de la poutre. Déterminer le poids de la charge G et la réaction de l'articulation A, si $BD = \frac{1}{4} AB$. Négliger le frottement dans la poulie.

Rép. $G = 146$ kgf; $X_A = 73$ kgf; $Y_A = 173$ kgf.



Probl. 4.16



Probl. 4.17

4.16. Un canot est suspendu à deux bossoirs, son poids de 960 kgf étant réparti également entre eux. L'extrémité semi-sphérique inférieure du bossoir *ABC* s'appuie sur la crapaudine *A*; à 1,8 m au-dessus de ce point le bossoir passe librement par le palier *B*; sa portée est de 2,4 m. Négligeant le poids du bossoir, déterminer sa pression en *A* et *B*. (Voir fig. p. 45.)

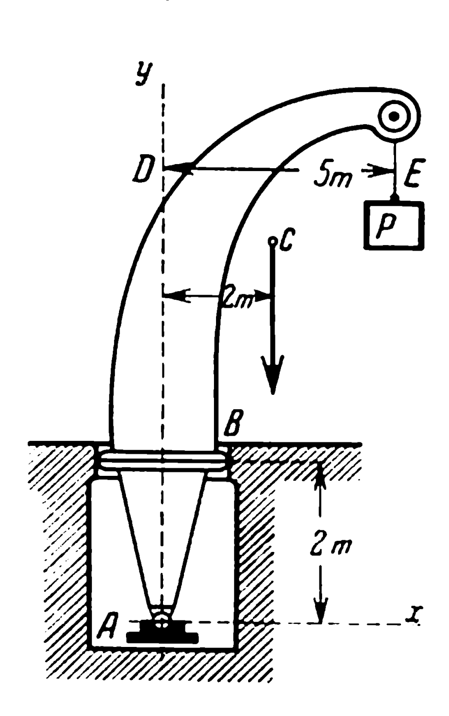
Rép. $X_A = -640$ kgf; $Y_A = -480$ kgf; $X_B = 640$ kgf.

4.17. Une grue de fonderie *ABC* de 2 t possède un axe de rotation vertical *MN*. Sachant que $MN = 5$ m, $AC = 5$ m, le centre de gravité de la grue *D* est à 2 m de l'axe de rotation et que la charge suspendue en *C* pèse 3 t, trouver les réactions du palier *M* et de la crapaudine *N*. (Voir fig. p. 45.)

Rép. $X_M = -3,8$ t; $X_N = 3,8$ t; $Y_N = 5$ t.

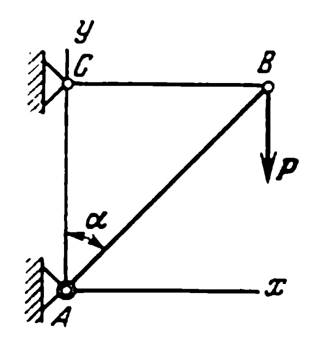
4.18. Une grue soulevant une charge $P = 4$ t s'appuie par son extrémité inférieure sur une crapaudine *A* et en un point *B* sur une surface cylindrique lisse dont l'axe *Ay* est vertical. La longueur de la partie de la grue se trouvant dans le puits $AB = 2$ m. La portée de la grue $DE = 5$ m, son poids est de 2 t et se trouve appliqué au point *C* à 2 m de la verticale *Ay*. Déterminer les réactions des appuis *A* et *B*.

Rép. $X_A = 12$ t; $Y_A = 6$ t; $X_B = -12$ t.



Probl. 4.18

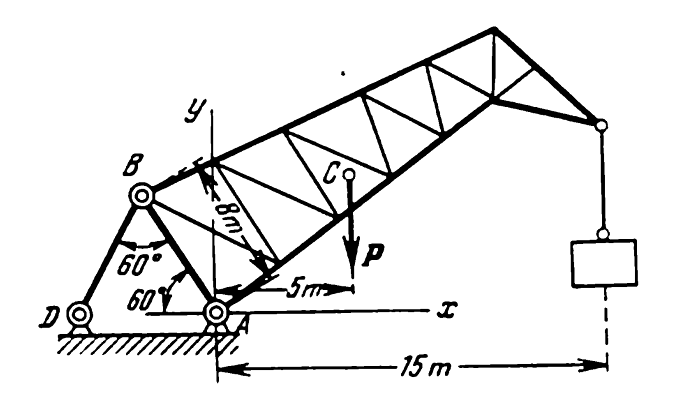
4.19. L'extrémité inférieure *A* de la poutre *AB* d'une grue est articulée à un mur, l'extrémité supérieure étant soutenue par une corde horizontale *BC*. Déterminer la tension *T* de la corde *BC* et la pression sur l'appui *A*, si la charge $P = 200$ kgf, le poids de la poutre *AB* est de 100 kgf et se trouve appliqué en son milieu, $\alpha = 45°$.



Probl. 4.19

Rép. $T = 250$ kgf; $X_A = -250$ kgf;
$Y_A = -300$ kgf.

4.20. Une grue est articulée aux points *A*, *B* et *D*, on connaît les longueurs $AB = AD = BD = 8$ m. Le centre de gravité de la ferme de la grue est situé à 5 m de la verticale passant par le point *A*. La portée de la grue, cal-



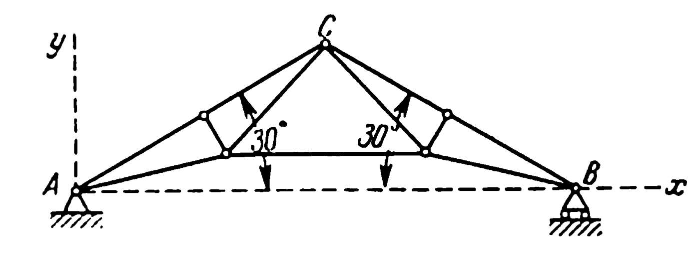
Probl. 4.20

culée du point A est alors de 15 m. La charge soulevée pèse 20 t; le poids de la ferme $P = 12$ t. Déterminer les réactions des appuis et la tension de la barre BD pour la position indiquée de la grue.

Rép. $X_A = 26$ t; $Y_A = 77$ t; $T = 52$ t.

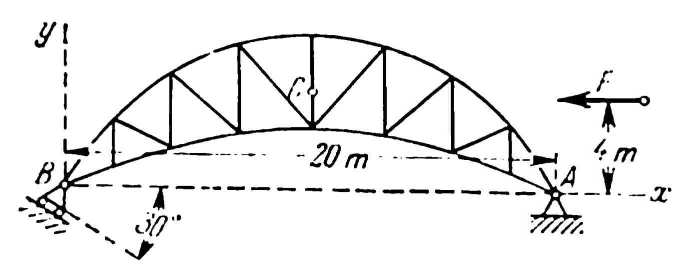
4.21. Une ferme symétrique ABC de 10 t est articulée en un point fixe A et son autre extrémité s'appuie par des rouleaux sur un plan horizontal lisse. Le côté AC est soumis à la pression normale, uniformément répartie, du vent. Sachant que la résultante des forces de pression du vent est de 0,8 t, que la longueur $AB = 6$ m et que l'angle $\widehat{CAB} = 30°$, déterminer les réactions des appuis.

Rép. $X_A = -0{,}4$ t; $Y_A = 5{,}46$ t; $Y_B = 5{,}23$ t.



Probl. 4.21

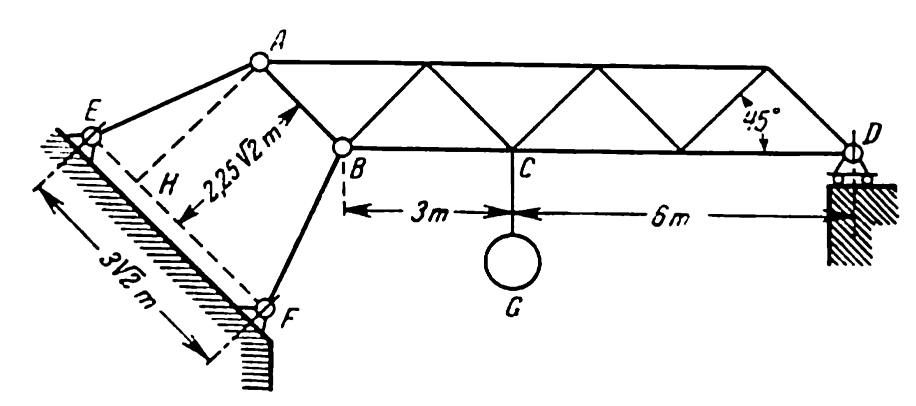
4.22. Une ferme en arc est articulée en un point fixe A et possède au point B un appui lisse mobile dont le plan forme un angle de 30° avec l'horizontale. La travée $AB = 20$ m. Le centre de gravité de la ferme, dont le poids



Probl. 4.22

est de 10 t, est situé au point C au-dessus du milieu de la travée AB. La résultante des forces de pression du vent $F=2$ t est parallèle à AB, sa ligne d'action se trouvant à 4 m de AB. Déterminer les réactions des appuis.

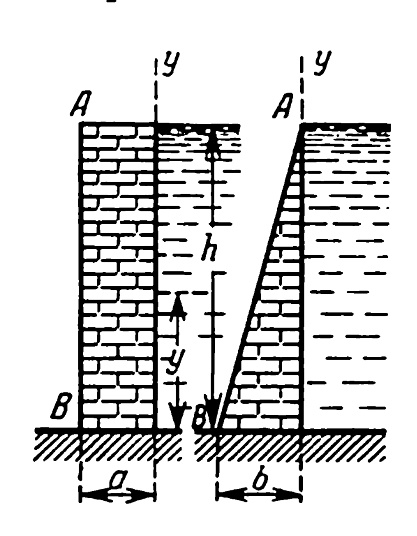
Rép. $X_A=-1{,}12$ t;
$Y_A=4{,}6$ t;
$R_B=6{,}24$ t.



Probl. 4.23

4.23. La ferme $ABCD$ qui s'appuie au point D sur des rouleaux est soutenue aux points A et B par des barres inclinées AE et BF articulées aux points E et F. Les éléments de la ferme ainsi que la droite EF sont inclinés sous un angle de 45° par rapport à l'horizontale; la longueur $BC=3$ m; les longueurs des barres AE et BF sont identiques; la distance $EF=3\sqrt{2}$ m; $AH=2{,}25\sqrt{2}$ m. Le poids de la ferme et de la charge est de 7,5 t, il est dirigé suivant la droite CG. Trouver la réaction des rouleaux R_D.

Rép. $R_D=1{,}5$ t.



Probl. 4.24

4.24. La pression de l'eau sur l'aire élémentaire d'une digue croît en raison de la distance de cette aire à la surface libre de l'eau. Elle est égale au poids d'une colonne d'eau de hauteur égale à cette distance et l'aire de sa base est égale à l'aire élémentaire considérée. Déterminer l'épaisseur de la base de la digue dans les deux cas suivants:

1) la section droite de la digue est rectangulaire;
2) cette section est triangulaire.

La digue doit être calculée au renversement autour de l'arête B par la pression de l'eau, le coefficient de stabilité devant être égal à 2. La hauteur

h de la digue est égale à la profondeur de l'eau et vaut 5 m. Le poids spécifique de l'eau $\gamma=1$ t/m³, le poids spécifique du matériau de la digue $\gamma_1=$ $=2{,}2$ t/m³.

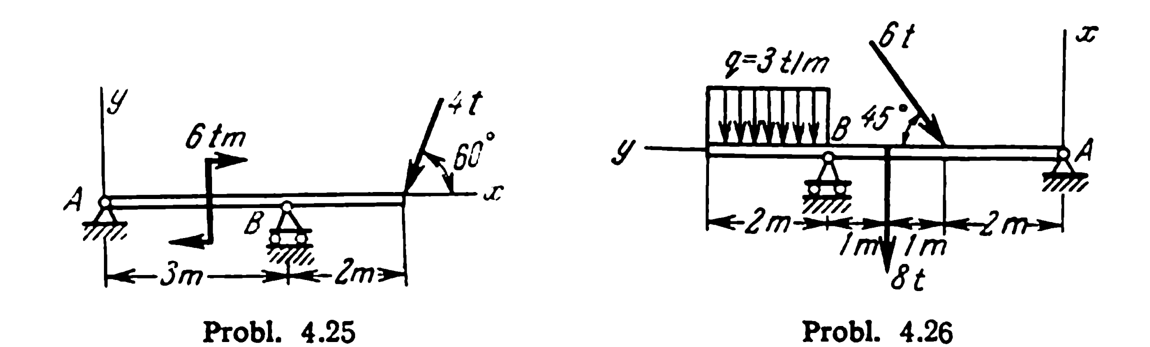
On appelle coefficient de stabilité le rapport entre le moment du poids du massif et le moment de la force de renversement. La pression de l'eau sur une aire de la digue d'une longueur de 1 m et de hauteur dy, y étant la distance de cette aire au fond évaluée en mètres, vaut, en tonnes, $\gamma(h-y)\,dy$. Le moment de cette pression par rapport au point B est $\gamma\,(h-y)y\,dy$. Le moment renversant est

$$\int_0^h \gamma\,(h-y)\,y\,dy.$$

Rép. $a=2{,}75$ m; $b=3{,}37$ m.

4.25. Déterminer les réactions des appuis A et B d'une poutre soumise à l'action d'une force concentrée et d'un couple de forces. La charge et les dimensions sont indiquées sur la figure.

Rép. $X_A=2$ t; $Y_A=-4{,}32$ t; $Y_B=7{,}78$ t.



Probl. 4.25 Probl. 4.26

4.26. Déterminer les réactions des appuis A et B d'une poutre soumise à l'action de deux forces concentrées et d'une charge uniformément répartie. Les valeurs des forces, la densité de charge et les dimensions sont indiquées sur la figure.

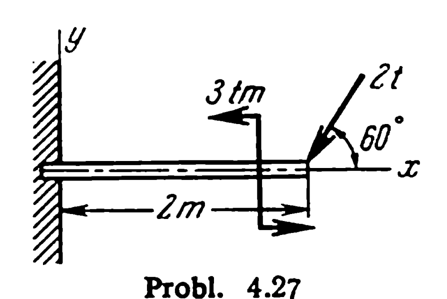
Rép. $X_A=2{,}6$ t; $Y_A=4{,}2$ t; $X_B=15{,}6$ t.

4.27. Déterminer les réactions de l'encastrement d'une console (voir fig. p. 50) soumise à l'action d'une force concentrée et d'un couple.

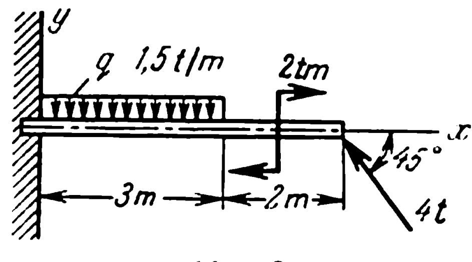
Rép. $X=1$ t; $Y=1{,}73$ t; $M=0{,}47$ tm.

4.28. Déterminer les réactions de l'encastrement d'une console (cf. figure) soumise à l'action d'une charge uniformément répartie, d'une force concentrée et d'un couple.

Rép. $X=2{,}8$ t; $Y=1{,}7$ t; $M=-5{,}35$ tm.



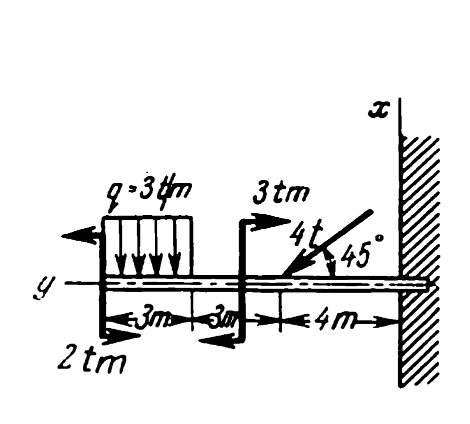
Probl. 4.27



Probl. 4.28

4.29. Déterminer les réactions de l'encastrement d'une console (cf. figure) soumise à l'action d'une charge uniformément répartie, d'une force concentrée et de deux couples.

Rép. $X=11{,}8$ t; $Y=-2{,}8$ t; $M=-86{,}8$ tm.



Probl. 4.29

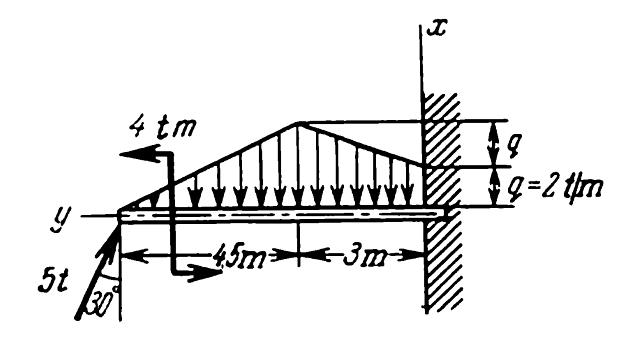
Probl. 4.30

4.30. Déterminer les réactions de l'encastrement d'une console (cf. figure) soumise à l'action d'un couple et d'une charge répartie linéairement.

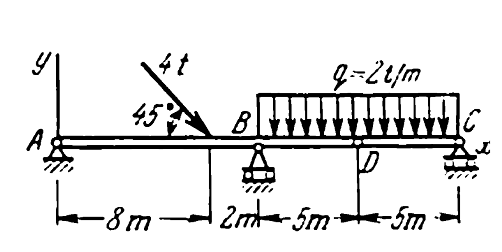
Rép. $X=-9$ t; $Y=0$; $M=40$ tm.

4.31. Déterminer la réaction de l'encastrement d'une console (cf. figure) soumise à l'action d'une force concentrée, d'un couple et d'une charge répartie suivant la loi du triangle et du trapèze.

Rép. $X=13{,}7$ t; $Y=2{,}5$ t; $M=-27$ tm.



Probl. 4.31



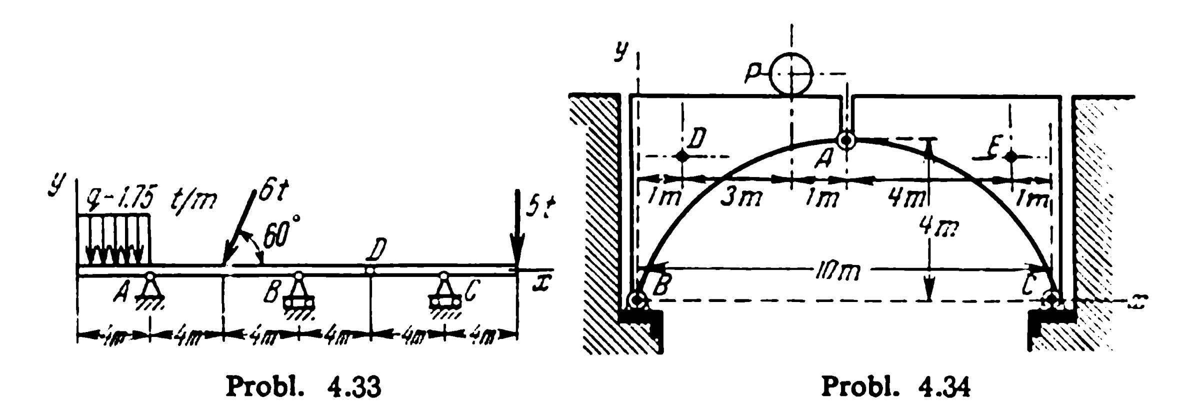
Probl. 4.32

4.32. Déterminer les réactions des appuis A, B, C et de l'articulation D d'une poutre composée, chargée comme l'indique la figure.

Rép. $X_A = -2{,}8$ t; $Y_A = -4{,}4$ t; $Y_B = 22{,}2$ t; $Y_C = 5$ t; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ t.

4.33. Déterminer les réactions des appuis A, B, C et de l'articulation D d'une poutre composée, chargée comme l'indique la figure.

Rép. $X_A = 3$ t; $Y_A = 13{,}8$ t; $Y_B = -6{,}6$ t; $Y_C = 10$ t; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ t.

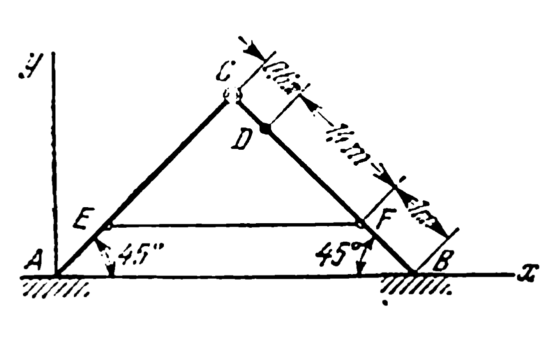


Probl. 4.33 Probl. 4.34

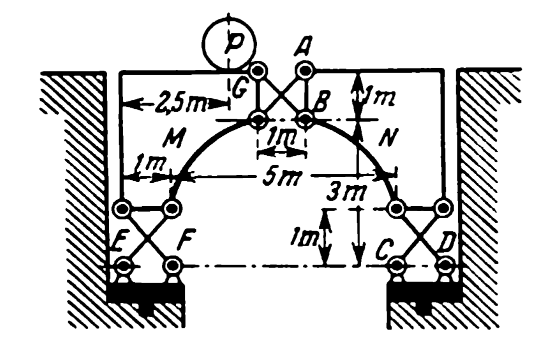
4.34. Un pont comporte deux parties reliées entre elles par la charnière A et fixées aux culées par des charnières B et C. Le poids de chacune des parties du pont est de 4 t ; leurs centres de gravité sont D et E; le pont supporte une charge $P = 2$ t; les dimensions sont indiquées sur la figure. Déterminer la pression dans la charnière A et les réactions aux points B et C.

Rép. $X_A = \pm 2$ t; $Y_A = \mp 0{,}8$ t; $X_B = -X_C = 2$ t; $Y_B = 5{,}2$ t; $Y_C = 4{,}8$ t.

4.35. Une échelle portative posée sur un plan horizontal lisse comporte deux parties AC et BC longues de 3 m et pesant chacune 12 kgf. Ces parties sont articulées en C et reliées par la corde EF; $BF = AE = 1$ m; le centre de gravité de chacune des parties AC et BC est situé en son milieu. Au point D de l'échelle situé à une distance $CD = 0{,}6$ m se trouve un homme pesant 72 kgf.



Probl. 4.35



Probl. 4.36

Déterminer les réactions du plancher et de l'articulation, ainsi que la tension T de la corde EF, si $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=45°$.

Rép. $R_A=40{,}8$ kgf; $R_B=55{,}2$ kgf; $X_C=\pm 52{,}2$ kgf; $Y_C=\pm 28{,}8$ kgf; $T=52{,}2$ kgf.

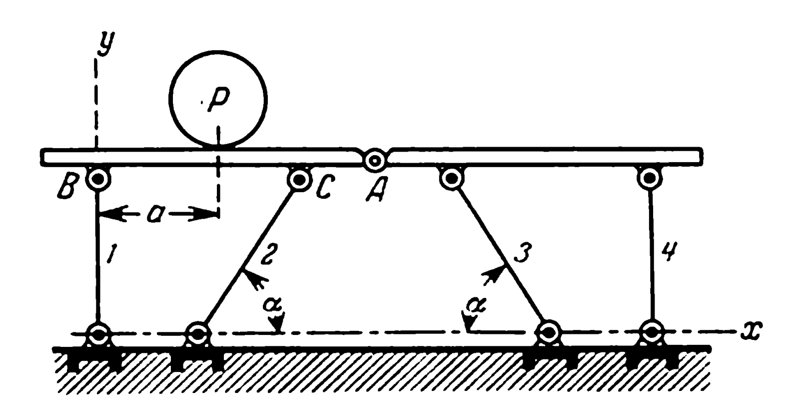
4.36. Un pont comporte deux parties identiques M et N reliées entre elles ainsi qu'aux appuis fixes par six barres aux extrémités articulées et formant un angle de 45° avec l'horizontale. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Au point G se trouve une charge P. Déterminer les efforts dans les barres dus à l'action de cette charge. (Voir fig. p. 51.)

Rép. $R_A=0$; $R_B=P\frac{\sqrt{2}}{3}$;

$R_C=0$; $R_D=P\frac{\sqrt{2}}{3}$;

$R_E=P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_F=P\frac{\sqrt{2}}{6}$.

4.37. Un pont comporte deux poutres horizontales reliées par une charnière A et articulées au fondement par des barres rigides *1*, *2*, *3*, *4*, les barres extrêmes étant verticales et les barres intermédiaires inclinées sous un angle



Probl. 4.37

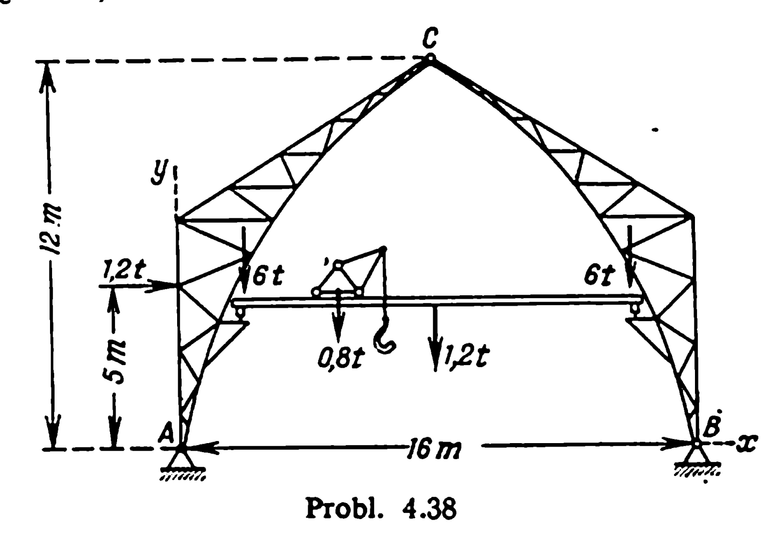
$\alpha=60°$ sur l'horizontale. Les dimensions correspondantes sont: $BC=6$ m; $AB=8$ m. Déterminer les efforts dans les barres et la réaction de la charnière A, si le pont supporte une charge verticale $P=15$ t à une distance $a=4$ m du point B.

Rép. $S_1=-6{,}25$ t; $S_2=S_3=-5{,}77$ t; $S_4=1{,}25$ t; $X_A=\pm 2{,}89$ t; $Y_A=\mp 3{,}75$ t.

4.38. Un pont roulant se déplace sur des rails le long d'un atelier dont le bâtiment est soutenu par un arc à trois charnières. Le poids de la poutre transversale se déplaçant sur les rails est de 1,2 t, sa longueur est l; le poids de la grue est de 0,8 t (sans charges); la ligne d'action du poids de la grue est à $0{,}25\,l$ du rail gauche. Le poids de chacune des moitiés de l'arc vaut

6 t et est appliqué à 2 m de la verticale passant par l'appui correspondant A ou B; les rails-appuis du pont roulant se trouvent à 1,8 m de ces verticales. La hauteur du bâtiment est de 12 m, sa largeur de 16 m. La résultante des forces de pression du vent est égale à 1,2 t et est dirigée parallèlement à AB, sa ligne d'action est située à 5 m de AB. Déterminer les réactions des charnières A et B et la pression dans la charnière C.

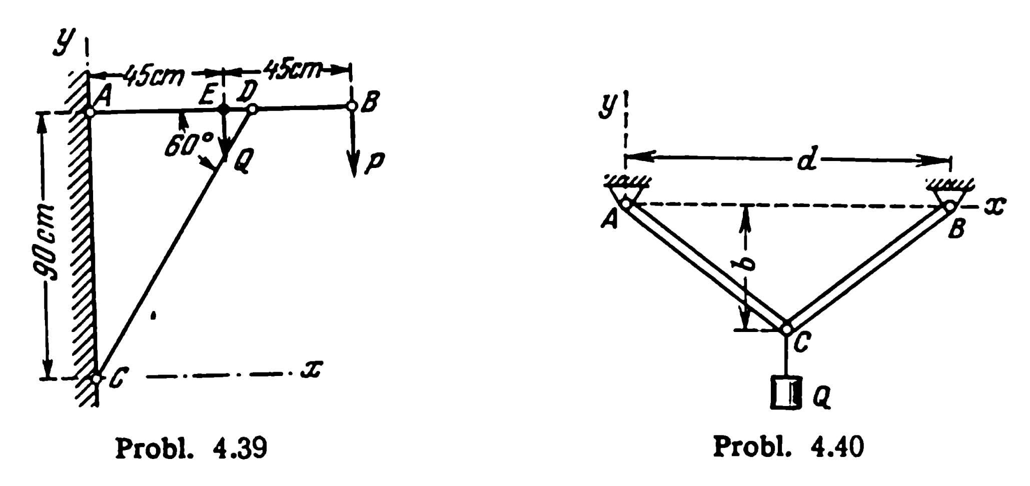
Rép. $X_A=0,2$ t; $Y_A=6,78$ t; $X_B=-1,4$ t; $Y_B=7,22$ t; $X_C=\pm1,4$ t; $Y_C=\mp0,42$ t.



Probl. 4.38

4.39. Une charge $P=25$ kgf est suspendue à l'extrémité d'une poutre horizontale AB. Son poids $Q=10$ kgf est appliqué en un point E. La poutre est articulée au mur en A; elle est soutenue par la barre CD et reliée à cette dernière par l'articulation D. Négliger le poids de la barre CD. Les dimensions sont indiquées sur la figure. Déterminer les réactions des articulations A et C.

Rép. $X_A=-30$ kgf; $Y_A=-17$ kgf; $R_C=60$ kgf.



Probl. 4.39

Probl. 4.40

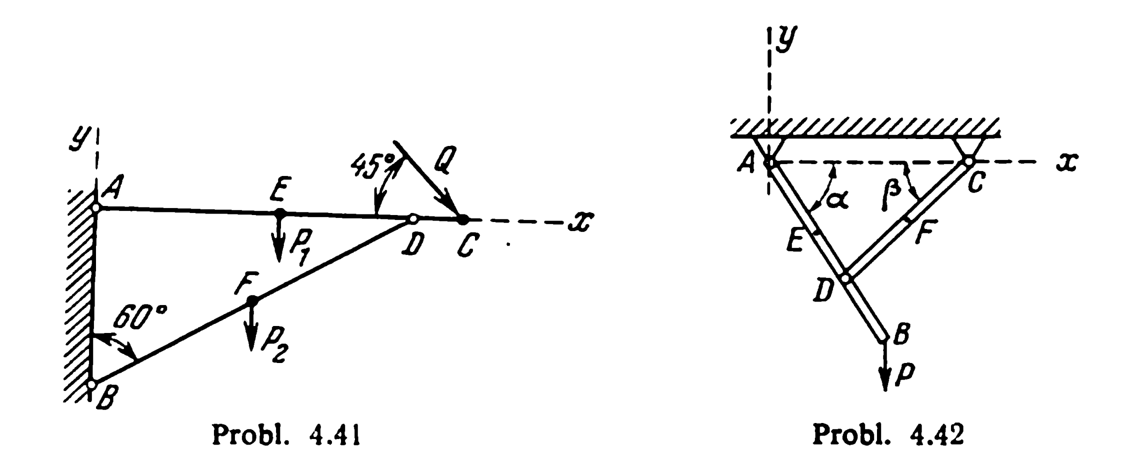
4.40. Deux barres identiques sont articulées en C ainsi qu'aux appuis A et B. Le poids de chaque barre est P. Une charge Q est suspendue au point

C. La distance $AB=d$. La distance du point *C* à la droite horizontale *AB* est égale à *b*. Déterminer les réactions des articulations *A* et *B*.

Rép. $-X_A=X_B=\frac{d}{4b}(P+Q)$; $Y_A=Y_B=P+\frac{Q}{2}$.

4.41. Deux barres *AC* et *BD* de même longueur sont articulées au point *D* et aux points *A* et *B* d'un mur vertical. La barre *AC* est horizontale, la barre *BD* forme un angle de 60° avec le mur vertical. La barre *AC* est chargée au point *E* par une force verticale $P_1=40$ kgf et au point *C* par une force $Q=100$ kgf, inclinée sous un angle de 45° sur l'horizontale. La barre *BD* est chargée au point *F* par une force verticale $P_2=40$ kgf. Etant donné que $AE=EC$, $BF=FD$, déterminer les réactions des articulations *A* et *B*.

Rép. $X_A=-287$ kgf; $Y_A=6$ kgf; $X_B=216$ kgf; $Y_B=145$ kgf.

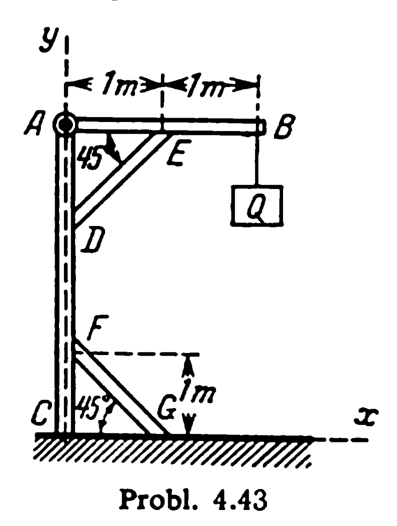


Probl. 4.41

Probl. 4.42

4.42. Une suspension comporte deux poutres *AB* et *CD* articulées en *D* et fixées au plafond par les articulations *A* et *C*. Le poids de la poutre *AB* de 60 kgf est appliqué au point *E*, celui de *CD* vaut 50 kgf et est appliqué au point *F*. Une force verticale $P=200$ kgf est appliquée à la poutre *AB* en un point *B*. Déterminer les réactions aux articulations *A* et *C*, pour les dimensions suivantes: $AB=1$ m; $CD=0{,}8$ m; $AE=0{,}4$ m; $CF=0{,}4$ m; les angles formés par les poutres *AB* et *CD* avec l'horizontale sont: $\alpha=60°$ et $\beta=45°$.

Rép. $-X_A=X_C=135$ kgf; $Y_A=150$ kgf; $Y_C=160$ kgf.



Probl. 4.43

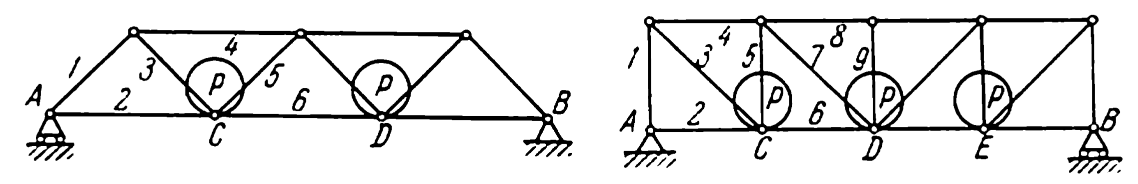
4.43. Une poutre horizontale *AB* longue de 2 m, articulée au poteau vertical *AC* en *A* et soutenue par la contre-fiche *DE*, supporte à son extrémité une charge $Q=500$ kgf; le poteau *AC* est renforcé par la contre-fiche *FG*; $AE=CG=1$ m; les contre-fiches *DE* et *FG* forment un angle de 45° avec l'horizontale. Trouver les

efforts S_E et S_F dans les contre-fiches *DE* et *FG* et la réaction du sol en *C*. Les fixations sont des articulations; négliger les poids de la poutre, du poteau et des contre-fiches.

Rép. $S_E = -1410$ kgf; $S_F = -1410$ kgf; $X_C = 1000$ kgf; $Y_C = -500$ kgf.

4.44. Les nœuds *C* et *D* d'une ferme sont chargés d'un même poids vertical $P = 10$ t (cf. figure); les éléments obliques forment des angles de 45° avec l'horizontale. Trouver les efforts dans les éléments *1*, *2*, *3*, *4*, *5* et *6* dus à la charge donnée.

Rép. $S_1 = -14{,}1$ t; $S_2 = 10$ t; $S_3 = 14{,}1$ t; $S_4 = -20$ t; $S_5 = 0$; $S_6 = 20$ t.

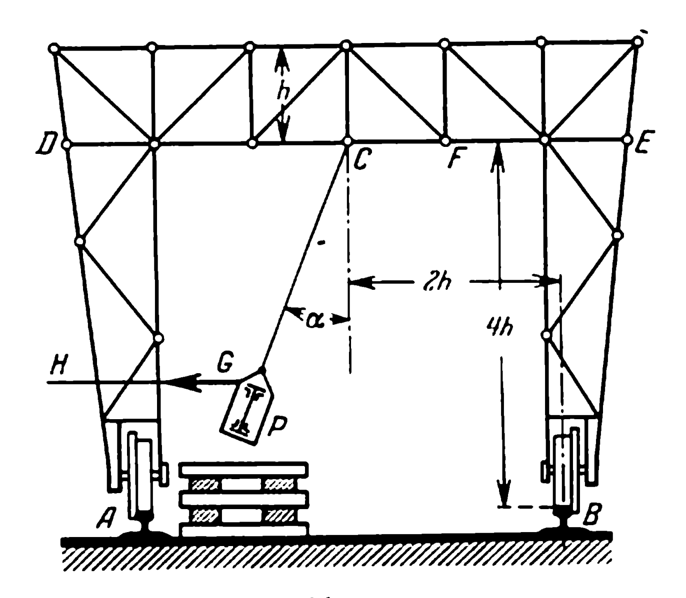


Probl. 4.44 Probl. 4.45

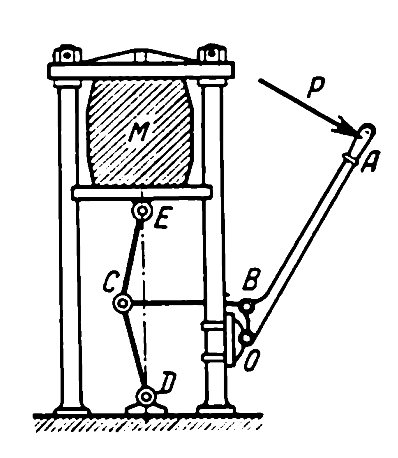
4.45. La même charge verticale $P = 10$ t agit aux nœuds *C*, *D* et *E* d'une ferme (cf. figure). Les éléments obliques forment des angles de 45° avec l'horizontale. Trouver les efforts dans les éléments *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8* et *9* dus à la charge donnée.

Rép. $S_1 = -15$ t; $S_2 = 0$; $S_3 = 21{,}2$ t; $S_4 = -15$ t; $S_5 = -5$ t; $S_6 = 15$ t;
$S_7 = 7{,}1$ t; $S_8 = -20$ t; $S_9 = 0$.

4.46. Pour monter un pont on a construit une grue provisoire en bois roulant sur des rails *A* et *B*. On a fixé au nœud médian *C* de la poutre inférieure *DE* de la grue une poulie munie d'une chaîne pour soulever les charges.



Probl. 4.46



Probl. 4.47

La charge vaut $P=5$ t; à l'instant où cette dernière est soulevée la direction de la chaîne forme un angle $\alpha=20°$ avec la verticale; pour éviter les oscillations de la charge on la retient avec un câble horizontal GH.

Supposant que la composante horizontale de la tension de la chaîne est encaissée par le seul rail droit B, déterminer l'effort S_1 dans la barre horizontale CF à l'instant où la charge se soulève et le comparer avec l'effort S_2 que l'on obtiendrait si $\alpha=0$. Les dimensions sont indiquées sur la figure.

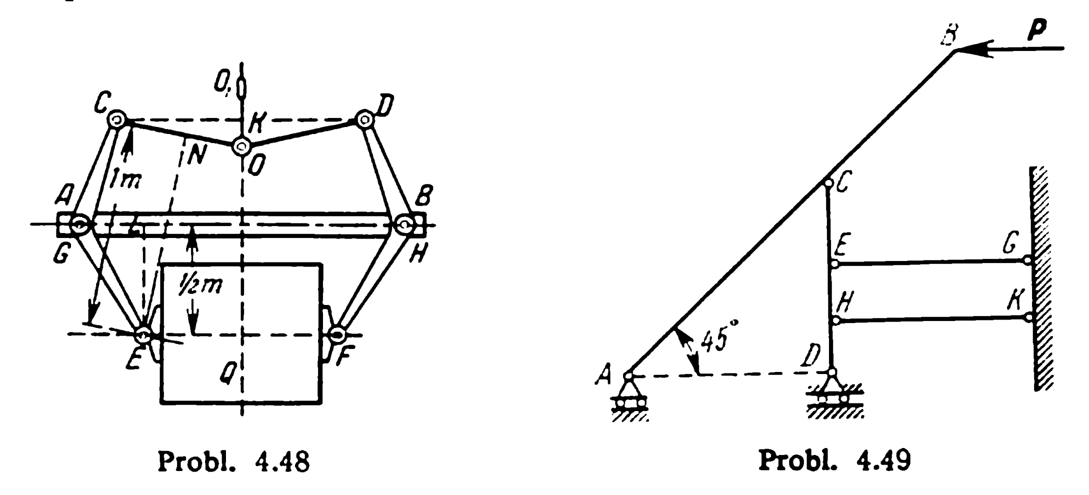
Rép. $S_1=10{,}46$ t; $S_2=5$ t.

4.47. Trouver la valeur de l'effort comprimant l'objet M dans une presse si: l'effort $P=20$ kgf est dirigé perpendiculairement au levier OA ayant un axe fixe O; dans la position considérée de la presse la tringle BC est perpendiculaire à OB et divise l'angle $\widehat{ECD}$ en deux parties égales, $\widehat{CED}=$ $=\operatorname{arc\,tg} 0{,}2=11°20'$; $OA=1$ m; $OB=$ 10 cm (voir fig. p. 55).

Rép. 500 kgf.

4.48. La chaîne OO_1 d'un dispositif autogrippeur de charges est articulée en O avec des barres de longueur $OC=OD=60$ cm. Ces barres sont elles-mêmes articulées à deux leviers coudés égaux CAE et DBF qui peuvent tourner autour des points A et B de la barre GH. Des sabots spéciaux articulés en E et F retiennent par friction la charge $Q=1$ t. La distance EL du point E à la barre GH est de 50 cm, la distance EN de ce même point à la barre OC étant de 1 m. La hauteur OK du triangle COD est de 10 cm. Trouver l'effort de traction dans la barre GH; négliger les poids des éléments du dispositif.

Rép. 6 t.



Probl. 4.48 Probl. 4.49

4.49. Déterminer les réactions des articulations A, C, D, E et H dans des systèmes de barres (cf. figure), si $CE=EH=HD$ et $AC=CB$.

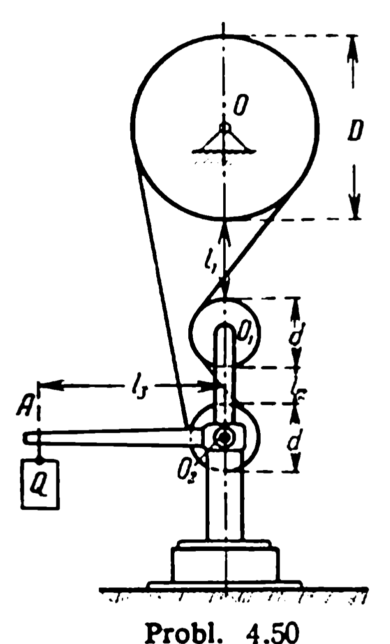
Rép. $R_A=R_D=R_H=P$; $R_E=2P$; $R_C=P\sqrt{2}$. La barre EG est tendue, la barre HK, comprimée.

4.50. La tension d'une courroie de transmission réalisée au moyen du levier coudé AO_2O_1 et du galet O_1 est égale, des deux côtés du galet, à P kgf. Trouver la charge Q lorsque le système est en équilibre. On a: $\widehat{AO_2O_1}=90°$; $D=55$ cm; $d=15$ cm; $l_1=35$ cm; $l_2=15$ cm; $l_3=45$ cm; $P=18$ kgf.

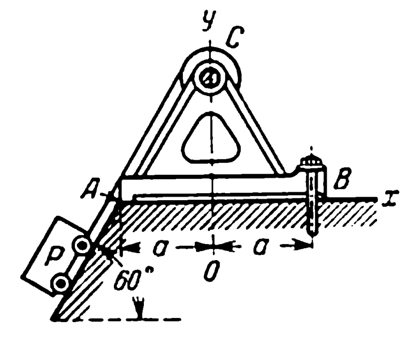
Rép. $Q=12$ kgf.

4.51. Une charge $P=480$ kgf est retenue sur un plan incliné lisse par une corde parallèle au plan et enroulée sur l'arbre fixe du treuil ABC. L'angle formé par le plan avec l'horizontale est de 60°. Le poids du treuil $Q=240$ kgf, son centre de gravité est situé sur la droite CO; le treuil s'appuie sur un plancher lisse au point A et se trouve fixé au plancher par un boulon en B. Trouver les réactions des appuis en négligeant la distance de la corde au plan.

Rép. $Y_A=480$ kgf; $X_B=208$ kgf; $Y_B=120$ kgf.



Probl. 4.50

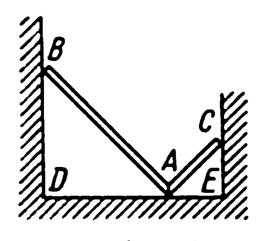


Probl. 4.51

4.52. Une barre homogène AB longue de $2l$ et de poids P peut tourner autour d'un axe horizontal à l'extrémité A de la barre. Elle s'appuie sur une autre barre homogène CD de même longueur $2l$, qui peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son point médian E. Les points A et E sont situés sur la même verticale à une distance $AE=l$. Une charge $Q=2P$ est suspendue à l'extrémité D. Déterminer la valeur de l'angle φ formé par la barre AB avec la verticale à l'état d'équilibre. Négliger le frottement.

Rép. $\varphi=\arccos\frac{1}{8}=82°50'$.

Probl. 4.52



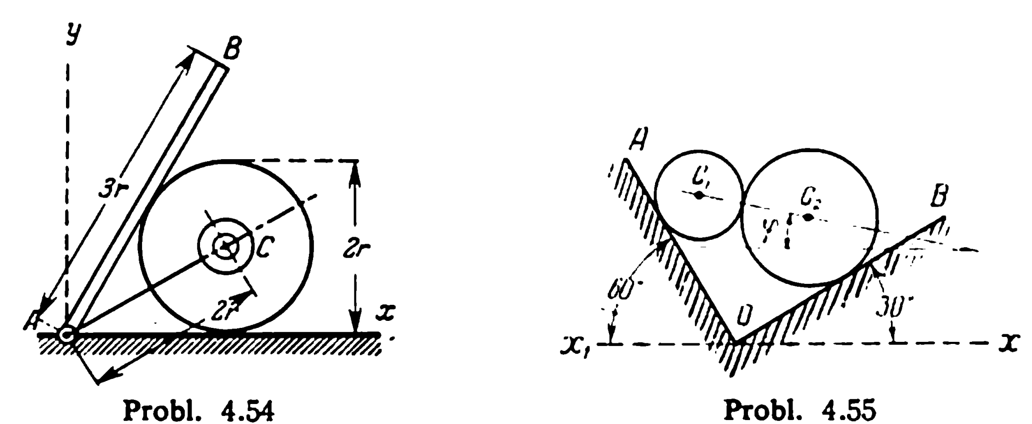
Probl. 4.53

4.53. Deux barres homogènes AB et AC s'appuient sur un plancher horizontal lisse au point A et l'une sur l'autre suivant deux plans verticaux lisses ainsi que sur deux murs verticaux lisses aux points B et C. Déterminer la distance DE entre les deux murs pour laquelle les barres sont en équilibre et forment un angle droit. On a: $AB=a$, $AC=b$, le poids de AB est P_1, celui de AC est P_2 (voir fig. p. 57).

Rép. $DE=\dfrac{a\sqrt{P_2}+b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1+P_2}}$.

4.54. Une barre homogène AB pesant 16 kgf et longue de $3r$, pouvant tourner autour d'un axe horizontal A, s'appuie sur la surface d'un cylindre lisse de rayon r qui est posé sur un plan horizontal lisse et y est retenue par une ficelle inextensible $AC=2r$. Déterminer la tension de la ficelle T et la pression de la barre sur l'articulation A.

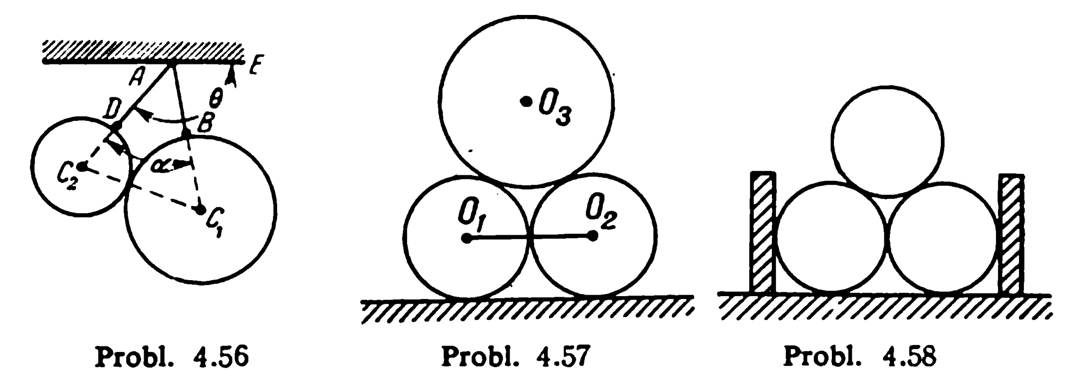
Rép. $T=6{,}9$ kgf; $X_A=-6$ kgf; $Y_A=-12{,}5$ kgf.



Probl. 4.54 Probl. 4.55

4.55. Deux cylindres homogènes lisses tangents sont placés entre deux plans inclinés lisses OA et OB; l'un d'eux de centre C_1 pèse 10 N, l'autre de centre C_2 pèse 30 N. Déterminer l'angle φ que forme la droite C_1C_2 avec l'axe horizontal xOx_1, les pressions N_1 et N_2 des cylindres sur les plans ainsi que la grandeur N de la pression réciproque des cylindres, si $\widehat{AOx_1}=60°$, $\widehat{BOx}=30°$.

Rép. $\varphi=0$; $N_1=20$ N; $N_2=34{,}6$ N; $N=17{,}3$ N.



Probl. 4.56 Probl. 4.57 Probl. 4.58

4.56. Deux boules homogènes lisses C_1 et C_2 de rayons R_1 et R_2 et de poids P_1 et P_2 sont suspendues par des cordes AB et AD au point A; $AB=l_1$; $AD=l_2$; $l_1+R_1=l_2+R_2$; $\widehat{BAD}=\alpha$. Déterminer l'angle θ que forme la corde AD avec le plan horizontal AE, les tensions des cordes T_1, T_2 et la pression d'une boule sur l'autre.

Rép. $\operatorname{tg}\vartheta=-\frac{P_2+P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}$; $T_1=P_1\frac{\sin\left(\vartheta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

$$T_2=P_2\frac{\sin\left(\vartheta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}};\quad N=P_2\frac{\cos\vartheta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

4.57. Un cylindre homogène de rayon R et de poids Q est posé sur deux cylindres circulaires homogènes identiques de rayon r et de poids P se trouvant sur un plan horizontal et dont les centres sont reliés par un fil inextensible long de $2r$. Déterminer la tension du fil, la pression des cylindres sur le plan et la pression réciproque des cylindres. Négliger le frottement.

Rép. La pression de chaque cylindre inféri e ur sur le plan est

$$P+\frac{Q}{2}.$$

La pression entre le cylindre supérieur et chacun des cylindres inférieurs est

$$\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

La tension du fil est

$$\frac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

4.58. Trois tuyaux identiques de poids $M=120$ kgf chacun sont placés comme l'indique la figure. Déterminer la pression de chacun des tuyaux inférieurs sur le sol et sur les murs latéraux qui les retiennent. Négliger le frottement.

Rép. La pression sur le sol est de 180 kgf. La pression sur chaque mur est de 34,6 kgf.

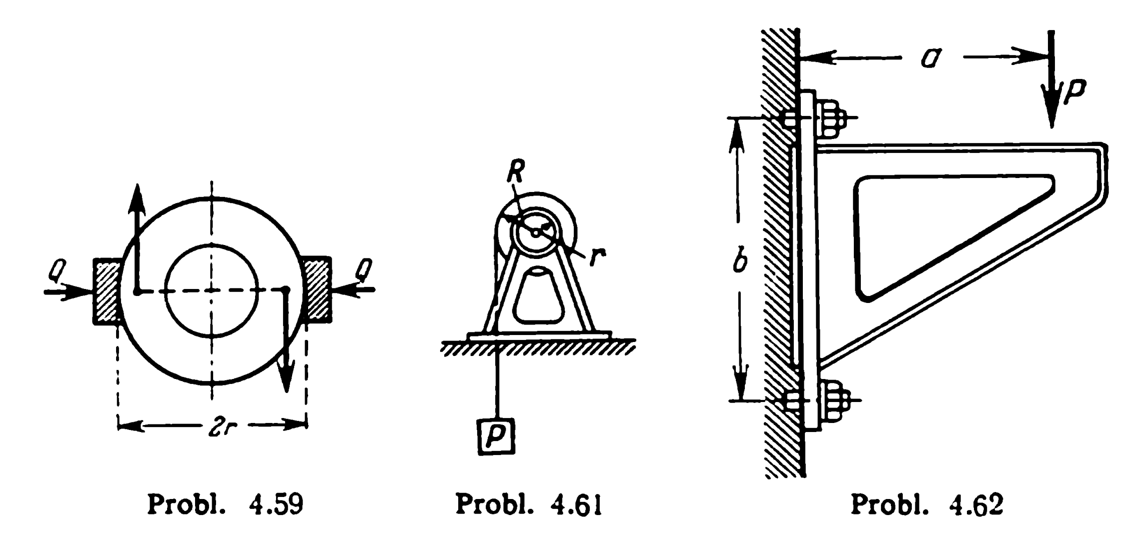
4.59. Un couple de moment $M=100$ kgfm est appliqué à un arbre sur lequel on a monté une roue à frein de rayon $r=25$ cm. Trouver la force Q avec laquelle il faut serrer les sabots de frein contre la roue pour que celle-ci soit au repos. Le coefficient de frottement statique f entre la roue et les sabots vaut 0,25. (Voir fig. p. 60.)

Rép. $Q=800$ kgf.

4.60. La porte d'un tramway recule avec frottement dans sa rainure inférieure. Le coefficient de frottement f ne dépasse pas 0,5. Déterminer la plus grande hauteur h à laquelle on peut placer la poignée de la porte pour que celle-ci ne se renverse pas lors du recul. La largeur de la porte $l = 0{,}8$ m; le centre de gravité de la porte est situé sur son axe vertical de symétrie.

Rép. $h = \frac{l}{2f} = 0{,}8$ m.

4.61. Un arbre cylindrique de poids Q et de rayon R est entraîné par une charge P suspendue à celui-ci par une corde. Le rayon des tourillons de l'ar-



Probl. 4.59 Probl. 4.61 Probl. 4.62

bre $r = R/2$. Le coefficient de frottement dans les paliers vaut 0,05. Déterminer pour quel rapport des poids Q et P l'arbre descend d'un mouvement uniforme.

Rép. $\frac{Q}{P} = 39$.

4.62. Un support soumis à une force verticale $P = 600$ kgf est fixé à un mur par deux boulons. Déterminer la force avec laquelle il faut serrer les boulons pour fixer le support au mur. Le coefficient de frottement entre le support et le mur $f = 0{,}3$. Pour plus de sûreté supposer, en faisant les calculs, que seul le boulon supérieur est serré et que les boulons sont mis avec jeu ne leur permettant pas de travailler en cisaillement. On a $b/a > f$.

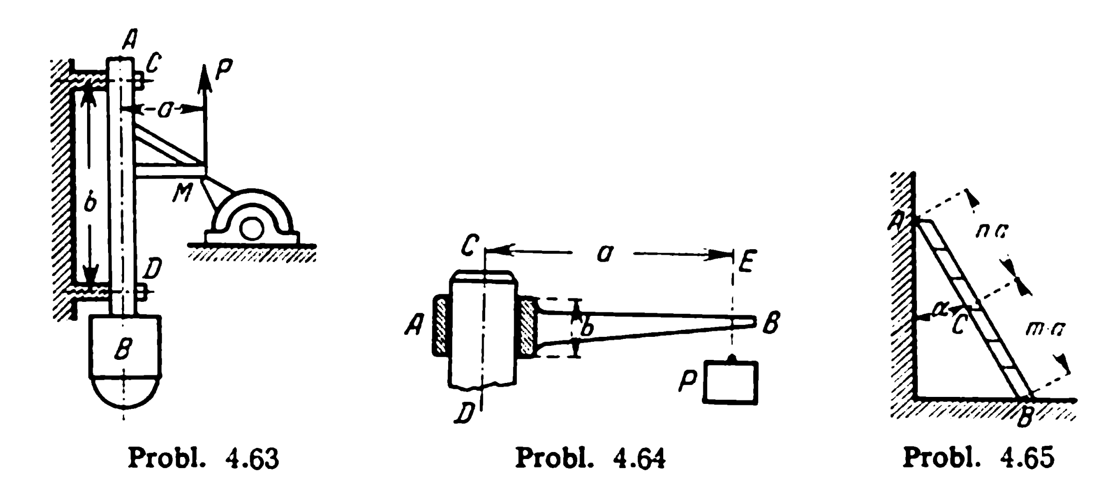
Indication. On appelle force de serrage l'effort agissant suivant l'axe du boulon. La force totale de serrage du boulon supérieur se compose de deux parties: la première maintient le support et évite son renversement autour du boulon inférieur, la seconde assure la pression normale de la partie supérieure du support sur le mur engendrant la force de frottement nécessaire.

Rép. 2 000 kgf.

4.63. Un pilon pesant 180 kgf est entraîné par des mentonnets M fixés sur un arbre. La distance b entre les guides C et D est de 1,5 m. La distance du point de tangence du mentonnet et du ressaut à l'axe du pilon $a = 0{,}15$ m.

Trouver la force P nécessaire pour lever le pilon, si la force de frottement entre les guides C et D et le pilon est égale à 0,15 de la pression entre les parties en contact.

Rép. $P = 186$ kgf.



Probl. 4.63 Probl. 4.64 Probl. 4.65

4.64. La barre horizontale AB possède en son extrémité A une ouverture qui permet de la monter sur un montant circulaire vertical CD; la longueur du moyeu $b = 2$ cm; au point E, à une distance a de l'axe du montant, on suspend une charge P à cette barre. Déterminer, en négligeant le poids de la barre AB, la distance a de manière que sous l'action de la charge P la barre reste en équilibre, si le coefficient de frottement entre la barre et le montant $f = 0,1$.

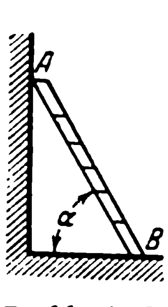
Rép. $a \geqslant 10$ cm.

4.65. Une échelle AB prend appui contre un mur vertical, son extrémité inférieure étant posée sur un plancher horizontal. Le coefficient de frottement de l'échelle contre le mur est f_1, contre le plancher, f_2. Le poids total de l'échelle et de l'homme qui s'y trouve est p et est appliqué au point C, qui divise l'échelle dans un rapport $m : n$. Déterminer le plus grand angle α que forme l'échelle avec le mur dans la position d'équilibre, ainsi que les composantes normales des réactions N_A du mur et N_B du plancher pour cette valeur de α.

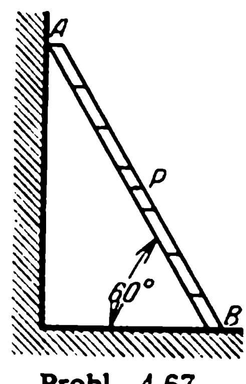
Rép. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m+n) f_2}{m - n f_1 f_2}$; $N_A = \frac{p f_2}{1 + f_1 f_2}$; $N_B = \frac{p}{1 + f_1 f_2}$.

4.66. Une échelle AB de poids P s'appuie contre un mur lisse et sur un plancher horizontal rugueux. Le coefficient de frottement de l'échelle contre le plancher est f. Sous quel angle α faut-il placer l'échelle par rapport au plancher pour qu'un homme de poids p puisse y monter jusqu'en haut? (Voir fig. p. 62.)

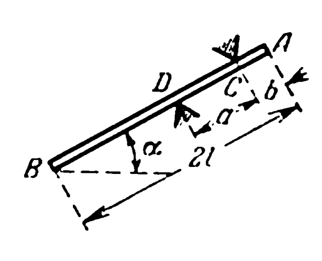
Rép. $\operatorname{tg} \alpha \geqslant \frac{P + 2p}{2f(P+p)}$.



Probl. 4.66



Probl. 4.67



Probl. 4.68

4.67. Une échelle AB prend appui sur un mur et sur un plancher rugueux en formant avec ce dernier un angle de 60°. On place une charge P sur l'échelle. Négligeant le poids de l'échelle, déterminer graphiquement la plus grande distance BP pour laquelle l'échelle reste au repos. L'angle de frottement pour le mur et le plancher vaut 15°.

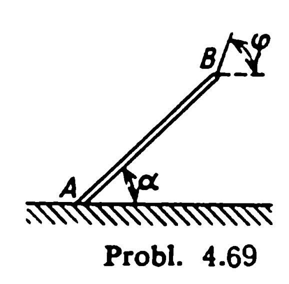
Rép. $BP = \frac{AB}{2}$.

4.68. Une barre homogène AB repose sur deux appuis C et D dont la distance $CD = a$, $AC = b$. Le coefficient de frottement de la barre contre les appuis est f. La barre forme un angle α avec l'horizontale. Quelle condition doit vérifier la longueur $2l$ de la barre pour que cette dernière soit en équilibre, si l'on néglige son épaisseur?

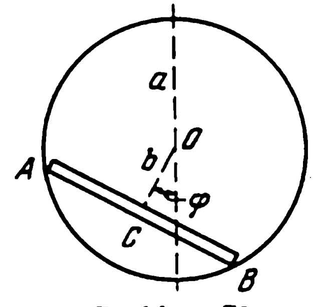
Rép. $2l \geqslant 2b + a + \frac{a}{f} \operatorname{tg} \alpha$, $l > a + b$. La première condition renferme la seconde lorsque $\alpha > \varphi$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} f$ étant l'angle de frottement; si, au contraire, $\alpha < \varphi$, il suffit alors de vérifier la seconde condition. Pour $l < a + b$, l'équilibre est impossible dans la disposition de l'appui C indiquée sur la figure.

4.69. Une poutre homogène prend appui au point A sur un plancher horizontal rugueux et une corde la retient au point B. Le coefficient de frottement de la poutre contre le plancher est f. L'angle α formé par la poutre et le plancher vaut 45°. Pour quel angle φ d'inclinaison de la corde sur l'horizontale la poutre commencera-t-elle à glisser?

Rép. $\operatorname{tg} \varphi = 2 + \frac{1}{f}$.



Probl. 4.69

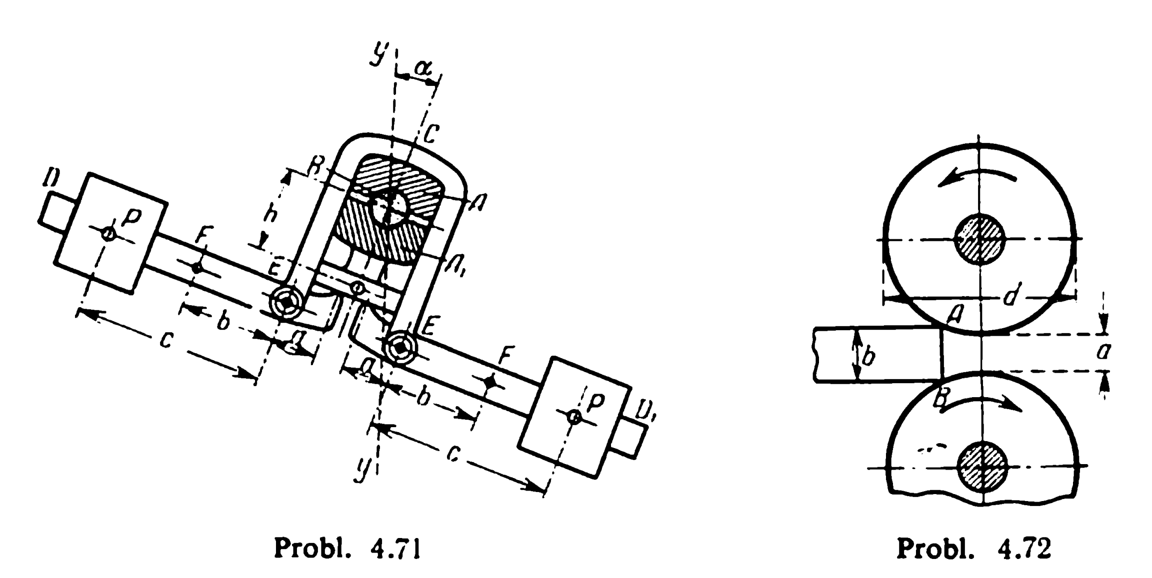


Probl. 4.70

4.70. Les extrémités A et B d'une barre homogène peuvent glisser sur une circonférence rugueuse de rayon a située dans un plan vertical. La distance OC de la barre au centre O de la circonférence est égale à b. Le coefficient de frottement entre la barre et la circonférence est f. Déterminer, pour les positions d'équilibre de la barre, l'angle φ que forme la droite OC avec le diamètre vertical de la circonférence.

Rép. $\operatorname{ctg}\varphi \geqslant \dfrac{b^2(1+f^2)}{a^2 f} - f.$

4.71. Pour déterminer le coefficient de frottement on utilise un dispositif qui comporte un palier AA_1 monté sur un arbre B tournant autour d'un axe horizontal. Les deux moitiés du palier sont serrées contre l'arbre à l'aide d'un étrier C et de deux leviers D et D_1 dont les bras courts ont une longueur $a=30$ mm et exercent sur la moitié inférieure A_1 du palier une pression sollicitée par les charges P et les poids des leviers. Le poids total du dispositif (c'est-à-dire du palier, de l'étrier, des leviers et des charges est $Q=40$ kgf,



Probl. 4.71 Probl. 4.72

son centre de gravité est situé au-dessous de l'axe de l'arbre à une distance $h=120$ mm; le poids de chacun des leviers $p=7$ kgf est appliqué au point F à une distance $b=510$ mm de l'axe du levier E; les charges P de 8 kgf chacune agissent en des points situés à une distance $c=900$ mm des axes de E. La partie inférieure q du palier pèse 6 kgf. Lors de la rotation de l'arbre l'axe du dispositif dévie de la verticale yy sous un angle $\alpha=5°$. Déterminer le coefficient de frottement f entre l'arbre et le palier si le diamètre de l'arbre $d=100$ mm.

Rép. $f=0{,}005\,7$. Le coefficient de frottement est donné par l'équation

$$\left\{\left(2\,\frac{pb+Pc}{a}-q\right)+\left[2\,\frac{pb+Pc}{a}+(Q-q)\right]\right\}f\,\frac{d}{2}=Qh\operatorname{tg}\alpha.$$

4.72. Un laminoir comporte deux arbres de diamètre $d=50$ cm tournant en sens inverses comme les flèches l'indiquent sur la figure; la distance entre

les arbres est $a=0,5$ cm. Trouver l'épaisseur b des tôles que l'on peut y laminer sachant que le coefficient d'adhérence entre le fer chauffé au rouge et les arbres en fonte $f=0,1$.

Pour que le laminoir fonctionne il faut que la tôle soit agrippée par les arbres tournants, autrement dit il faut que la résultante des réactions normales appliquées à la tôle et des forces d'adhérence aux points A et B soit dirigée suivant une ligne horizontale vers la droite.

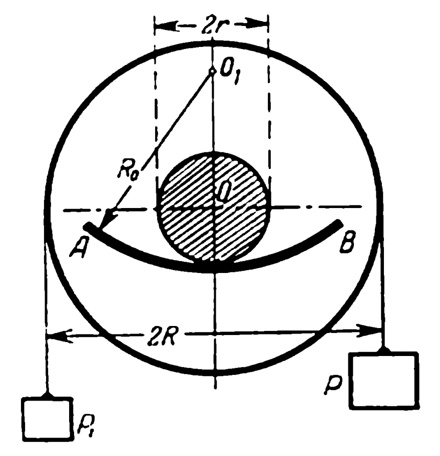
Rép. $b \leqslant 0,75$ cm.

4.73. Une poulie de rayon R est munie de deux pivots de rayon r disposés symétriquement par rapport à son plan médian. Les pivots prennent appui sur deux surfaces cylindriques AB de génératrices horizontales. Un câble passant sur la poulie supporte deux charges P et P_1, $P>P_1$. Déterminer la plus petite valeur de la charge P_1 pour laquelle la poulie sera en équilibre. Supposer que le coefficient de frottement des pivots sur les surfaces cylindriques AB est f, le poids de la poulie et des pivots étant Q.

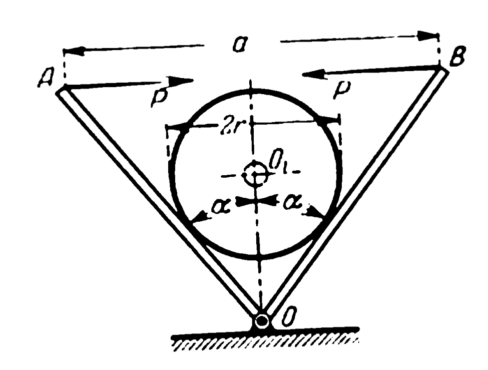
La position du système indiquée sur la figure ne saurait être une position d'équilibre; cette dernière doit être trouvée au préalable.

Rép. Dans la position d'équilibre le plan passant par l'axe du cylindre AB et de la poulie forme avec la verticale un angle égal à l'angle de frottement:

$$P_1=\frac{P(R\sqrt{1+f^2}-fr)-frQ}{R\sqrt{1+f^2}+fr}.$$



Probl. 4.73



Probl. 4.74

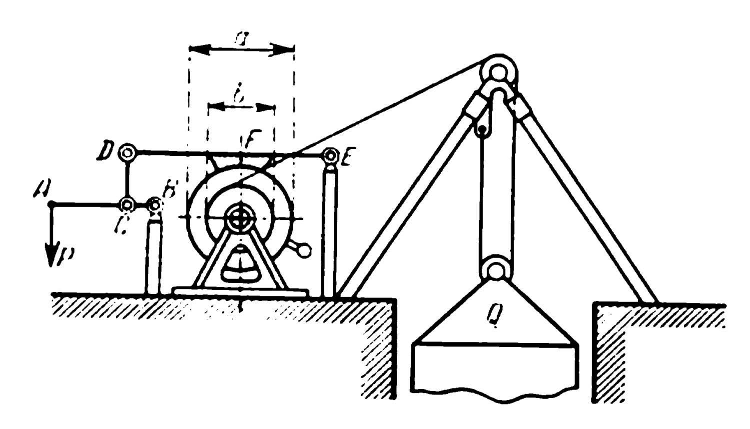
4.74. Un cylindre homogène est placé entre deux plaques AO et BO articulées en O, l'axe du cylindre O_1 étant parallèle à celui de l'articulation; les deux axes sont horizontaux et sont situés dans un même plan vertical. Les plaques compriment le cylindre sous l'action de deux forces horizontales de valeur égale et directement opposées P appliquées aux points A et B. Le poids du cylindre est Q, son rayon r, le coefficient de frottement entre

le cylindre et les plaques est f, $\widehat{AOB}=2\alpha$, $AB=a$. Quelle condition doit vérifier la force P pour que le cylindre soit en équilibre?

Rép. 1) $\operatorname{tg}\alpha>f$; $\frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha+f\cos\alpha}\leqslant P\leqslant\frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha-f\cos\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\leqslant f$; $P\geqslant\frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha+f\cos\alpha}$.

4.75. Pour descendre des charges dans un puits on utilise un treuil à frein (cf. figure). Sur le tambour où s'enroule la chaîne, on fixe une roue concentrique en bois que l'on freine en exerçant une pression sur l'extrémité



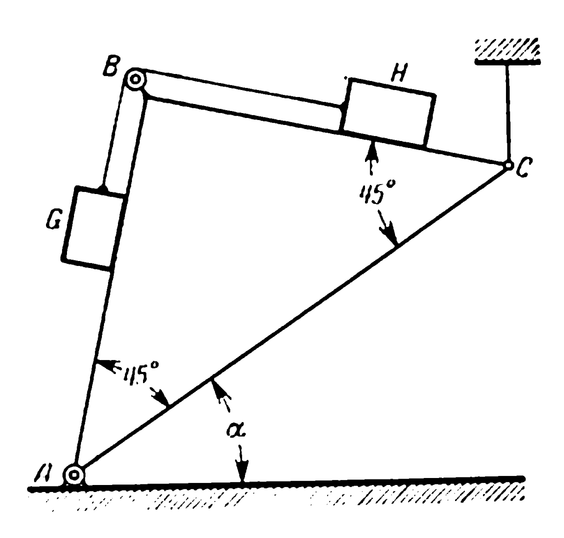
Probl. 4.75

A du levier AB relié par la chaîne CD à l'extrémité D du levier de frein ED. Le diamètre de la roue $a=50$ cm; le diamètre du tambour $b=20$ cm; $ED=$ $=120$ cm; $EF=60$ cm; $AB=1$ m; $BC=10$ cm. Déterminer la force P équilibrant la charge $Q=800$ kgf suspendue à la poulie mobile, si le coefficient de frottement entre le bois et l'acier est $f=0{,}4$; négliger les dimensions du sabot F.

Rép. $P=20$ kgf.

4.76. Deux corps identiques G et H de poids P reliés par un fil passant sur une poulie B sont posés sur les faces AB et BC du prisme ABC. Le coefficient de frottement entre les corps et les faces du prisme est f. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ valent 45°. Déterminer, en négligeant le frottement dans la poulie, la valeur de l'angle d'inclinaison α de la face AC par rapport à l'horizontale pour laquelle la charge G commence à descendre.

Rép. $\operatorname{tg}\alpha=f$.



Probl. 4.76

4.77. Les fondements des appuis d'un pont de chemin de fer jeté sur un fleuve sont posés à une profondeur calculée en supposant que le poids de l'appui avec la charge supportée est équilibré par la pression du sol sur la base de l'appui et par le frottement latéral, le sol constitué de sable fin saturé d'eau étant considéré comme un corps fluide. Calculer la profondeur h du fondement des appuis, si la charge sur chaque appui est de 150 t, le poids de l'appui est de 8 t pour 1 m de hauteur, sa hauteur totale à partir du fond du fleuve est de 9 m, la hauteur de l'eau au-dessus du fond de 6 m, l'aire de la base de l'appui de 3,5 m^2, la surface latérale pour 1 m de hauteur de l'appui de 7 m^2, le poids spécifique du sable saturé d'eau vaut 1,8 t/m^3, le poids spécifique de l'eau 1 t/m^3 et le coefficient d'adhérence du sable sur le bandage en acier enveloppant l'appui maçonné est 0,18.

Pour calculer le frottement on suppose que la pression latérale moyenne sur 1 m^2 vaut $6+0{,}9h$ tonnes.

Rép. $h=11$ m.

4.78. Déterminer l'angle α que forme avec l'horizontale un plan sur lequel un rouleau de rayon $r=50$ mm roule uniformément. Le matériau des corps en frottement est l'acier, le coefficient de frottement de roulement* $k=$ $=0{,}05$ mm.

L'angle α étant petit, on peut poser $\alpha=\operatorname{tg}\alpha$.

Rép. $\alpha=3'26''$.

Probl. 4.79

4.79. Déterminer la force P nécessaire pour qu'un cylindre de 60 cm de diamètre, pesant 300 kgf, roule uniformément sur un plan horizontal étant donné que le coefficient de frottement de roulement est $k=0{,}5$ cm et que l'angle α formé par la force P avec le plan horizontal est égal à 30°.

Rép. $P=5{,}72$ kgf.

4.80. Une boule de rayon R et de poids Q est située sur un plan horizontal. Le coefficient de frottement de glissement de la boule sur le plan est f, le coefficient de frottement de roulement k. Pour quelles conditions la boule roulera-t-elle uniformément sous l'action de la force horizontale P appliquée en son centre?

Rép. $\frac{k}{R}<f$; $P=Q\,\frac{k}{R}$.

---

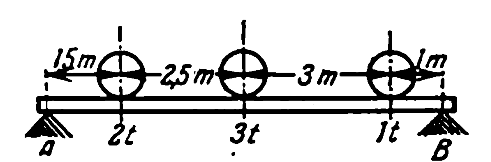
*On l'appelle parfois le coefficient de résistance au roulement.

§ 5. Statique graphique

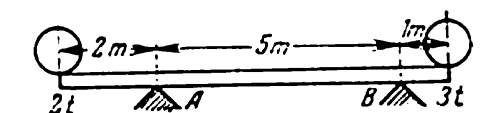
Dans les réponses aux problèmes de ce paragraphe les nombres marqués d'un signe+ indiquent des efforts de traction et ceux marqués d'un signe−, des efforts de compression.

5.1. Déterminer graphiquement et verifier analytiquement les réactions des appuis d'une poutre dont la travée est de 8 m, sous l'effet de trois charges de 2 t, 3 t, et 1 t, disposées comme l'indique la figure. Négliger le poids de la poutre.

Rép. $R_A = 3{,}25$ t; $R_B = 2{,}75$ t.



Probl. 5.1



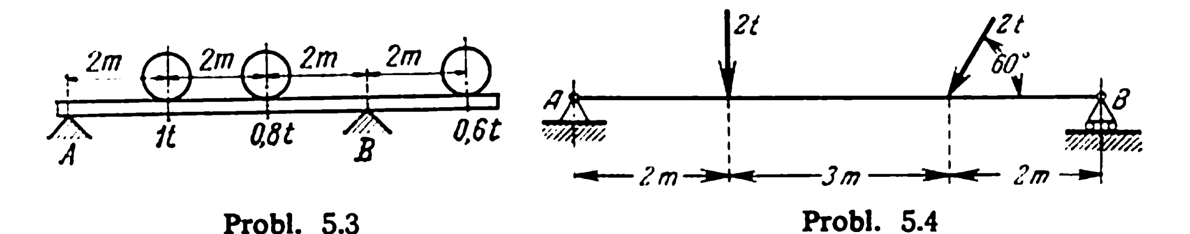
Probl. 5.2

5.2. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis d'une console dont la longueur est de 8 m et la travée de 5 m, sous l'action de deux charges de 2 t et de 3 t placées à ses extrémités (cf. figure). Négliger le poids de la poutre.

Rép. $R_A = 2{,}2$ t; $R_B = 2{,}8$ t.

5.3. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis d'une poutre console longue de 8 m, dont la travée est de 6 m sous l'action de trois charges de 1 t, 0,8 t et 0,6 t disposées comme l'indique le schéma. Négliger le poids de la poutre.

Rép. $R_A = 0{,}73$ t; $R_B = 1{,}67$ t.



Probl. 5.3

Probl. 5.4

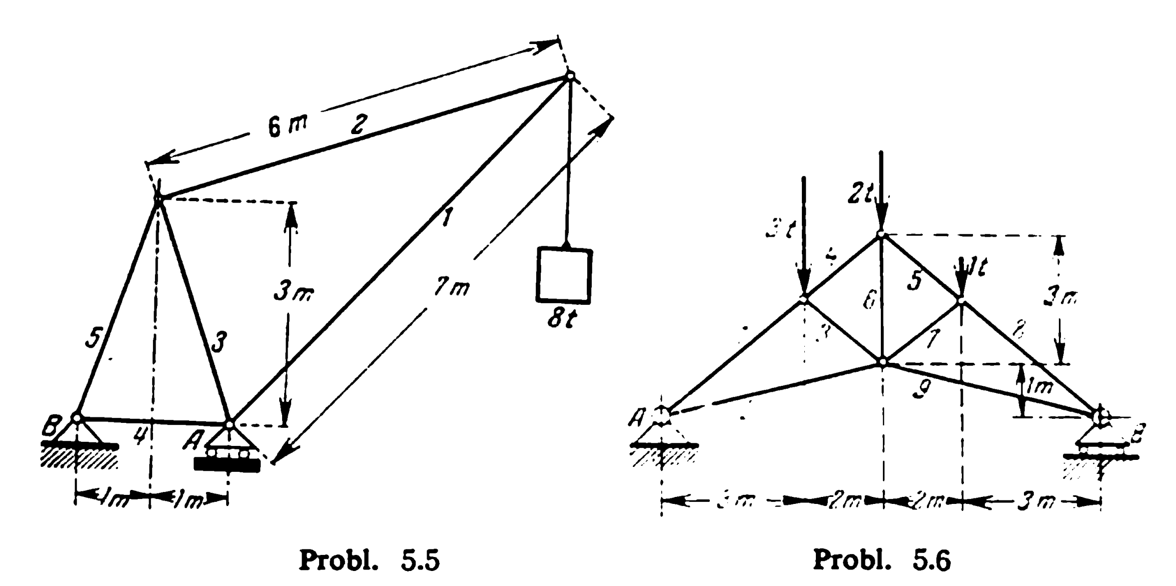
5.4. Une poutre AB est soumise à l'action de deux forces (cf. schéma). Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis. Négliger le poids de la poutre.

Rép. $R_A = 2{,}17$ t; $R_B = 1{,}81$ t.

5.5. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une grue (voir fig. p. 68) lorsque la charge est de 8 t. Négliger le poids des éléments.

Rép. $R_A = 26$ t; $R_B = 18$ t et est dirigée de haut en bas.

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5
Effort en tonnes	−16,4	+11,5	−14,3	−6	+19



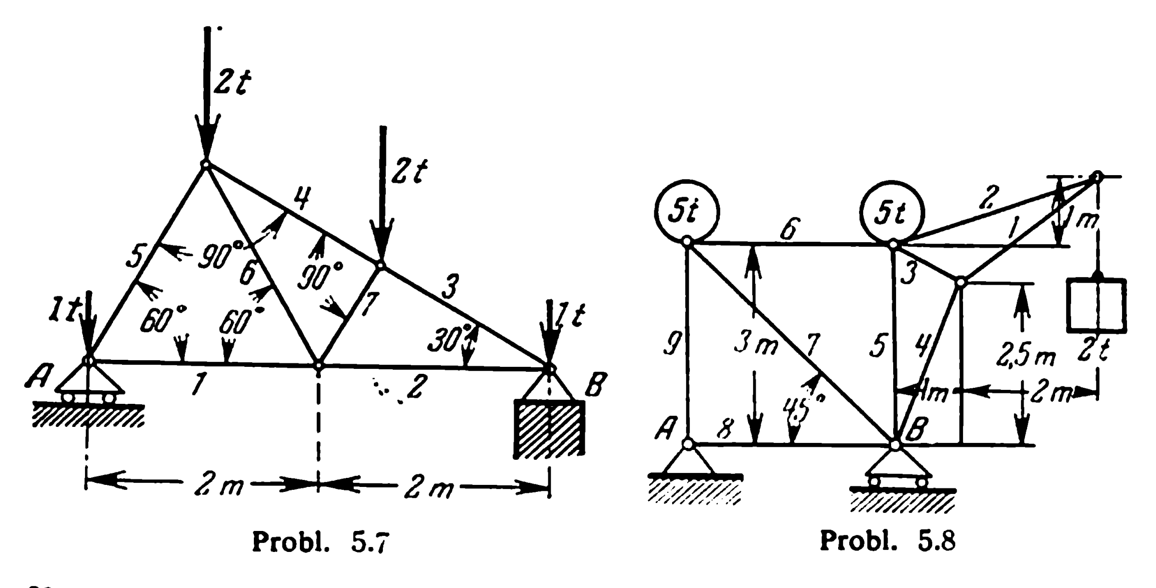
Probl. 5.5

Probl. 5.6

5.6. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

Rép. $R_A=3{,}4$ t; $R_B=2{,}6$ t.

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effort en tonnes	−7,3	+5,8	−2,44	−4,7	−4,7	+3,9	−0,81	−5,5	+4,4



Probl. 5.7

Probl. 5.8

5.7. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

Rép. $R_A = 3{,}25$ t; $R_B = 2{,}75$ t.

Numéro de l'élément	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Effort en tonnes	+1,3	+3,03	−3,5	−2,5	−2,6	+1,73	−1,73

5.8. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis et les efforts dans les éléments de la ferme d'une grue (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

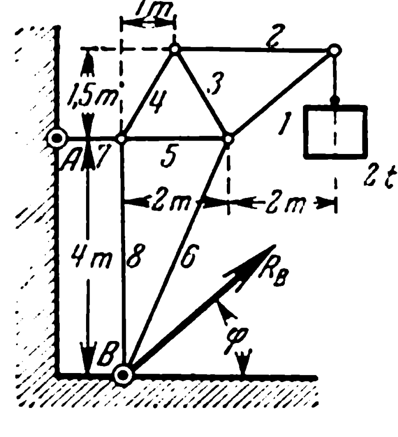
Rép. $R_A = 3$ t; $R_B = 9$ t.

Numéro de l'élément	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Effort en tonnes	−6,0	+5,1	−3,13	−5,4	−2,0	+2,0	−2,83	0	−3,0

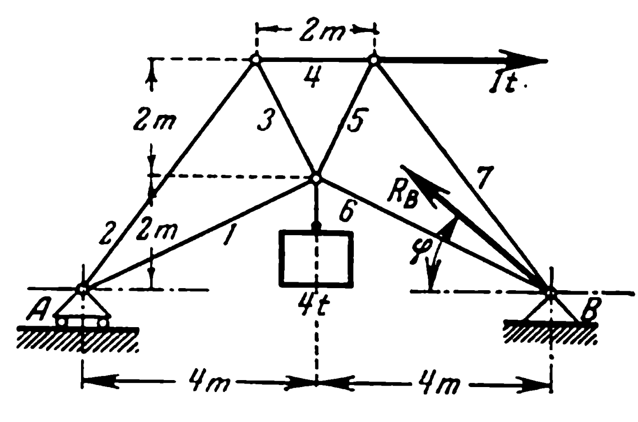
5.9. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réaction-des appuis et les efforts dans les éléments de la ferme d'une grue (cf. schés ma) lorsque la charge est de 2 t.

Rép. $R_A = 2$ t; $R_B = 2{,}83$ t; $\varphi = 45°$.

Numéro de l'élément	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Effort en tonnes	−3,33	+2,67	−2,4	+2,4	+0,67	−4,47	+2	+2



Probl. 5.9



Probl. 5.10

5.10. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (voir fig. p. 69) sous l'action des forces agissantes.

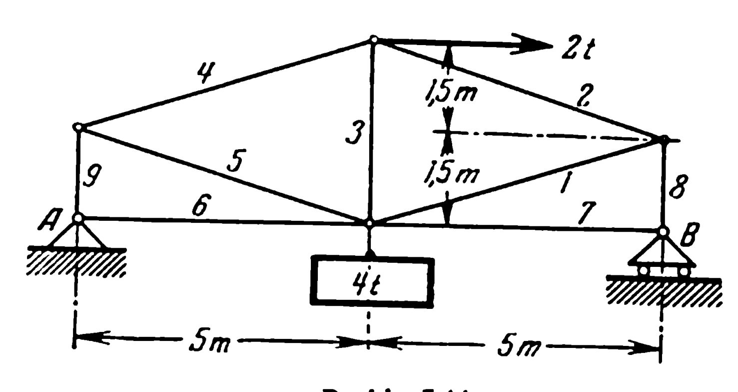
Rép. $R_A = 1{,}5$ t; $R_B = 2{,}7$ t; $\varphi = 68°$.

Numéro de l'élément	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Effort en tonnes	+2	−3	+2,7	−3	+3,6	+1,57	−4

5.11. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

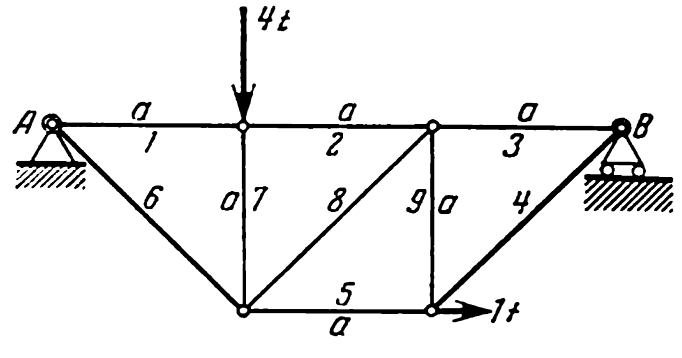
Dans ce problème comme dans les suivants l'axe Ox est dirigé vers la droite suivant la droite horizontale AB et l'axe Oy est dirigé vers le haut suivant la verticale.

Rép. $X_A = -2$ t; $Y_A = 1{,}4$ t; $Y_B = 2{,}6$ t.



Probl. 5.11

Numéro de l'élément	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Effort en tonnes	+4,5	−4,5	+2	−2,44	+2,44	+2	0	−2,6	−1,4



Probl. 5.12

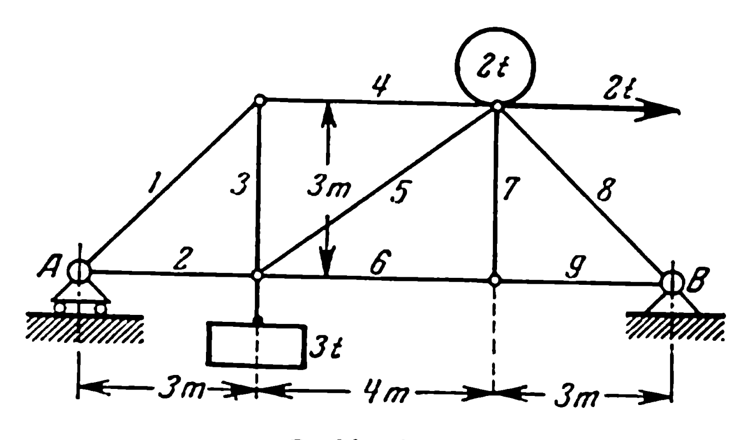
5.12. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

Rép. $X_A = -1$ t; $Y_A = 3$ t; $Y_B = 1$ t.

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effort en tonnes	−2	−2	−1	+1,41	+2	+4,24	−4	+1,41	−1

5.13. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments de la ferme de pont (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

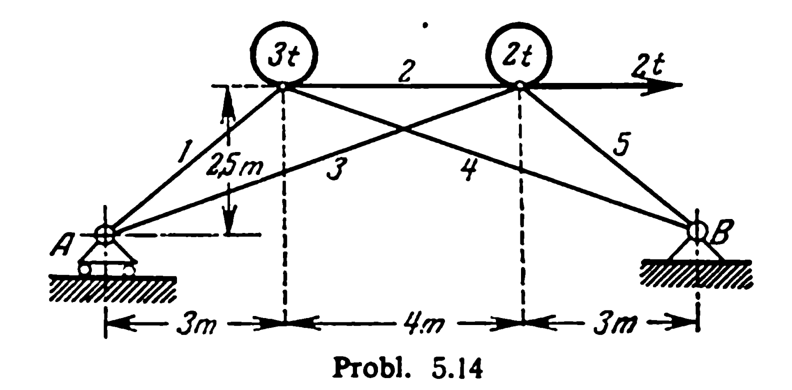
Rép. $Y_A = 2{,}1$ t; $X_B = -2$ t; $Y_B = 2{,}9$ t.



Probl. 5.13

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effort en tonnes	−2,97	+2,1	+2,1	−2,1	+1,5	+0,9	0	−4,1	+0,9

5.14. Déterminer graphiquement et vérifier analytiquement les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme (cf. schéma) sous



Probl. 5.14

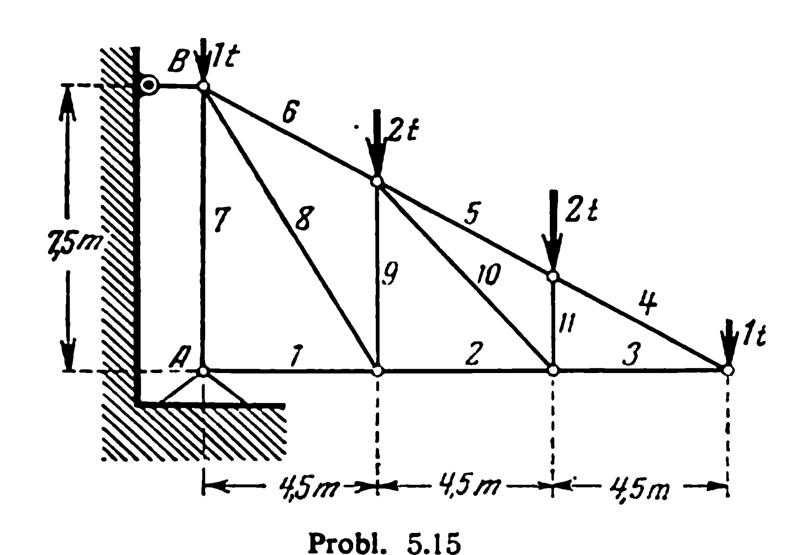
l'action des forces agissantes. Les éléments *3* et *4* ne sont pas articulés en leur point d'intersection.

Rép. $Y_A=2{,}2$ t; $X_B=-2$ t; $Y_B=2{,}8$ t.

Numéro de l'élément	1	2	3	4	5
Effort en tonnes	−6	−7	+4,9	+2,53	−5,7

5.15. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments d'une ferme console (cf. schéma) sous l'action des forces agissantes.

Rép. $X_A=5{,}4$ t; $Y_A=6$ t; $X_B=-5{,}4$ t.

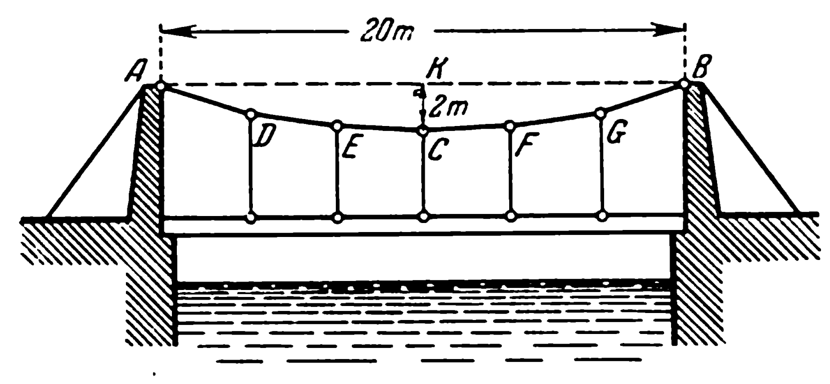


Probl. 5.15

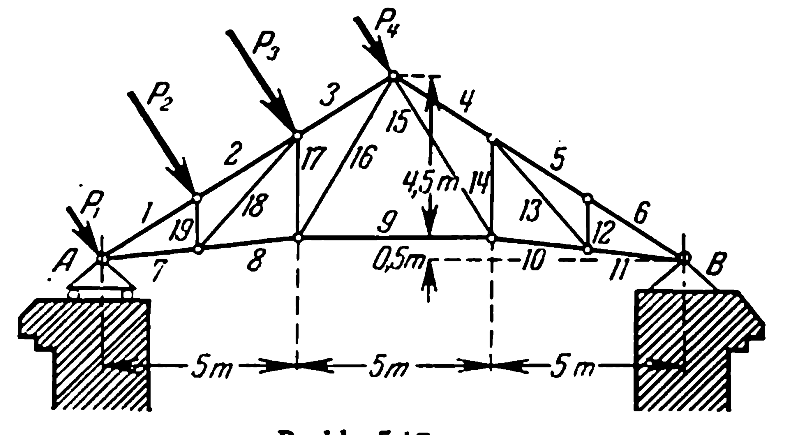
Numéro de l'élément	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Effort en tonnes	−5,4	−3,6	−1,8	+2,06	+2,06	+4,1	−6	+3,5	−3	+2,7	−2

5.16. Un pont à chaîne de longueur $AB=20$ m est soutenu par deux chaînes; la flèche des chaînes $CK=2$ m; il supporte une charge de 1,6 t/m. Déterminer les tensions des chaînes au point médian *C* sachant que la courbe sur laquelle sont situés les sommets *A*, *D*, *E*, *C*, *F*, *G*, *B* d'un polygone formé par une corde est une parabole.

Rép. 20 t.



Probl. 5.16



Probl. 5.17

5.17. Sous la pression du vent, les forces $P_1=P_4=312{,}5$ kgf et $P_2=P_3=625$ kgf perpendiculaires au toit agissent aux nœuds d'une ferme de panneaux égaux. Déterminer les réactions des appuis et les efforts dans les éléments de la ferme engendrés par la pression du vent (les dimensions sont données sur le schéma).

Rép. $Y_A=997$ kgf; $X_B=1\,040$ kgf; $Y_B=563$ kgf; $S_1=-1\,525$ kgf; $S_2=-1\,940$ kgf; $S_3=-1\,560$ kgf; $S_4=S_5=S_6=-970$ kgf; $S_7=+1\,100$ kgf; $S_8=440$ kgf; $S_9=-215$ kgf; $S_{10}=$ $=S_{11}=-230$ kgf; $S_{12}=S_{13}=S_{14}=0$; $S_{15}=-26$ kgf; $S_{16}=$ $=+1\,340$ kgf; $S_{17}=-1\,130$ kgf; $S_{18}=+1\,050$ kgf; $S_{19}=$ $=-750$ kgf.

CHAPITRE II

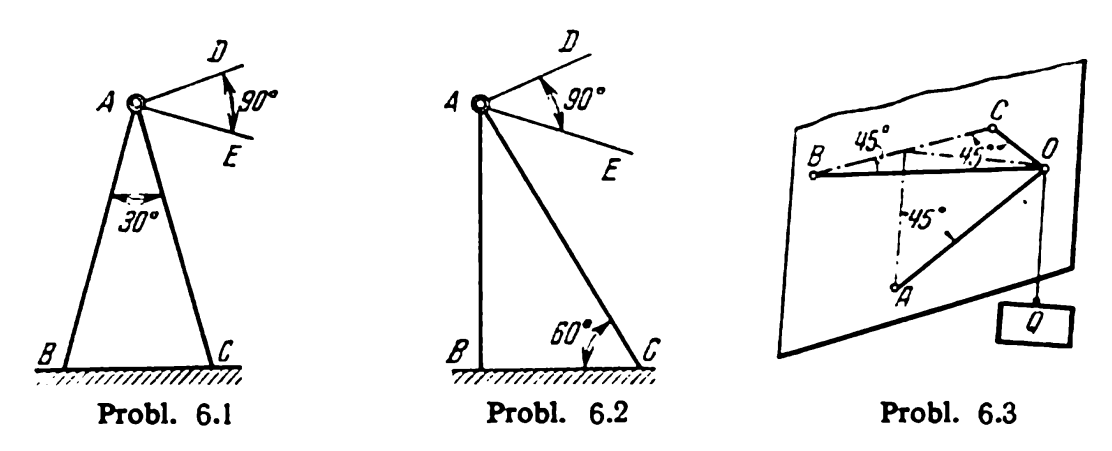
SYSTÈME DE FORCES DANS L'ESPACE

§ 6. Forces concourantes

6.1. Un poteau est composé de deux poutres de poids négligeables et d'inclinaison identique AB et AC articulées au sommet. L'angle $\widehat{BAC}=$ $=30°$. Le poteau soutient deux câbles horizontaux AD et AE formant un angle droit. La tension de chaque câble est de 100 kgf. Déterminer les efforts dans les poutres admettant que le plan BAC divise l'angle $\widehat{DAE}$ en deux parties égales.

Rép. $S_B=-S_C=273$ kgf.

6.2. Les câbles horizontaux d'une ligne télégraphique sont suspendus à un poteau AB avec une contre-fiche AC et forment un angle $\widehat{DAE}=90°$. Les tensions des câbles AD et AE sont respectivement 120 N et 160 N. Le point A est une articulation. Trouver l'angle α formé par les plans BAC



Probl. 6.1 Probl. 6.2 Probl. 6.3

et BAE pour lequel le poteau ne travaille pas en flexion latérale, et déterminer l'effort S dans la contre-fiche, si cette dernière forme un angle de 60° par rapport à l'horizontale. Négliger les poids du poteau et de la contre-fiche.

Rép. $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}=36°50'$; $S=-400$ N.

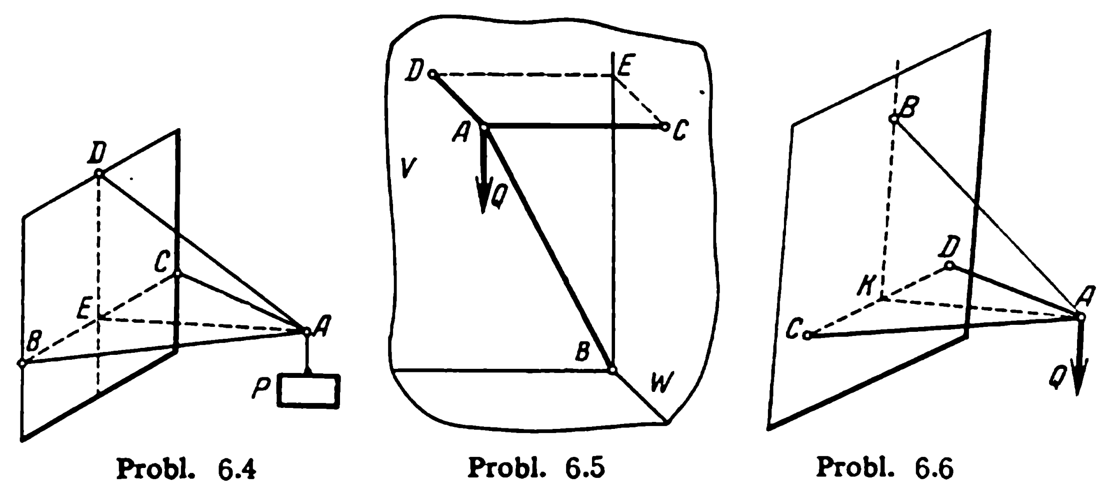
6.3. Une poutre AO articulée au point A à l'aide de deux chaînes horizontales de même longueur BO et CO supporte une charge $Q=100$ kgf;

la poutre AO forme un angle de 45° par rapport à l'horizontale, $\widehat{CBO} = \widehat{BCO} = 45°$. Trouver l'effort S dans la poutre et la tension T des chaînes.

Rép. $S = -141$ kgf; $T = 71$ kgf.

6.4. Trouver les efforts S_1 et S_2 dans les barres AB et AC et l'effort T dans le câble AD sachant que $\widehat{CBA} = \widehat{BCA} = 60°$, $\widehat{EAD} = 30°$; la charge P pèse 300 kgf; le plan ABC est horizontal; les barres sont articulées aux points A, B et C.

Rép. $T = 600$ kgf; $S_1 = S_2 = -300$ kgf.



Probl. 6.4 Probl. 6.5 Probl. 6.6

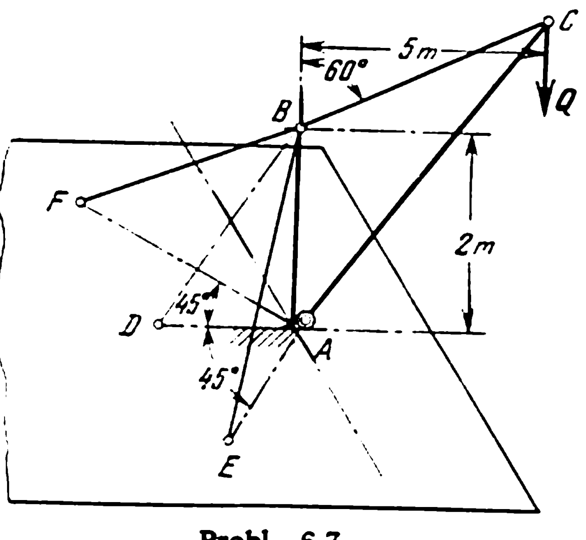
6.5. Trouver les efforts dans la barre AB et les chaînes AC et AD supportant la charge $Q = 42$ kgf sachant que $AB = 145$ cm, $AC = 80$ cm, $AD = 60$ cm; le plan du rectangle $CADE$ est horizontal, les plans V et W étant verticaux. La fixation au point B est une articulation.

Rép. $T_C = 32$ kgf; $T_D = 24$ kgf; $T_B = -58$ kgf.

6.6. Déterminer les efforts dans le câble AB et dans les barres AC et AD supportant la charge $Q = 180$ N si $AB = 170$ cm, $AC = AD = 100$ cm, $CD = 120$ cm; $CK = KD$ et le plan du triangle CDA est horizontal. Les barres sont articulées aux points A, C, et D.

Rép. 204 N; − 60 N.

6.7. Une grue mobile (cf. schéma) lève une charge $Q = 2$ t; $AB = AE = AF = 2$ m; $\widehat{EAF} = 90°$, le plan de la grue ABC divise le dièdre droit $EABF$ en deux parties égales. Déterminer la force P_1 comprimant le montant vertical AB, ainsi que les forces P_2,



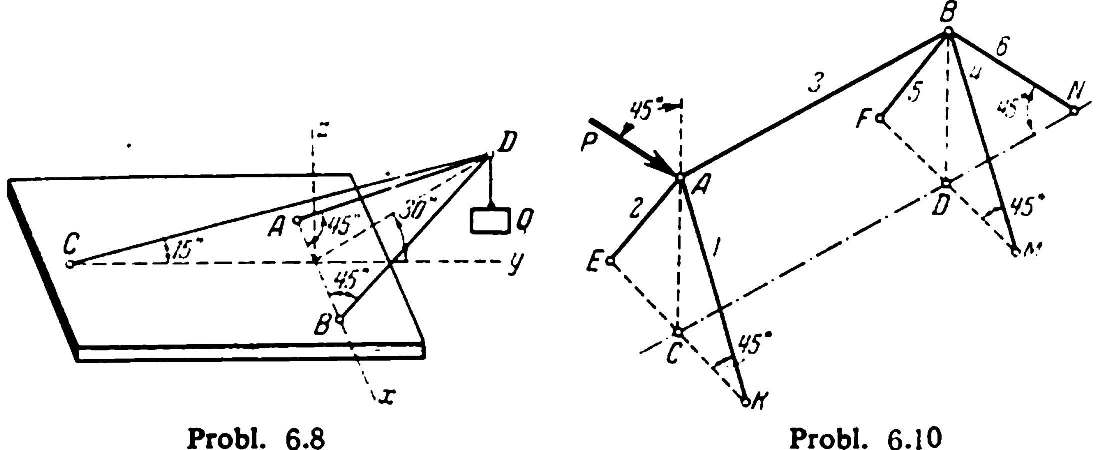
Probl. 6.7

P_3 et P_4 maintenant la corde BC et les câbles BE et BF. Négliger les poids des éléments de la grue.

Rép. $P_1=4{,}2$ t; $P_2=5{,}8$ t; $P_3=P_4=5$ t.

6.8. Une charge $Q=1$ t est suspendue au point D (cf. schéma). Les barres sont articulées aux points A, B et D. Déterminer les réactions des appuis A, B et C.

Rép. $R_A=R_B=2{,}64$ t; $R_C=3{,}35$ t.



Probl. 6.8 Probl. 6.10

6.9. Un aérostat sphérique soutenu par deux câbles est soumis à l'action du vent. Les câbles forment un angle droit; leur plan forme un angle de 60° avec le plan horizontal. La direction du vent est perpendiculaire à la ligne d'intersection de ces plans et parallèle à la surface de la terre. Le poids de l'aérostat, y compris le gaz qu'il contient, est de 250 kgf; son volume, de 215,4 m³; le poids spécifique de l'air, de 1,3 kgf/m³. Déterminer les tensions T_1 et T_2 des câbles et la résultante P des forces de pression du vent sur l'aérostat sachant que les lignes d'action de toutes les forces appliquées à l'aérostat passent par son centre.

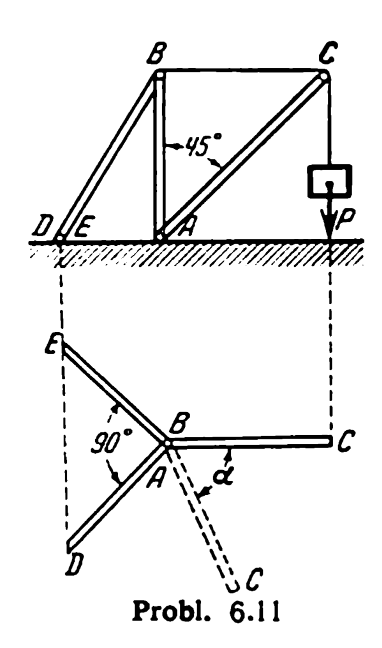
Rép. $T_1=T_2=24{,}5$ kgf; $P=17{,}3$ kgf.

6.10. Une ferme à trois dimensions comporte six éléments *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* (cf. schéma). Dans le plan du rectangle $ABCD$ la force P agit au point A, sa ligne d'action formant un angle de 45° avec la verticale CA. Les triangles EAK et FBM sont égaux . Les angles des triangles isocèles EAK, FBM et NDB de sommets A, B et D sont droits. Déterminer les efforts dans les éléments sachant que $P=1$ t.

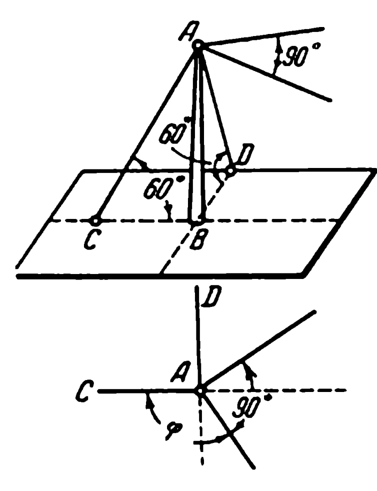
Rép. $S_1=-0{,}5$ t; $S_2=-0{,}5$ t; $S_3=-0{,}707$ t; $S_4=+0{,}5$ t; $S_5=+0{,}5$ t; $S_6=-1$ t.

6.11. Déterminer les efforts dans le montant vertical et dans les supports d'une grue (cf. schéma) en fonction de l'angle α sachant que $AB=BC=AD=AE$. Les éléments sont articulés aux points A, B, D et E.

Rép. $S_{BD}=P(\cos\alpha-\sin\alpha)$; $S_{BE}=P(\cos\alpha+\sin\alpha)$; $S_{AB}=-P\sqrt{2}\cos\alpha$.



Probl. 6.11



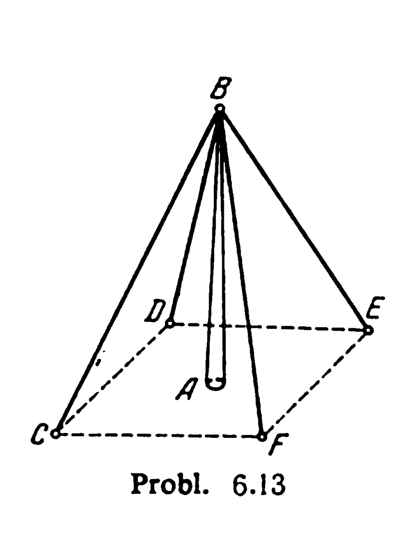
Probl. 6.12

6.12. Un poteau AB supportant un câble est retenu par deux tirants AC et AD; $\widehat{CBD}=90°$. Déterminer les efforts dans le poteau et les tirants en fonction de l'angle φ formé par l'un des deux câbles avec le plan CBA. Les deux câbles sont horizontaux et orthogonaux, les tensions y sont identiques et sont égales à T.

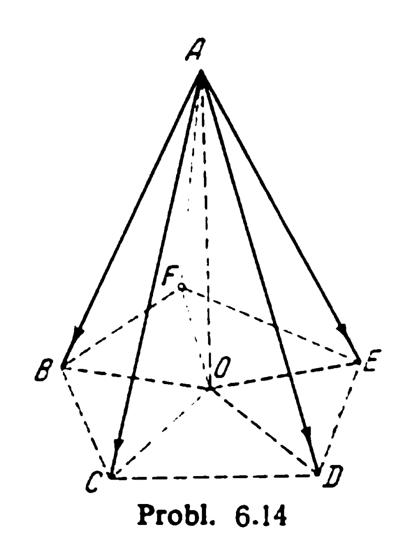
Rép. $S_{AC}=2T(\sin\varphi-\cos\varphi)$; $S_{AD}=2T(\sin\varphi+\cos\varphi)$; $S_{AB}= = -2\sqrt{3}\,T\sin\varphi$.

Les tirants sont simultanément tendus lorsque $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$. Pour $\varphi<\frac{\pi}{4}$ et $\varphi>\frac{3\pi}{4}$ l'un des tirants doit être remplacé par une poutre.

6.13. Le mât AB est retenu en position verticale par quatre tirants disposés symétriquement. L'angle formé par deux tirants voisins vaut 60°.



Probl. 6.13



Probl. 6.14

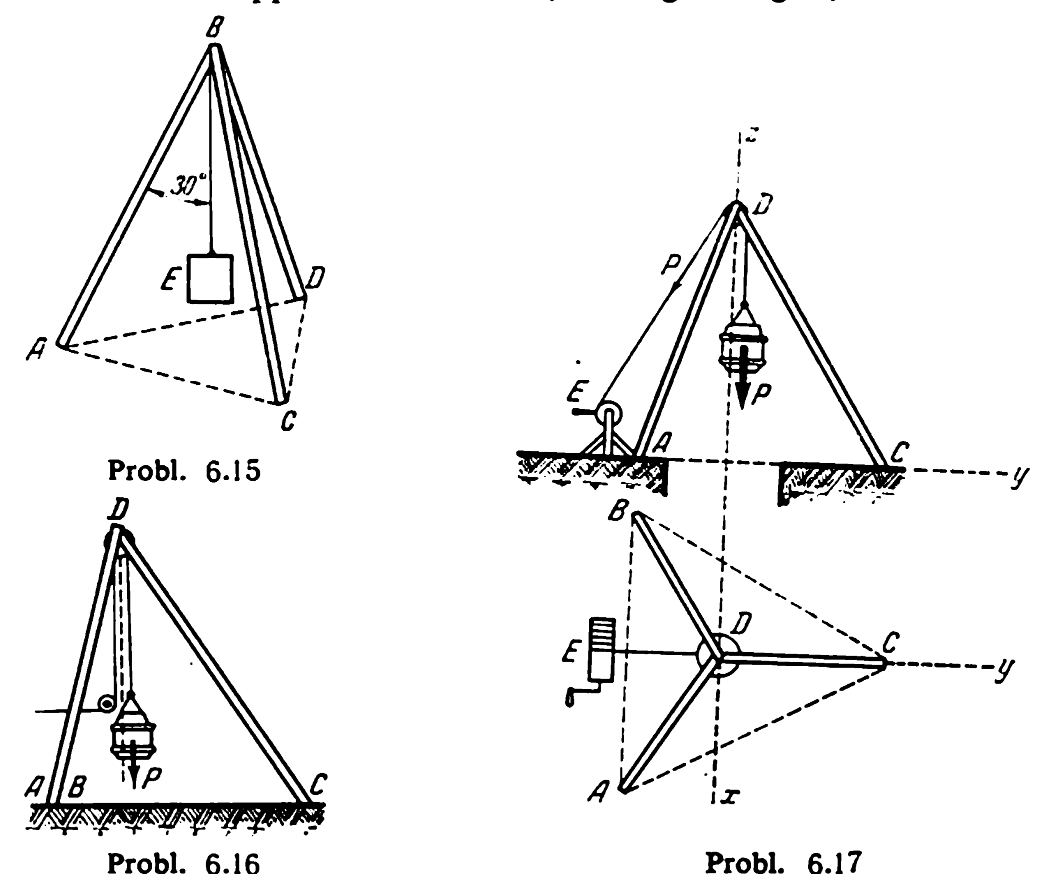
Déterminer la pression qu'exerce le mât sur la terre sachant que la tension dans chacun des tirants vaut 100 kgf; le mât pèse 200 kgf.

Rép. 483 kgf.

6.14. Les quatre arêtes AB, AC, AD et AE d'une pyramide régulière pentagonale représentent, en grandeur et sens, quatre forces à l'échelle 1 N : 1 m. Trouver la résultante R et la distance x du point O au point d'intersection de la résultante avec la base sachant que la hauteur $AO=10$ m et que le rayon du cercle circonscrit au pentagone $OC=4,5$ m. (Voir fig. p. 77.)

Rép. $R=40,25$ N, $x=1,125$ m.

6.15. Une charge $E=10$ kgf est suspendue au sommet B du pied de niveau $ABCD$. Les supports de ce dernier, de longueur égale, sont fixés au



Probl. 6.15

Probl. 6.16

Probl. 6.17

plancher horizontal et forment entre eux des angles égaux. Déterminer l'effort dans chacun des supports sachant qu'ils forment des angles de 30° avec la verticale BE.

Rép. 3,85 kgf.

6.16. Trouver les efforts S dans les supports AD, BD et CD du pied de niveau formant des angles de 60° avec le plan horizontal; le poids P de la charge levée uniformément est de 3 t et $AB=BC=AC$.

Rép. $S=2,3$ t.

6.17. Pour remonter une charge $P=3$ t d'un puits on utilise le pied de niveau $ABCD$ et le treuil E. Déterminer les efforts dans les supports lorsqu'on remonte la charge uniformément sachant que le triangle ABC est isocèle et que les supports et le câble DE forment avec le plan horizontal des angles de 60°. La disposition du treuil par rapport au pied de niveau est indiquée sur le schéma.

Rép. $S_A=S_B=3{,}15$ t; $S_C=0{,}155$ t.

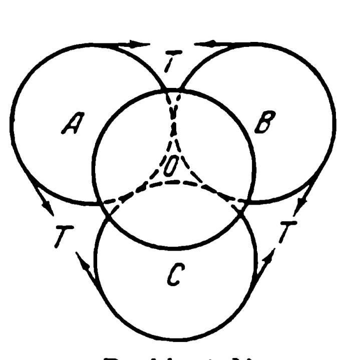
6.18. Un pied de niveau est posé sur un plancher lisse; les extrémités inférieures de ses supports sont reliées par des lacets de sorte que les supports et les lacets forment un tétraèdre régulier. Une charge de poids P est suspendue au point supérieur du pied de niveau. Déterminer la réaction du plancher R aux points d'appui et la tension des lacets T en fonction de P.

Rép. $R=\frac{1}{3}P$; $T=\frac{P}{3\sqrt{6}}$.

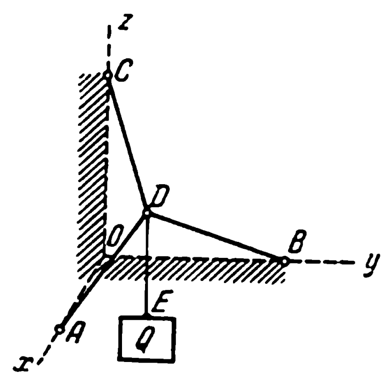
6.19. Résoudre le problème précédent dans le cas où les supports du pied de niveau sont reliés non pas à leur extrémités inférieures mais en leurs points médians; le poids de chaque support est p et est appliqué en son milieu.

Rép. $R=\frac{1}{3}P+p$; $T=\frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}$.

6.20. Trois boules homogènes A, B et C de même rayon reposant sur un plan horizontal se touchent et sont reliées par un lacet qui les embrasse dans le plan équatorial. Une quatrième boule homogène O de même rayon,



Probl. 6.20



Probl. 6.21

pesant 10 N, est posée sur les trois boules inférieures. Déterminer la tension du lacet T due à la pression de la boule supérieure. Négliger le frottement entre les boules et le plan horizontal.

Rép. $T=1{,}36$ N.

6.21. Trois fils $AD=BD=CD=L$ sont fixés aux points A, B et C, situés sur des axes de coordonnées orthogonaux à une même distance l de l'origine O, et sont reliés au point D de coordonnées

$$x=y=z=\frac{1}{3}\left(l-\sqrt{3L^2-2l^2}\right).$$

Une charge Q est suspendue en ce point. Déterminer la tension des fils T_A, T_B et T_C en supposant que $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l<L<l$. (Voir fig. p. 79.)

Rép. $T_A=T_B=\dfrac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ;$

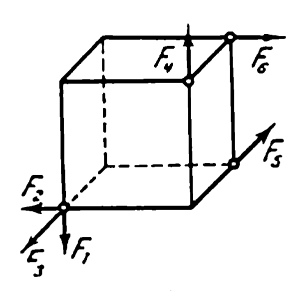
$$T_C=\frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ.$$

§ 7. Réduction d'un système de forces à son expression la plus simple

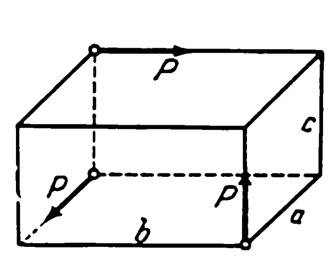
7.1. Des forces F_1, ..., F_6 sont appliquées aux sommets d'un cube suivant les directions des arêtes (cf.s chéma). Quelles conditions doivent vérifier ces forces pour être en équilibre?

Rép. $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6$.

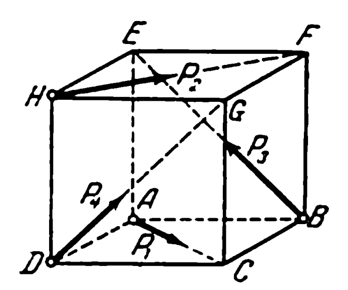
7.2. Trois forces égales P agissent suivant les trois arêtes non parallèles et non concourantes d'un parallélépipède rectangle. Quelle relation



Probl. 7.1



Probl. 7.2



Probl. 7.3

doivent vérifier les longueurs des arêtes a, b et c pour que l'on puisse réduire ce système à une résultante?

Rép. $a=b-c$.

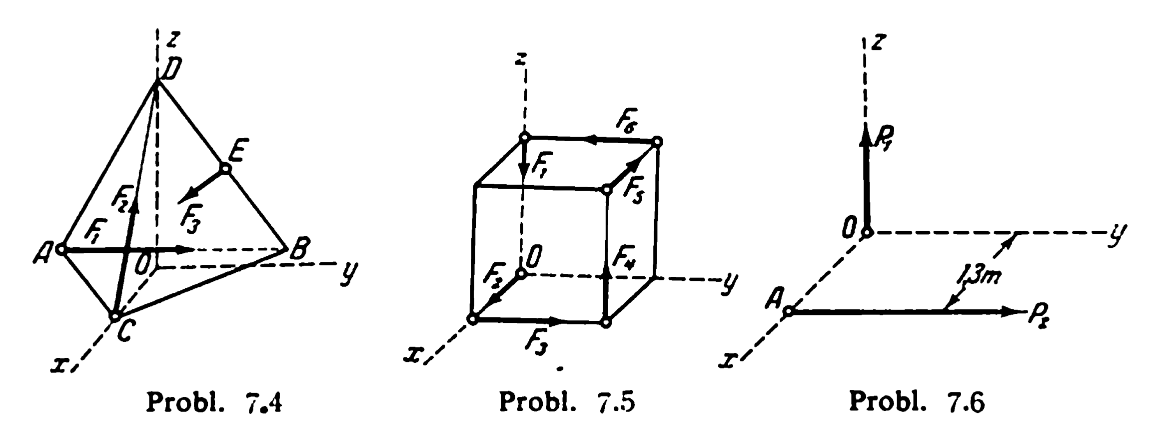
7.3. Quatre forces égales $P_1=P_2=P_3=P_4=P$ sont appliquées aux quatre sommets A, H, B et D d'un cube; la force P_1 étant dirigée suivant AC, P_2 suivant HF, P_3 suivant BE et P_4 suivant DG. Réduire ce système à sa forme la plus simple.

Rép. La résultante est égale à $2P$ et se dirige suivant la diagonale DG.

7.4. Trois forces F_1, F_2 et F_3 sont appliquées à un tétraèdre régulier $ABCD$ dont les arêtes sont égales à a; F_1 est dirigée suivant l'arête AB, F_2 suivant l'arête CD et F_3 au point médian E de l'arête BD. Les valeurs des forces F_1 et F_2 sont arbitraires; les projections de la force F_3 sur les axes x, y et z sont :

$$+F_2\frac{5\sqrt{3}}{6};\quad -\frac{F_2}{2};\quad -F_2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Peut-on réduire ce système de forces à une seule résultante? Si oui, trouver alors les coordonnées x et z du point d'intersection de la ligne d'action de la résultante avec le plan Oxz.



Probl. 7.4 Probl. 7.5 Probl. 7.6

Rép. Ce système est réductible car les projections du vecteur principal et du moment principal sur les axes de coordonnées sont:

$$V_x=F_2\frac{\sqrt{3}}{2};\quad V_y=F_1-0{,}5F_2;\quad V_z=0;$$

$$M_x=0;\quad M_y=0;\quad M_z=-a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1+F_2).$$

Les coordonnées sont: $x=\frac{M_z}{V_y}=-\frac{a\sqrt{3}\,(F_1+F_2)}{6F_1-3F_2}$; $z=0$.

7.5. Six forces égales de 2 N chacune sont appliquées aux sommets d'un cube dont la longueur des arêtes est égale à 5 cm (cf. schéma). Réduire ce système à sa forme la plus simple.

Rép. Le système se réduit à un couple de moment $20\sqrt{3}$ Ncm qui forme avec les axes de coordonnées les angles : $\cos\alpha=-\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

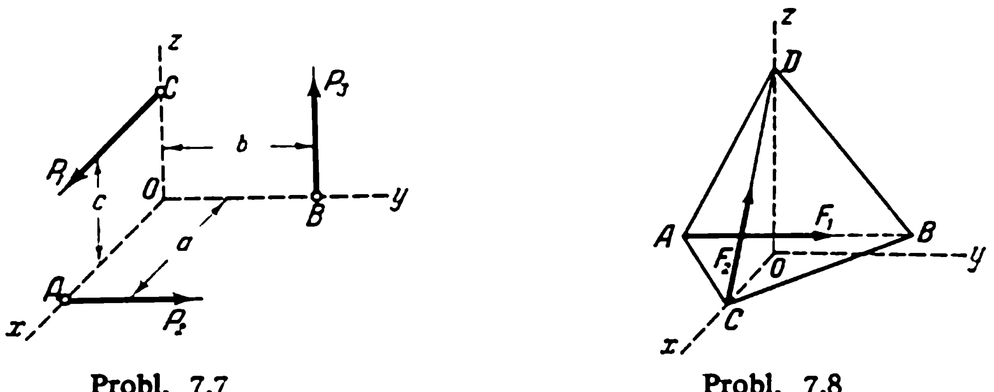
7.6. Réduire le système de forces : $P_1=8$ kgf, dirigée suivant Oz; $P_2=12$ kgf, dirigée parallèment à Oy (cf. schéma, où $OA=1{,}3$ m), à la forme canonique en déterminant la grandeur du vecteur principal V de toutes les forces et la grandeur de leur moment principal M par rapport à un point arbitraire pris sur l'axe central hélicoïdal. Trouver les angles α, β et

γ que forme l'axe central hélicoïdal avec les axes de coordonnées, ainsi que les coordonnées x et y de son point de rencontre avec le plan Oxy.

Rép. $V = 14{,}4$ kgf; $M = 8{,}65$ kgfm; $\alpha = 90°$;

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}; \quad \gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}; \quad x = 0{,}9 \text{ m}; \quad y = 0.$$

7.7. Trois forces P_1, P_2 et P_3 se trouvent dans les plans de coordonnées et sont parallèles aux axes de coordonnées, mais peuvent être dirigées dans l'un ou l'autre sens. Leurs points d'application A, B et C sont situés à des



Probl. 7.7 Probl. 7.8

distances données a, b et c de l'origine. Quelle condition doivent vérifier les grandeurs de ces forces pour qu'elles se réduisent à une résultante? Quelle condition doivent vérifier les grandeurs de ces forces pour qu'il existe un axe central hélicoïdal passant par l'origine des coordonnées?

Rép. $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$; $\quad \frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$.

Dans la première réponse P_1, P_2 et P_3 sont les valeurs algébriques des forces.

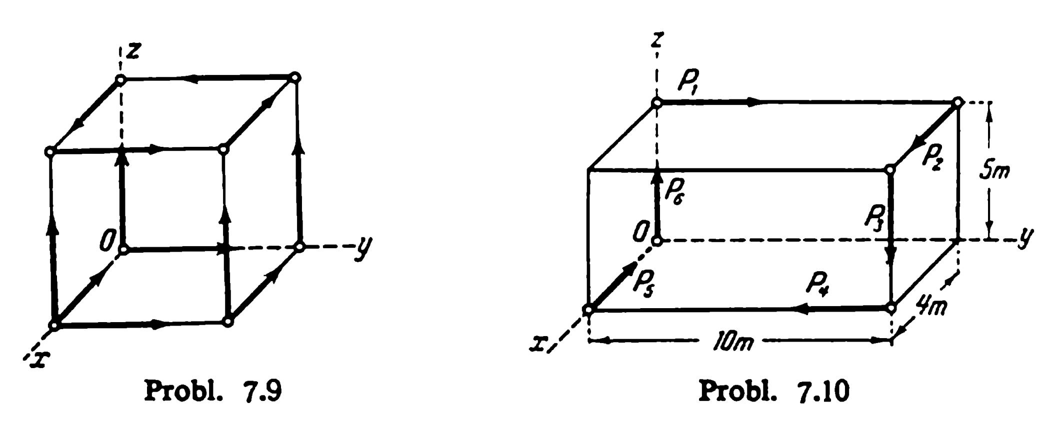
7.8. Deux forces F_1 et F_2 sont appliquées à un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes a, F_1 étant dirigée suivant l'arête AB et F_2 suivant l'arête CD. Trouver les coordcnnées x et y du point d'intersection de l'axe central hélicoïdal avec le plan Oxy.

Rép. $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\frac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}$; $\quad y = -\frac{a}{2}\,\frac{F_1F_2}{F_1^2 + F_2^2}$.

7.9. Douze forces égales P agissent suivant les arêtes a d'un cube (cf. schéma). Réduire ce système à la forme canonique et déterminer les coordonnées x et y du point d'intersection de l'axe central hélicoïdal avec le plan Oxy.

Rép. $V = 2P\sqrt{6}$; $\quad M = \frac{2}{3}Pa\sqrt{6}$;

$$\cos\alpha = -\cos\beta = -\frac{1}{2}\cos\gamma = -\frac{1}{6}\sqrt{6}; \quad x = y = \frac{2}{3}a.$$



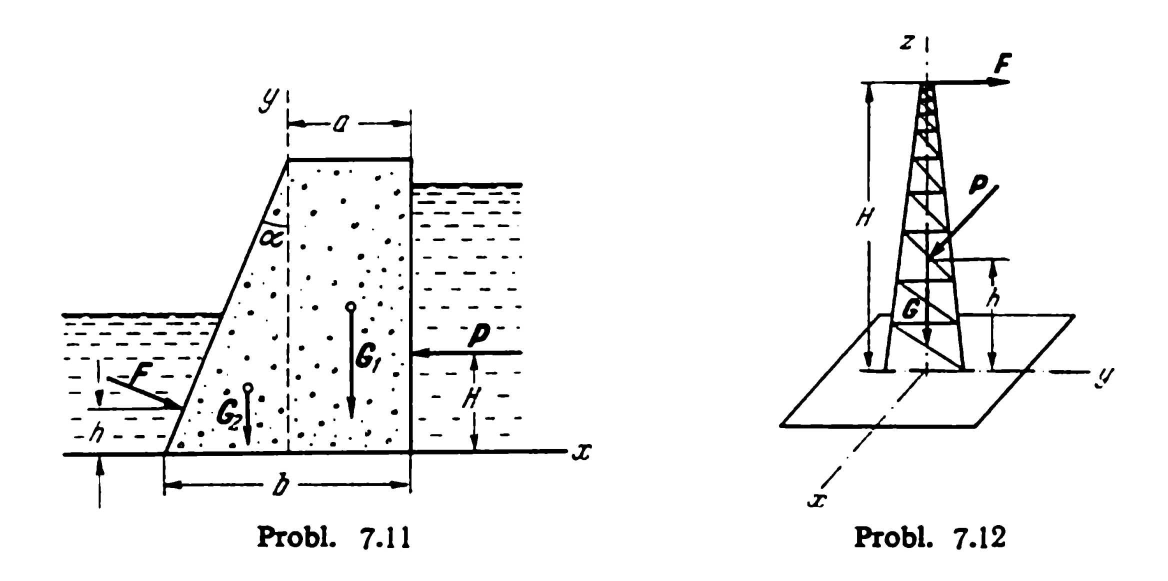
Probl. 7.9 Probl. 7.10

7.10. Six forces (cf. schéma) : $P_1=4$ N, $P_2=6$ N, $P_3=3$ N, $P_4=2$ N, $P_5=6$ N, $P_6=8$ N agissent suivant les arêtes d'un parallélépipède rectangle de longueurs respectivement égales à 10, 4 et 5 m. Réduire ce système à la forme canonique et déterminer les coordonnées x et y du point d'intersection de l'axe central hélicoïdal avec le plan Oxy.

Rép. $V=5{,}4$ N; $M=47{,}5$ Nm; $\cos\alpha=0$; $\cos\beta=0{,}37$; $\cos\gamma=0{,}93$;

$x=-11{,}9$ m; $y=-10$ m.

7.11. Les résultantes $P=8\,000$ t et $F=5\,200$ t des forces de pression de l'eau sur un barrage sont appliquées dans le plan médian vertical perpendiculairement aux faces correspondantes à des distances $H=4$ m et $h=2{,}4$ m de la base. Le poids $G_1=12\,000$ t de la partie rectangulaire du barrage est



Probl. 7.11 Probl. 7.12

appliqué en son centre, et le poids $G_2=6\,000$ t de sa partie triangulaire à une distance d'un tiers de la longueur de la base inférieure de la section triangulaire à partir de la face verticale de cette section. La largeur du barrage à sa base $b=10$ m, à sa partie supérieure $a=5$ m; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{5}{12}$. Dé-

terminer la résultante des forces de réactions réparties au sol sur lequel est fondé le barrage.

Rép. $R_x=3\,200$ t; $R_y=20\,000$ t; l'équation de la ligne d'action de la résultante : $125x-20y+53=0$.

7.12. Le poids d'un mât de radiodiffusion avec son fondement en béton $G=14$ t. Le mât est soumis à la force de tension de l'antenne $F=2$ t et à la résultante des forces de pression du vent $P=5$ t; les deux forces sont horizontales et sont situées dans des plans orthogonaux; $H=15$ m, $h=6$ m. Déterminer la réaction résultante du sol dans lequel est posé le fondement du mât (voir fig. p. 83).

Rép. Les forces de réaction du sol se réduisent à un dynam gauche comprenant la force $V=15$ t dirigée suivant l'axe central

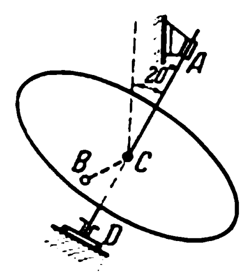
$$\frac{-30+14y+2z}{5}=\frac{30-5z-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}$$

vers le haut et un couple de moment $M=6$ tm. L'axe du dynam coupe le plan du fondement au point $x=2{,}2$ m, $y=2$ m, $z=0$.

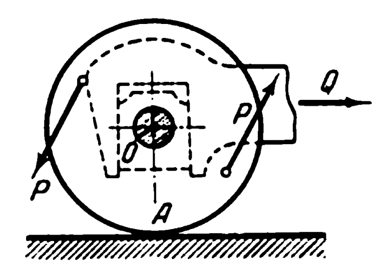
§ 8. Equilibre d'un système arbitraire de forces

8.1. Un corps de 400 kgf est fixé au point B d'une aire circulaire inclinée pouvant tourner autour de l'axe ACD incliné sous un angle de 20° par rapport à la verticale. Déterminer le couple de rotation créé par le poids du corps sachant que le rayon $CB=3$ m est horizontal à l'instant donné.

Rép. 410 kgf m.



Probl. 8.1



Probl. 8.3

8.2. Un moulin à vent possède 4 ailes inclinées de 15° = arc sin 0,259 par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de rotation; la résultante des forces de pression du vent sur chaque aile de 100 kgf est dirigée suivant la perpendiculaire au plan de l'aile et est appliquée en un point situé à 3 m de l'axe de rotation. Trouver le moment de rotation.

Rép. 311 kgfm.

8.3. Un moteur électrique placé sur l'axe O de la roue d'un wagon de tramway tend à faire tourner l'axe dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Sachant que la valeur du moment du couple de rotation

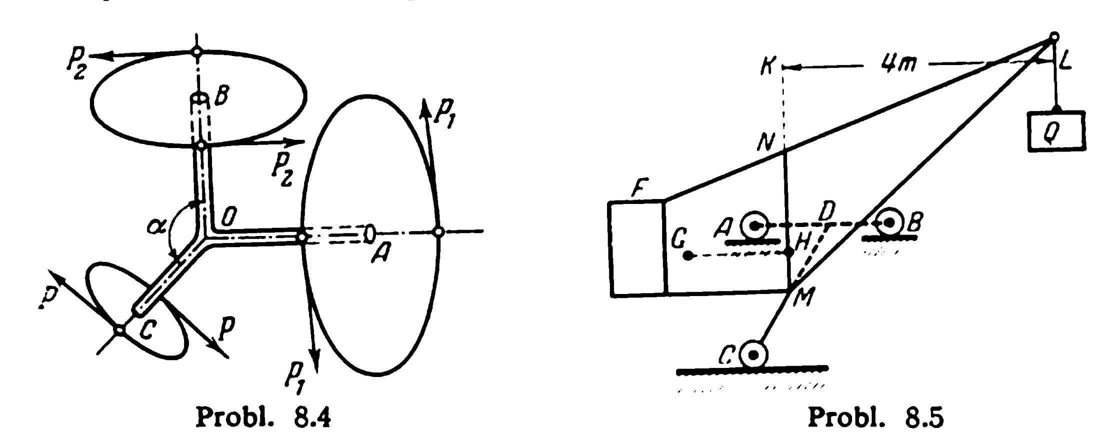
(P, P) est de 600 kgfm et que le rayon de la roue est de 60 cm, déterminer la traction Q en supposant que la roue est posée sur des rails horizontaux.

On trouve d'abord la somme des forces de frottement entre les roues et les rails en calculant les moments des forces par rapport à l'axe O. Ensuite nous projetons toutes les forces appliquées à la roue sur la direction horizontale.

Rép. $Q=1$ t.

8.4. Des couples sont appliqués aux périphéries de trois disques : A de rayon de 15 cm, B de rayon de 10 cm, C de rayon de 5 cm; les valeurs des forces formant ces couples sont respectivement égales à $P_1=10$ N, $P_2=20$ N et P. Les axes OA, OB et OC sont situés dans un même plan; l'angle $\widehat{AOB}$ est droit. Déterminer la valeur de la force P et l'angle $\widehat{BOC}=\alpha$ pour que le système de trois disques, étant complètement libre, reste en équilibre.

Rép. $P=50$ N; $\alpha=\text{arc tg}\,(-0{,}75)=143°10'$.



Probl. 8.4 Probl. 8.5

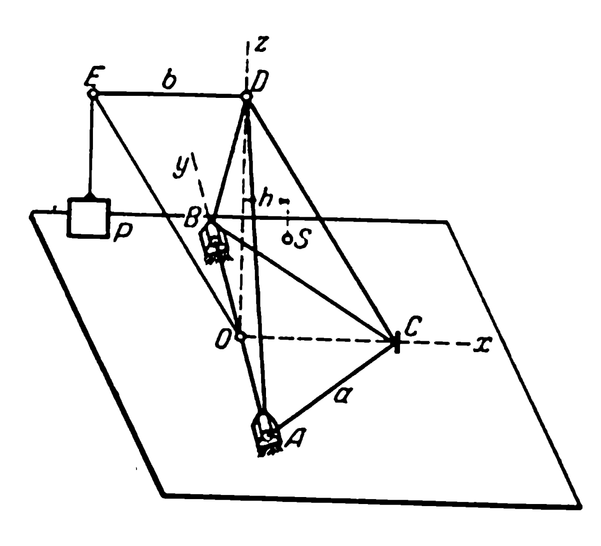
8.5. Une grue est posée sur un chariot tricycle ABC. Les dimensions de la grue sont connues : $AD=DB=1$ m, $CD=1{,}5$ m, $CM=1$ m, $KL=$ $=4$ m. La grue est équilibrée par le contrepoids F. Le poids de la grue avec le contrepoids est égal à $P=10$ t et se trouve appliqué au point G situé dans le plan $LMNF$ à une distance $GH=0{,}5$ m à l'axe de la grue MN; la charge levée $Q=3$ t. Trouver la pression des roues sur les rails pour la position de la grue telle que son plan LMN soit parallèle à AB.

Rép. $N_A=\frac{5}{6}$ t ; $N_B=7\frac{5}{6}$ t ; $N_C=4\frac{1}{3}$ t.

8.6. Une grue provisoire est composée d'une pyramide dont la base horizontale forme un triangle équilatéral ABC, et la face verticale forme un triangle isocèle ADB; l'axe vertical de la grue autour duquel peut tourner la flèche OE supportant la charge P est articulé aux points O et D. La base ABC est fixée à la fondation par des paliers A et B et le boulon vertical C. Déterminer les réactions des appuis lorsque la flèche est dans le plan de symétrie de la grue; la charge $P=1$ 200 kgf, le poids de la grue

$Q=600$ kgf, la distance de son centre de gravité S à l'axe OD $h=1$ m, $a=$ $=4$ m, $b=4$ m.

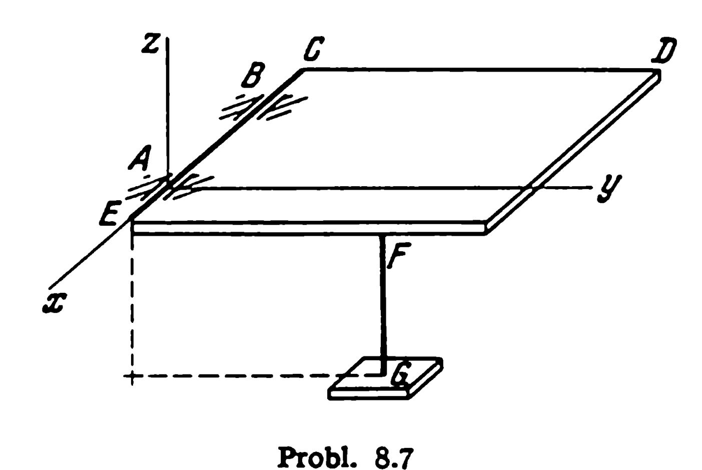
Rép. $Z_A=Z_B=1\,506$ kgf; $Z_C=-1\,212$ kgf; $X_A=X_B=0$.



Probl. 8.6

8.7. Le couvercle de la trappe d'éclairage d'une machine est retenu en position horizontale par le montant FG butant contre le couvercle au point F à une distance $EF=1{,}5$ m à l'axe du couvercle. Le poids du couvercle $P=180$ kgf; sa longueur $CD=2{,}3$ m, sa largeur $CE=0{,}75$ m; les distances des gonds A et B aux bords du couvercle sont $AE=BC=0{,}15$ m. Trouver les réactions des gonds A et B et l'effort S dans le montant FG.

Rép. $Z_A=-94$ kgf; $Z_B=136$ kgf; $Y_A=Y_B=0$; $S=138$ kgf.

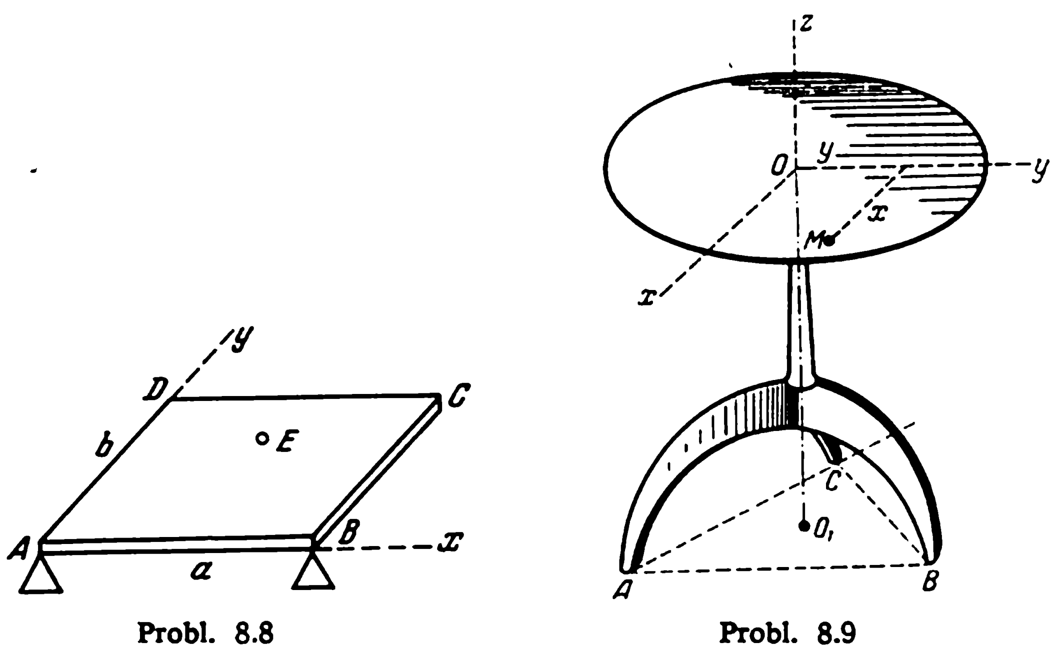


Probl. 8.7

8.8. Une plaque homogène rectangulaire $ABCD$ de poids P est posée horizontalement sur trois appuis ponctuels dont deux sont situés aux sommets A et B du rectangle et le troisième en un point quelconque E. Les pressions sur les appuis A et B sont respectivement $\frac{P}{4}$ et $\frac{P}{5}$.

Trouver la pression N_E sur l'appui au point E et les coordonnées de ce point sachant que les longueurs des côtés de la plaque sont a et b.

Rép. $N_E=\frac{11}{20}P$; $x=\frac{6}{11}a$; $y=\frac{10}{11}b$.



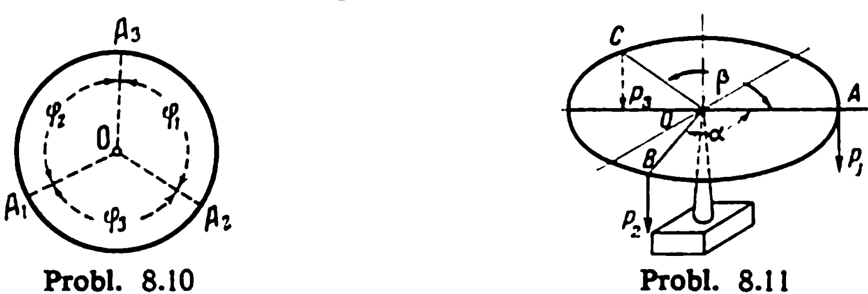
Probl. 8.8 Probl. 8.9

8.9. Une table repose sur trois pieds dont les extrémités A, B et C forment un triangle équilatéral de côté a. Le poids de la table est P, son centre de gravité est situé sur la verticale zOO_1 passant par le centre O_1 du triangle ABC. Une charge p est posée sur la table au point M de coordonnées x et y; l'axe Oy est parallèle à AB. Déterminer la pression de chaque pied sur le plancher.

Rép. $N_A=\frac{P+p}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-y\right)\frac{p}{a}$; $N_B=\frac{P+p}{3}+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\frac{p}{a}$;

$N_C=\frac{P+p}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{x}{a}p$.

8.10. Une table circulaire repose sur trois pieds A_1, A_2 et A_3; une charge est placée en son centre O. Quelle condition doivent vérifier les angles



Probl. 8.10 Probl. 8.11

au centre φ_1, φ_2 et φ_3 pour que les pressions des pieds A_1, A_2 et A_3 soient dans le rapport de $1:2:\sqrt{3}$?

On calcule les moments des forces par rapport à deux des rayons OA_1, OA_2 et OA_3.

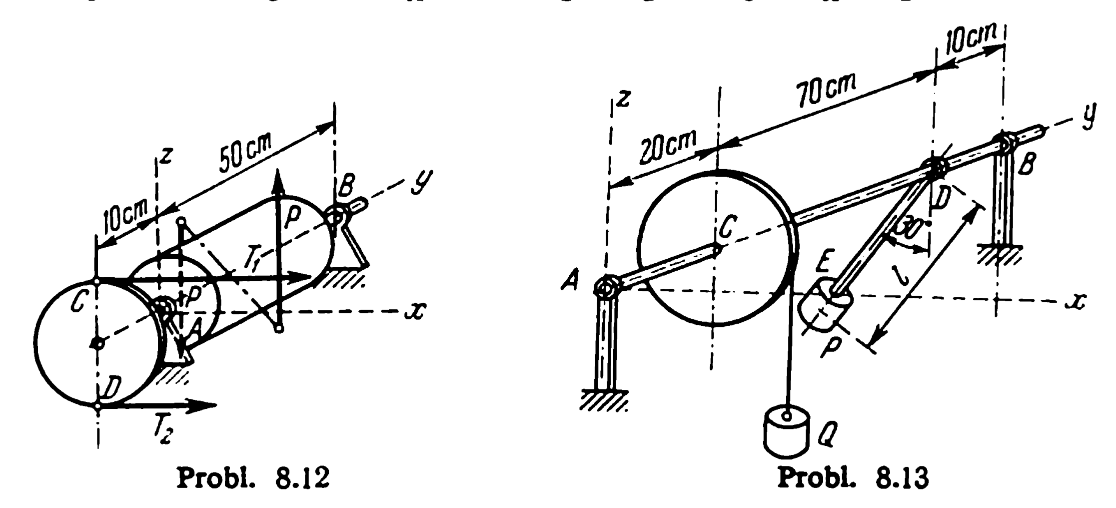
Rép. $\varphi_1=150°$; $\varphi_2=90°$; $\varphi_3=120°$.

8.11. Une plaque circulaire horizontale de poids négligeable s'appuie en son centre sur la pointe O. Sans perturber l'équilibre on applique sur la circonférence de la plaque les charges: $P_1=1{,}5$ kgf, $P_2=1$ kgf, $P_3=2$ kgf. Déterminer les angles α et β (voir fig. p. 87).

Rép. $\alpha=75°30'$; $\beta=151°$.

8.12. Le rayon de la poulie à transmission par courroies CD d'une dynamo est égal à 10 cm; les dimensions de l'arbre AB sont indiquées sur le schéma. La tension de la branche supérieure motrice de la courroie $T_1=10$ kgf, celle de la branche inférieure entraînée $T_2=5$ kgf. Déterminer le moment de rotation M et les réactions des paliers A et B lorsque la rotation est uniforme; négliger les poids des éléments de la machine; (P, P) est le couple formé par les forces de résistance.

Rép. $M=50$ kgf cm; $X_A=-18$ kgf; $X_B=3$ kgf; $Z_A=Z_B=0$.



Probl. 8.12

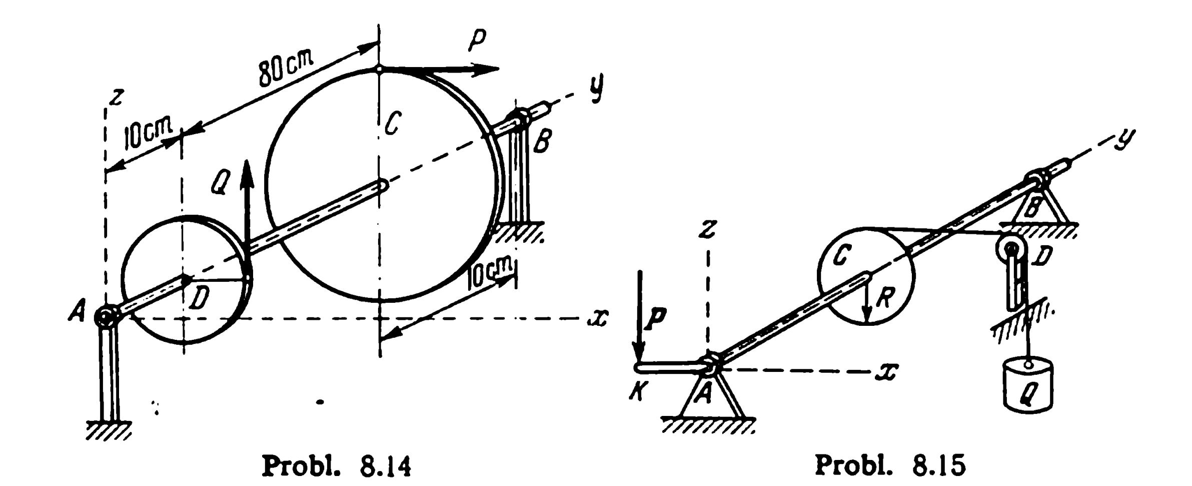
Probl. 8.13

8.13. Un arbre horizontal reposant sur deux paliers A et B est soumis d'un côté au poids du corps $Q=25$ kgf relié par un fil à la poulie C de rayon de 20 cm, et de l'autre au poids du corps $P=100$ kgf fixé sur la barre DE solidaire de l'arbre AB et formant avec celui-ci un angle droit. Les distances $AC=20$ cm, $CD=70$ cm, $BD=10$ cm. A l'état d'équilibre la barre DE est déviée de la verticale sous un angle de 30°. Déterminer la distance l du centre de gravité du corps P à l'axe de l'arbre AB et les réactions des paliers A et B.

Rép. $l=10$ cm; $Z_A=30$ kgf; $Z_B=95$ kgf; $X_A=X_B=0$.

8.14. Une roue dentée C d'un rayon de 1 m et un pignon D d'un rayon de 10 cm sont solidaires d'un arbre horizontal AB. Les autres dimensions sont indiquées sur le schéma. Une force tangentielle horizontale $P=10$ kgf est appliquée à la roue C et une force tangentielle verticale Q au pignon D. Déterminer la force Q et les réactions des paliers A et B à l'état d'équilibre.

Rép. $Q=100$ kgf; $X_A=-1$ kgf; $X_B=-9$ kgf; $Z_A=-90$ kgf; $Z_B=-10$ kgf.

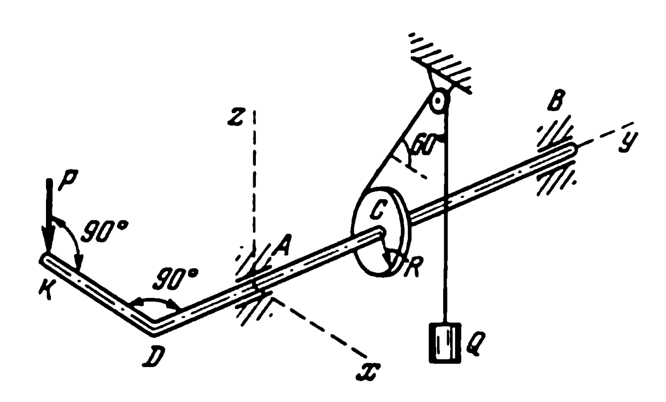


Probl. 8.14 Probl. 8.15

8.15. Un ouvrier soulève uniformément à l'aide d'un treuil une charge $Q=80$ kgf (cf. schéma); le rayon de la poulie $R=5$ cm; la longueur de la manivelle $AK=40$ cm; $AC=CB=50$ cm. Déterminer la pression P sur la manivelle et les pressions de l'axe du treuil sur les appuis A et B lorsque la manivelle AK est horizontale, la force P étant verticale.

Rép. $P=10$ kgf; $X_A=40$ kgf; $Z_A=-10$ kgf; $X_B=40$ kgf; $Z_B=0$.

8.16. On monte uniformément une charge $Q=100$ kgf à l'aide d'un treuil (cf. schéma). Le rayon de la poulie $R=5$ cm. La longueur de la manivelle $KD=40$ cm; $AD=30$ cm; $AC=40$ cm; $CB=60$ cm. La corde quitte



Probl. 8.16

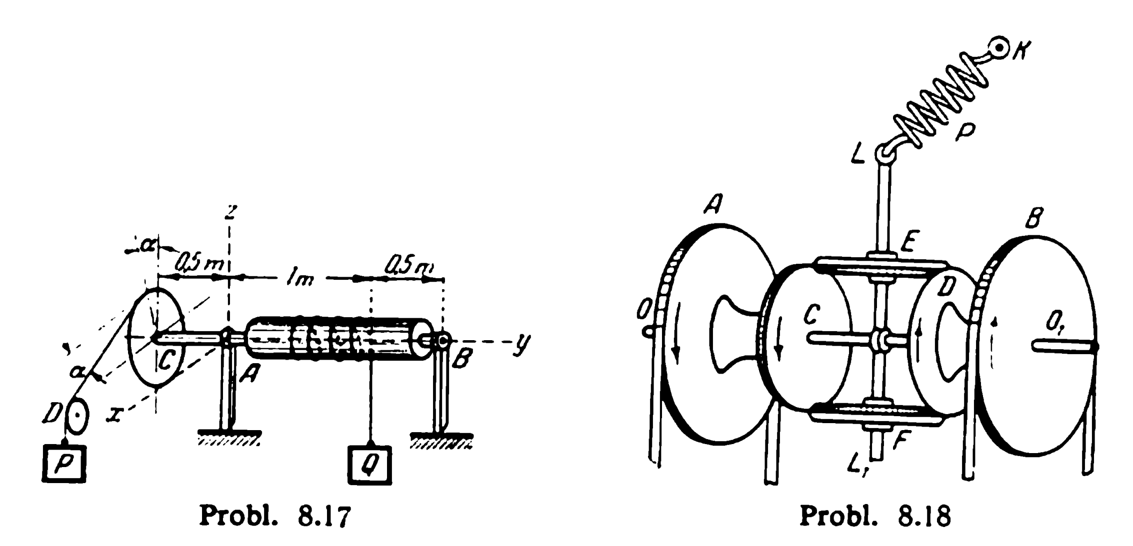
la poulie suivant la tangente formant un angle de 60° avec l'horizontale. Déterminer la pression P sur la manivelle et les réactions des appuis A et B lorsque la manivelle KD est horizontale.

Rép. $P=12{,}5$ kgf; $X_A=-30$ kgf; $Z_A=-35{,}7$ kgf; $X_B=-20$ kgf; $Z_B=-38{,}4$ kgf.

8.17. Une corde supportant la charge Q est enroulée sur l'arbre AB d'un treuil. Le rayon de la poulie C montée sur l'arbre est six fois plus grand que le rayon de l'arbre; les autres dimensions sont indiquées sur le schéma.

La corde qui s'enroule sur la poulie et qui est tendue par la charge $P=6$ kgf quitte la poulie suivant la tangente inclinée sous un angle $\alpha=30°$ par rapport à l'horizontale. Déterminer la valeur de la charge Q pour laquelle le treuil reste en équilibre ainsi que les réactions des paliers A et B; négliger le poids de l'arbre et le frottement dans la poulie D.

Rép. $Q=36$ kgf; $X_A=-6{,}93$ kgf; $Z_A=16$ kgf; $X_B=1{,}73$ kgf; $Z_B=23$ kgf.



Probl. 8.17 Probl. 8.18

8.18. Pour mesurer la force transmise par une poulie à courroies A à la poulie B on se sert d'un dynamomètre (cf. schéma). Les poulies A et B tournent librement sur l'axe fixe OO_1; la poulie A est solidaire de la roue dentée C et la poulie B de la roue dentée D. Ces deux roues dentées s'engrènent avec les roues dentées E et F tournant librement autour de l'axe vertical LL_1. Les diamètres des roues C, D, E, F sont de 20 cm chacun. Le moment de la force qui fait tourner la poulie A est de 1 200 kgf cm et est égal au moment de la force freinant la poulie B. La rotation de l'axe LL_1 autour de l'axe OO_1 est empêchée par une balance dynamométrique à ressort P attachée au point fixe K. Trouver les pressions qu'exercent les roues dentées E et F sur l'axe LL_1, et déterminer l'indication P de la balance, si $LE=50$ cm et la direction de LK est perpendiculaire au plan OLO_1.

Rép. $N_E=N_F=120$ kgf; $P=40$ kgf.

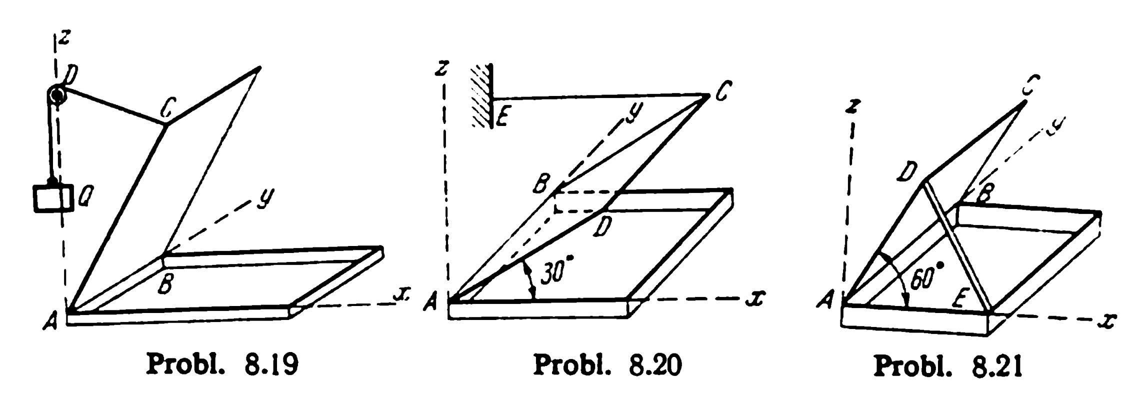
8.19. Un couvercle homogène rectangulaire de poids $P=40$ N est entrouvert, formant un angle de 60° avec l'horizontale, et est retenu dans cette position au moyen du contrepoids Q. Déterminer le poids Q et les réactions des gonds A et B, si la poulie D est fixée sur la verticale passant par A et $AD=AC$. Négliger le frottement dans la poulie D.

Rép. $Q=10{,}4$ N; $X_A=10$ N; $Z_A=17{,}3$ N; $X_B=0$; $Z_B=20$ N.

8.20. Le couvercle homogène rectangulaire $ABCD$ d'une boîte peut tourner sur des gonds aux points A et B autour de l'axe horizontal AB. La corde horizontale CE parallèle à Ax retient le couvercle sous un angle

$DAx=30°$. Déterminer les réactions dans les gonds, si le poids du couvercle est de 2 kgf.

Rép. $X_A=0$; $Z_A=1$ kgf; $X_B=1{,}73$ kgf; $Z_B=1$ kgf.



Probl. 8.19 Probl. 8.20 Probl. 8.21

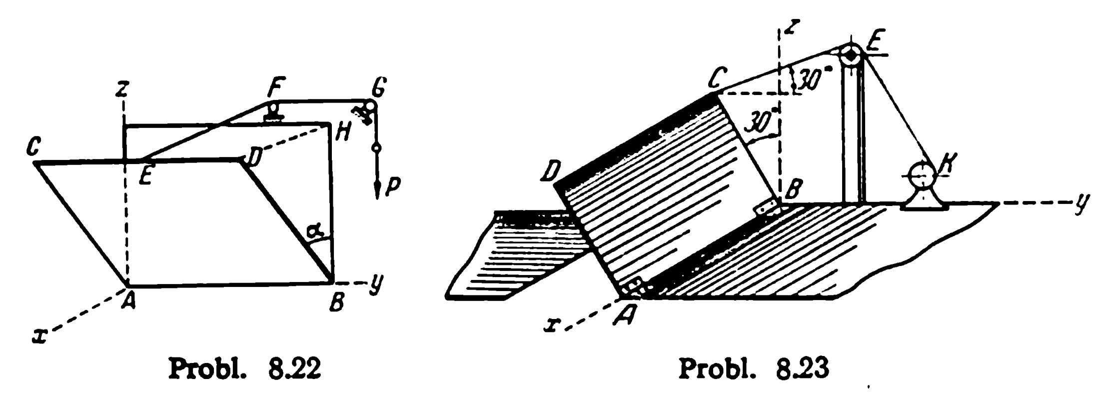
8.21. Le couvercle d'une boîte rectangulaire $ABCD$ est soutenu d'un côté par une baguette DE de poids négligeable. Le couvercle pèse 12 kgf; $AD=AE$; $\widehat{DAE}=60°$.

Déterminer les réactions dans les charnières A et B ainsi que l'effort S dans la baguette.

Rép. $X_A=1{,}73$ kgf; $Z_A=3$ kgf; $X_B=0$; $Z_B=6$ kgf; $S=3{,}45$ kgf.

8.22. Le châssis dormant $ABCD$ de poids $Q=10$ kgf est ouvert sous un angle $\alpha=60°$. Déterminer l'effort P nécessaire pour maintenir le châssis dormant en équilibre et les réactions des charnières A et B étant donné que $BD=BH$, $CE=ED$, et que la corde EF est parallèle à la droite DH.

Rép. $P=5$ kgf; $X_A=X_B=2{,}17$ kgf; $Z_A=Z_B=3{,}75$ kgf.



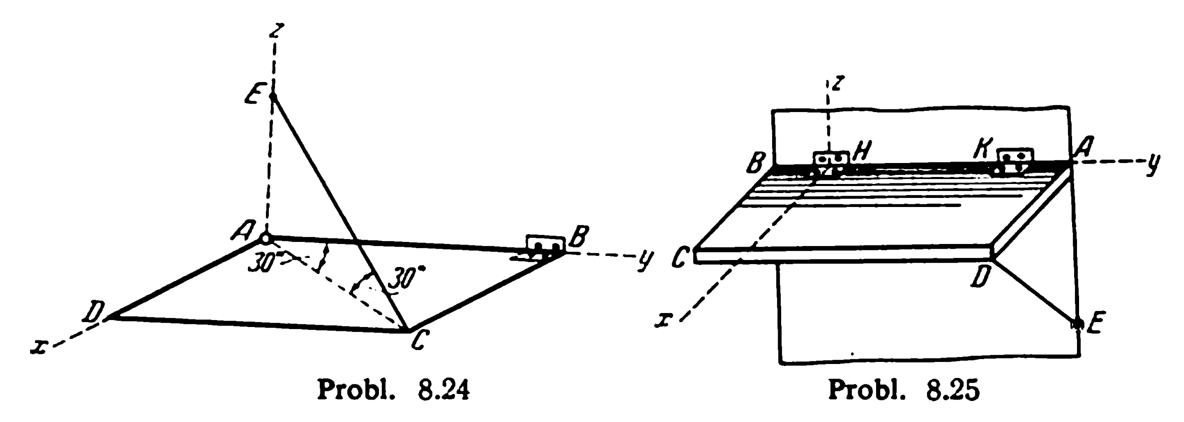
Probl. 8.22 Probl. 8.23

8.23. La partie tournante $ABCD$ d'un pont levis de 1 500 kgf est levée à l'aide d'une chaîne CE passant sur une poulie E et aboutissant à un treuil K. Le point E est situé dans le plan vertical CBy. Déterminer, pour la position indiquée sur le schéma, la tension de la chaîne CE et les réactions aux points A et B. Le centre de gravité de la partie tournante du pont est confondu avec le centre du rectangle $ABCD$.

Rép. $T=375$ kgf; $Y_A=0$; $Z_A=750$ kgf; $Y_B=-325$ kgf; $Z_B=562{,}5$ kgf.

8.24. Un cadre homogène rectangulaire pesant 20 N est fixé au mur à l'aide d'une articulation sphérique A et d'une penture B et se trouve maintenu dans une position horizontale par la corde CE attachée au point C du cadre et au clou E enfoncé dans le mur sur la même verticale que A; $\widehat{ECA}=\widehat{BAC}=30°$. Déterminer la tension de la corde et les réactions des appuis.

Rép. $T=20$ N; $X_A=8{,}66$ N; $Y_A=15$ N; $Z_A=10$ N; $X_B=Z_B=0$.



Probl. 8.24

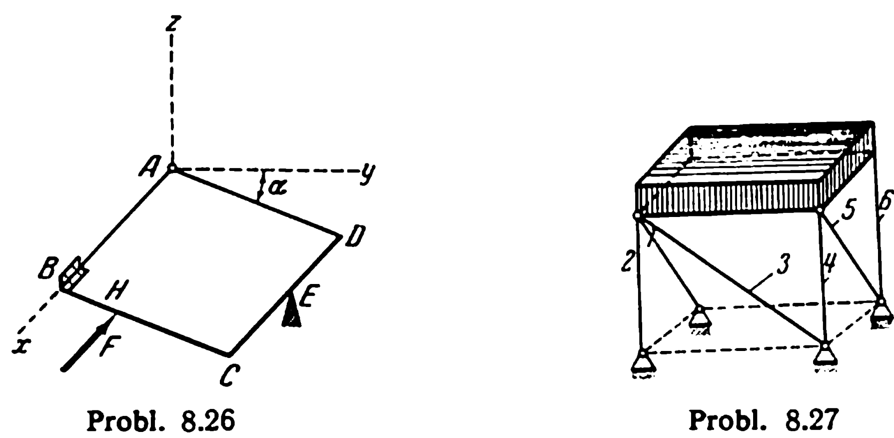
Probl. 8.25

8.25. L'étagère $ABCD$ d'un wagon pouvant tourner autour de l'axe AB est retenue dans la position horizontale par la barre ED de poids négligeable articulée en E au mur vertical BAE. Le poids de la planche avec la charge P qu'elle supporte est de 80 kgf et est appliqué au point d'intersection des diagonales du rectangle $ABCD$. Les dimensions sont les suivantes : $AB=150$ cm; $AD=60$ cm; $AK=BH=25$ cm. La longueur de la barre $ED=75$ cm. Déterminer l'effort S dans la barre ED et les réactions des pentures K et H.

Rép. $S=66\frac{2}{3}$ kgf; $X_K=-66\frac{2}{3}$ kgf; $Z_K=-10$ kgf;

$X_H=13\frac{1}{3}$ kgf; $Z_H=50$ kgf.

8.26. Une plaque carrée homogène $ABCD$ de côté $a=30$ cm et pesant 5 kgf est fixée au point A à l'aide d'une articulation sphérique, et au point



Probl. 8.26

Probl. 8.27

B à l'aide d'une charnière. Le côté AB est horizontal. Au point E la plaque repose sur une pointe. Une force F agit sur la plaque au point H parallèlement au côté AB. Trouver les réactions aux points A, B et E, si $CE=ED$, $BH=10$ cm, $F=10$ kgf; la plaque forme avec le plan horizontal un angle $\alpha=30°$.

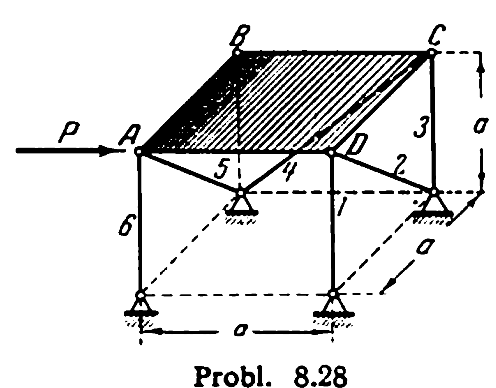
Rép. $X_A=10$ kgf; $Y_A=2{,}35$ kgf; $Z_A=-0{,}11$ kgf; $Y_B=-3{,}43$ kgf; $Z_B=3{,}23$ kgf; $R_E=2{,}17$ kgf.

8.27. Une plaque homogène horizontale de poids P ayant la forme d'un parallélépipède rectangle est fixée au sol par six barres rectilignes. Déterminer les efforts dans ces barres sous le poids de la plaque, si les extrémités des barres sont fixées à la plaque et à des piles fixes par des articulations sphériques.

Rép. $S_1=S_3=S_4=S_5=0$; $S_2=S_6=-\frac{P}{2}$;

8.28. Déterminer les efforts dans les six barres supportant une plaque rectangulaire $ABCD$ soumise à l'action d'une force horizontale P suivant le côté AD. Les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. $S_1=P$; $S_2=-P\sqrt{2}$; $S_3=-P$; $S_4=P\sqrt{2}$; $S_5=P\sqrt{2}$; $S_6=-P$.

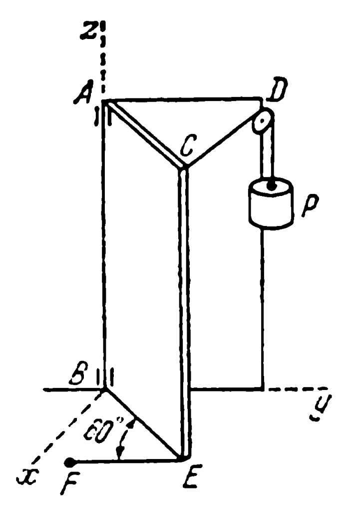


Probl. 8.28

8.29. Une porte rectangulaire d'axe vertical de rotation AB est ouverte selon un angle $\widehat{CAD}=60°$; elle est maintenue dans cette position par deux cordes dont l'une CD passant sur une poulie est tendue par la charge $P=32$ kgf, l'autre EF étant attachée au point F du plancher. La porte pèse 64 kgf; sa largeur $AC=AD=18$ dm; la hauteur $AB=24$ dm. Déterminer la tension T de la corde EF ainsi que les réactions de la charnière au point A et de la crapaudine au point B. Négliger le frottement dans la poulie. (Voir fig. p. 94.)

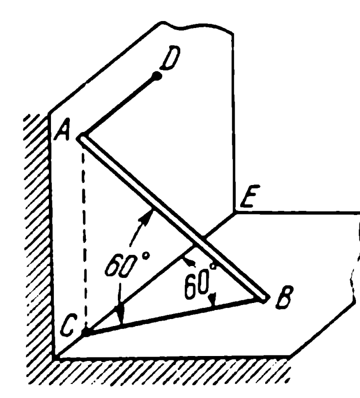
Rép. $T=32$ kgf; $X_A=6{,}9$ kgf; $Y_A=-28$ kgf; $X_B=20{,}8$ kgf; $Y_B=44$ kgf; $Z_B=64$ kgf.

8.30. La barre AB est retenue en position oblique par deux cordes horizontales AD et BC; elle prend appui en A sur le mur vertical où se trouve





Probl. 8.29

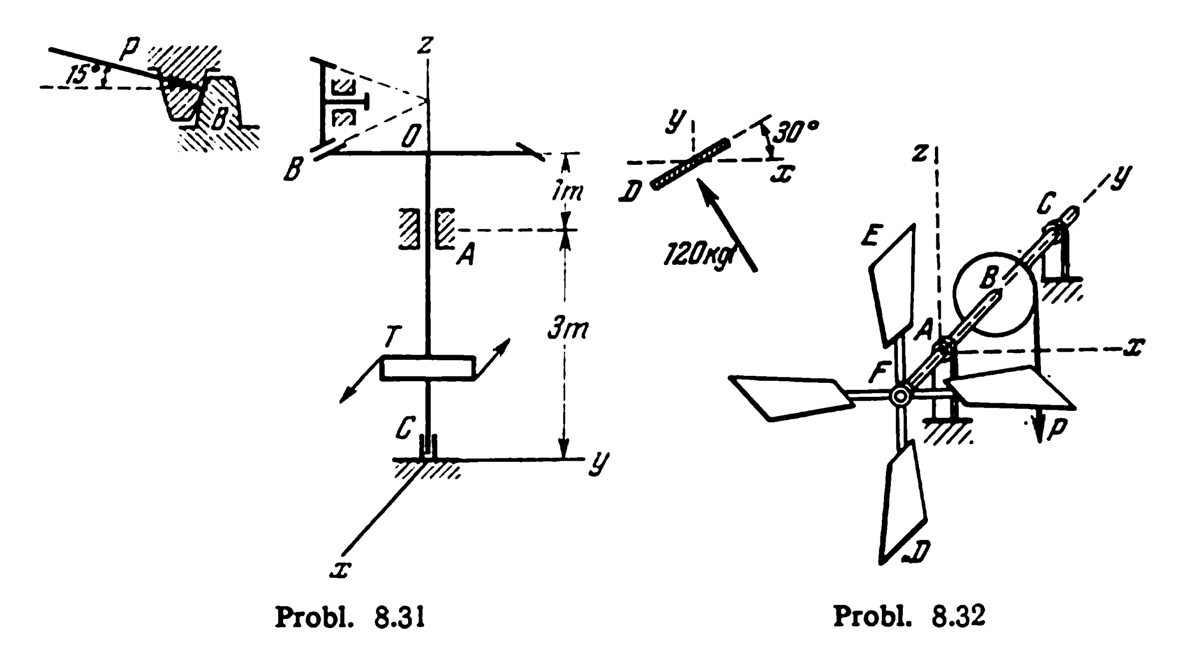


Probl. 8.30

le point D et en B sur un plancher horizontal. Les points A et C sont situés sur la même verticale. La barre pèse 8 N. Négliger le frottement aux points A et B. Vérifier si la barre peut rester en équilibre, et déterminer les tensions T_A et T_B des cordes et les réactions des plans d'appui, si $\widehat{ABC}=\widehat{BCE}=60°$.

Rép. $T_A=1{,}15$ N; $T_B=2{,}3$ N; $R_A=2$ N; $R_B=8$ N.

8.31. Un couple faisant tourner la turbine hydraulique T de moment 120 kgfm est équilibré par la pression sur la dent B d'un pignon conique OB et par les réactions des appuis. La pression sur la dent est perpendiculaire au rayon $OB=0{,}6$ m et forme avec l'horizontale un angle $\alpha=15°=$ $=\text{arc tg}\ 0{,}268$. Déterminer les réactions de la crapaudine C et du palier A,



Probl. 8.31

Probl. 8.32

si le poids total de la turbine, de l'arbre et de la roue est de 1,2 t et est dirigé suivant l'axe OC, la distance $AC=3$ m, $AO=1$ m.

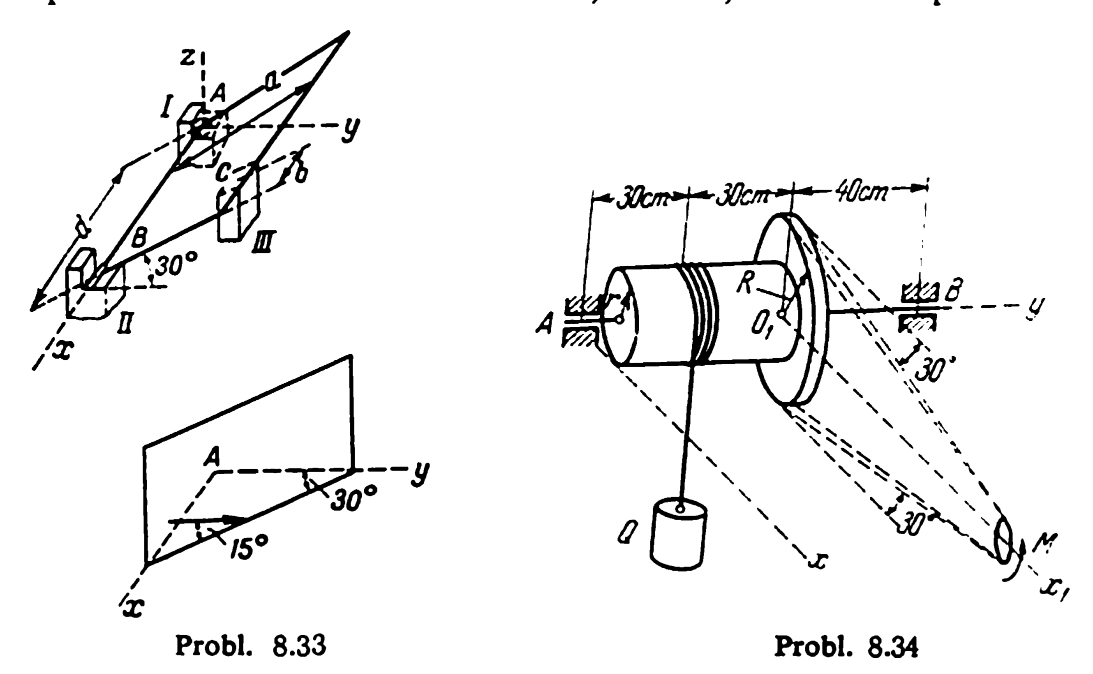
Rép. $X_A = 266\,\frac{2}{3}$ kgf; $X_C = -66\,\frac{2}{3}$ kgf; $Y_A = -Y_C = 10{,}7$ kgf; $Z_C = 1\,254$ kgf.

8.32. Un moulin à vent d'axe horizontal AC possède quatre ailes disposées symétriquement dont les plans forment avec le plan vertical perpendiculaire à l'axe AC des angles de 30°. La résultante des forces de pression du vent sur chaque aile vaut 120 kgf (la projection de l'aile D sur le plan xy est indiquée séparément), elle est appliquée perpendiculairement à son plan à 2 m de l'axe. L'axe du moteur s'appuie en A sur un palier et en C sur une crapaudine, il est retenu à l'état de repos par une pression verticale P sur la dent de la roue B, engendrée par un pignon non indiqué sur le schéma. Le rayon de la roue B est égal à 1,2 m: les distances : $BC=0{,}5$ m; $AB=1$ m, $AF=0{,}5$ m. Déterminer la pression P et les réactions des appuis dans les deux cas suivants: 1) lorsque le vent agit sur les quatre ailes et 2) lorsque l'aile D est enlevée et que la ligne DE est verticale.

Rép. 1) $P=400$ kgf; $Z_A=133\frac{1}{3}$ kgf; $Y_C=-416$ kgf; $Z_C=266\,\frac{2}{3}$ kgf; $X_A=X_C=0$.

2) $P=300$ kgf; $X_A=80$ kgf; $Z_A=-38{,}6$ kgf; $X_C=-20$ kgf; $Y_C=-312$ kgf; $Z_C=339$ kgf.

8.33. Un avant-toit homogène rectangulaire dont le côté AB est horizontal est incliné sur l'horizontale sous un angle de 30°. L'avant-toit est attaché au poteau I par une articulation sphérique A et au poteau II par une charnière B; en outre, il repose au point C sur la surface inclinée du poteau III. Les dimensions: $a=3$ m, $d=6$ m, $b=2$ m. Le poids d'un



Probl. 8.33

Probl. 8.34

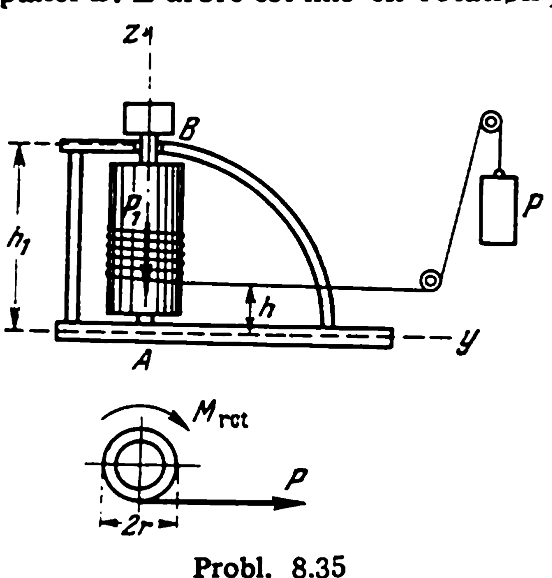
mètre carré de l'avant-toit est de 20 kgf. L'avant-toit est soumis à la pression uniformément répartie d'un vent d'intensité de 50 kgf pour 1 m^2 de la surface de l'avant-toit; cette pression est dirigée sous un angle de 15° par rapport à l'horizontale et agit dans le plan vertical qui forme avec l'axe Ay un angle de 30°. Déterminer les réactions des appuis.

Rép. $R_C=445$ kgf; $X_A=435$ kgf; $Y_A=-208$ kgf; $Z_A=222$ kgf; $Y_B=-323$ kgf; $Z_B=-14{,}8$ kgf.

8.34. Un moteur M soulève uniformément une charge Q à l'aide d'une chaîne sans fin. Déterminer les réactions des appuis A et B et la tension de la chaîne, si les branches de la chaîne forment avec l'horizontale des angles de 30° (l'axe O_1x_1 est parallèle à l'axe Ax) et que $r=10$ cm, $R=$ $=20$ cm, $Q=1$ t; la tension de la branche motrice de la chaîne est deux fois plus grande que celle de la branche entraînée, autrement dit $T_1=2T_2$. (Voir fig. p. 95.)

Rép. $T_1=1$ t; $T_2=0{,}5$ t; $X_A=-0{,}52$ t; $Z_A=0{,}6$ t; $X_B=-0{,}78$ t; $Z_B=0{,}15$ t.

8.35. Pour soulever un mouton de sonnette de poids $P=300$ kgf on se sert d'un cabestan dont l'arbre, de rayon $r=20$ cm, s'appuie en son extrémité inférieure sur une crapaudine A et en son extrémité supérieure sur le palier B. L'arbre est mis en rotation par un moteur. Trouver le moment de rotation du moteur (le couple moteur), nécessaire pour lever uniformément le mouton de sonnette, ainsi que les réactions dans la crapaudine A et le palier B, sachant que $h_1=1$ m, $h=30$ cm et que le poids des parties tournantes du cabestan est $P_1=100$ kgf.

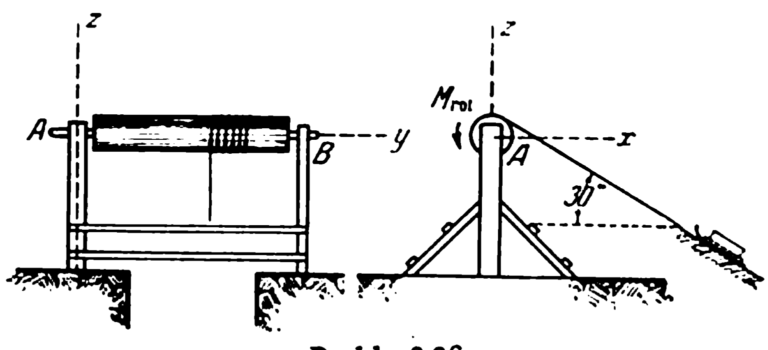


Probl. 8.35

Rép. $M_{rot}=60$ kgfm; $X_A=0$; $Y_A=-210$ kgf; $Z_A=100$ kgf; $X_B=0$; $Y_B=-90$ kgf.

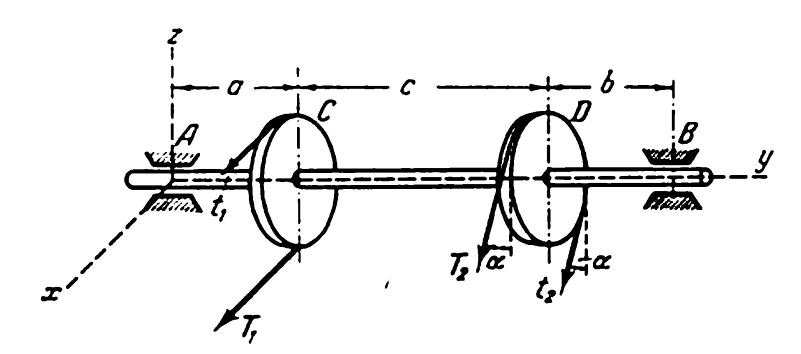
8.36. Un treuil servant à élever les roches d'une fouille oblique comporte un arbre dont le rayon est de 0,25 m et la longueur de 1,5 m. L'arbre, de 80 kgf, est mis en rotation par un moteur (non indiqué sur le schéma). Déterminer les réactions des appuis et le moment de rotation du moteur M_{rot} sachant que la charge pèse 400 kgf, que le coefficient de frottement entre la charge et la surface de la fouille est de 0,5, que l'angle d'inclinaison de la fouille sur l'horizontale vaut 30°, le câble quittant l'arbre à 50 cm du palier B et la rotation étant uniforme.

Rép. $M_{rot}=93$ kgfm; $X_A=-108$ kgf; $Z_A=102$ kgf; $X_B=-215$ kgf; $Z_B=165$ kgf.



Probl. 8.36

8.37. Un arbre de transmission horizontal supportant deux poulies à courroies C et D peut tourner sur les paliers A et B. Les rayons des poulies sont: $r_C=20$ cm, $r_D=25$ cm; les distances des poulies aux paliers $a=b=$ $=50$ cm et entre les poulies $c=100$ cm. Les tensions T_1 et t_1 des brins de la courroie passant sur la poulie C sont horizontales, $T_1=2t_1=500$ kgf;



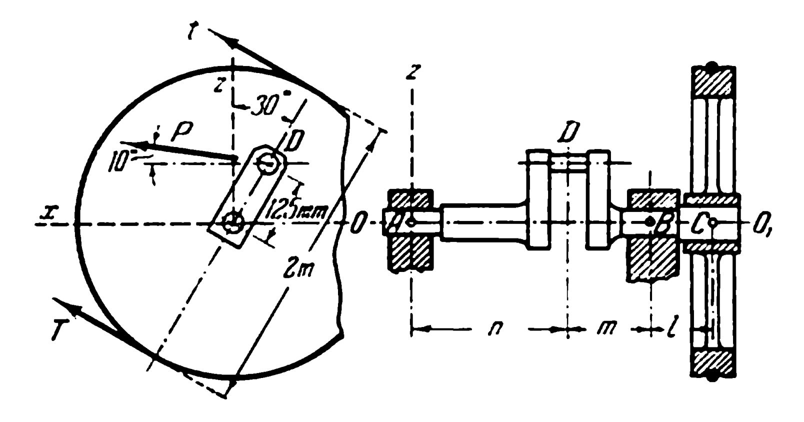
Probl. 8.37

les tensions des brins de la courroie passant sur la poulie D forment avec la verticale un angle $\alpha=30°$ et valent T_2 et t_2, $T_2=2t_2$. Déterminer les tensions T_2 et t_2 à l'état d'équilibre et les réactions des paliers dues aux tensions dans les courroies.

Rép. $T_2=400$ kgf; $t_2=200$ kgf; $X_A=-637{,}5$ kgf;

$Z_A=130$ kgf; $X_B=-412{,}5$ kgf; $Z_B=390$ kgf.

8.38. La pression de la bielle d'un moteur est concentrée au milieu D de la gorge du vilebrequin et vaut $P=2\,000$ kgf; elle est dirigée sous un angle de 10° par rapport à l'horizontale; le plan ODO_1, passant par les axes de l'arbre OO_1 et de la gorge D, forme avec la verticale un angle de 30°. L'effort est transmis du volant au starter à l'aide d'une corde dont les brins sont parallèles et inclinés sur l'horizontale sous un angle de 30°. L'action de la force P est équilibrée par les tensions T et t dans les brins de la corde et par les réactions des paliers A et B. Le poids du volant est de 1 300 kgf, son diamètre $d=2$ m, la somme des tensions dans les brins de la corde $T+t=750$ kgf, les distances indiquées sur le schéma sont : du point D à



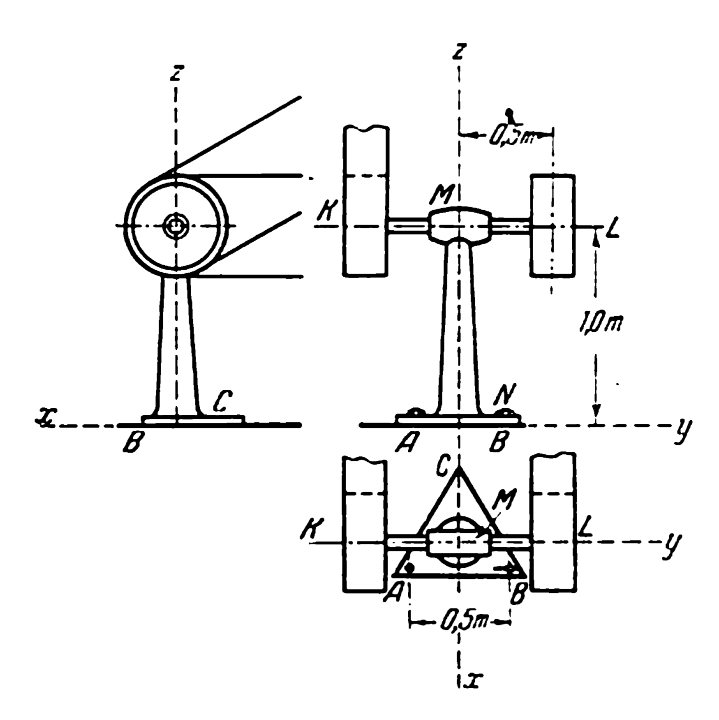
Probl. 8.38

l'axe OO_1 $r=125$ mm, $l=250$ mm, $m=300$ mm, $n=450$ mm. Déterminer les réactions des paliers A et B et les tensions t et T.

Rép. $X_A=-571$ kgf; $Z_A=-447$ kgf; $X_B=-2\ 048$ kgf;

$Z_B=1\ 025$ kgf; $T=492$ kgf; $t=258$ kgf.

8.39. Pour transmettre la rotation d'un arbre à un autre arbre parallèle on monte deux poulies auxiliaires identiques solidaires de l'axe horizontal KL. L'axe peut tourner dans le palier M fixé sur la colonne MN. La base triangulaire de cette colonne est fixée au plancher par deux boulons A et B et s'y appuie au point C. Le boulon A passe par une ouverture ronde dans la base, le boulon B passe par une ouverture oblongue dont la di-



Probl. 8.39

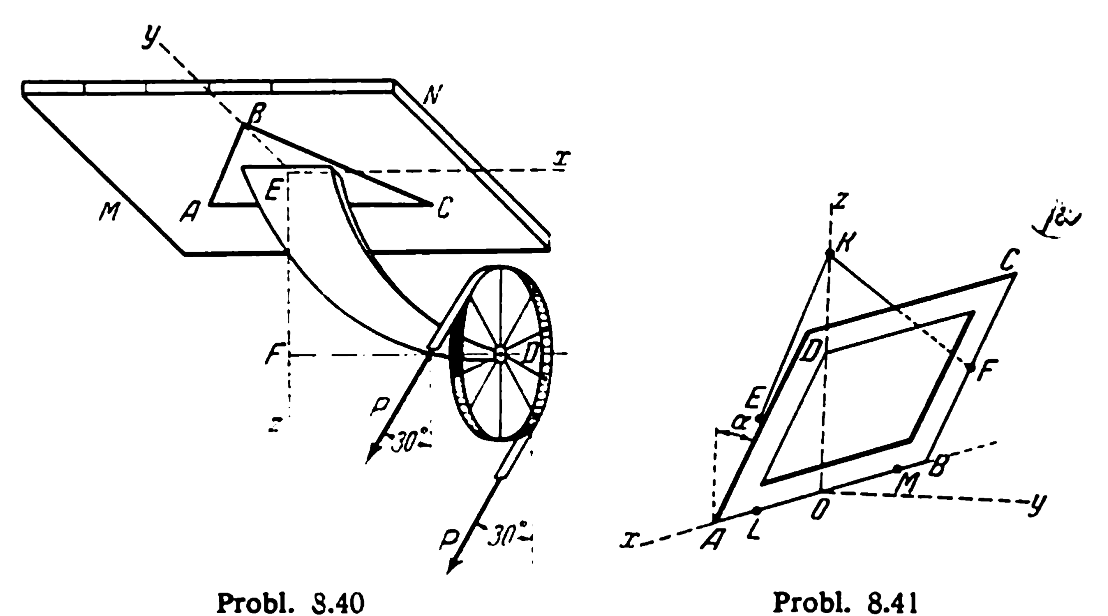
rection coïncide avec la ligne AB. L'axe de la colonne passe par le centre du triangle ABC.

Déterminer les réactions aux points A, B et C, si la distance de l'axe KL au plancher est de 1 m, les distances des plans médians des poulies à l'axe de la colonne étant de 0,5 m et si les tensions dans les quatre brins des courroies sont égales et valent 60 kgf. Les brins de la courroie droite sont horizontaux, ceux de la courroie gauche sont inclinés sur l'horizontale sous un angle de 30°. Le poids total de l'installation est de 300 kgf et s'applique en un point situé sur l'axe de la colonne. On a: $AB=BC=CA=50$ cm.

Rép. $X_A=96$ kgf; $Y_A=0$; $Z_A=-239$ kgf; $X_B=128$ kgf; $Z_B=-119$ kgf; $Z_C=597$ kgf.

8.40. La suspension de la poulie à courroie D est fixée à un plafond horizontal lisse MN par des paliers aux points A et C et y bute au point B. Ces points sont situés aux sommets d'un triangle équilatéral ABC dont le côté est de 30 cm. La position du centre de la poulie D est définie par la verticale $EF=40$ cm abaissée du centre E du triangle ABC, et par l'horizontale $FD=50$ cm parallèle au côté AC. Le plan de la poulie est perpendiculaire à la droite FD. La tension P de chacun des brins de la courroie vaut 120 kgf et forme un angle de 30° par rapport à la verticale. Déterminer les réactions des appuis A, B et C. Négliger le poids des parties de la construction.

Rép. $Y_A=140$ kgf; $Z_A=185$ kgf; $Z_B=115$ kgf; $Y_C=-260$ kgf; $Z_C=-508$ kgf.



Probl. 8.40

Probl. 8.41

8.41. Le tableau de forme rectangulaire $ABCD$ est suspendu à un mur vertical par un fil EKF passant sur un crochet K de manière que le bord AB soit horizontal; E et F sont les points médians des côtés AD et BC. Le tableau est incliné au mur sous un angle $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$ et s'appuie sur

deux clous L et M. $AL=MB$. Les dimensions du tableau sont: $AB=60$ cm, $AD=75$ cm; son poids de 20 kgf est appliqué au centre du rectangle $ABCD$; la longueur du fil est de 85 cm. Déterminer la tension T du fil et la pression sur les clous L et M.

Rép. $T=8{,}5$ kgf; $Y_L=Y_M=-4{,}5$ kgf; $Z_L=Z_M=-6$ kgf.

8.42. Une barre homogène AA_1 est suspendue par deux fils inextensibles de longueur l fixés aux points B et B_1. La longueur de la barre $AA_1=$ $=BB_1=2r$, son poids est P. La barre a subi une rotation d'angle α autour de l'axe vertical. Déterminer le moment M du couple que l'on doit appliquer à la barre pour la maintenir en équilibre, ainsi que la tension T des fils.

Rép. $M=\dfrac{Pr^2\sin\alpha}{\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$; $T=\dfrac{lP}{2\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

Probl. 8.42

Probl. 8.43

8.43. Un bunker ayant la forme d'un prisme triangulaire est fixé à son fondement par six barres. Déterminer les efforts dans les barres dus au poids du bunker chargé $G=30$ t et à la pression du vent sur la face avant inclinée dont l'intensité $q=50$ kg/m². Les dimensions du bunker sont: $a=4$ m, $b=12$ m, $h=8$ m.

Rép. $S_1=-7{,}49$ t; $S_2=-2{,}33$ t; $S_3=-4{,}82$ t;

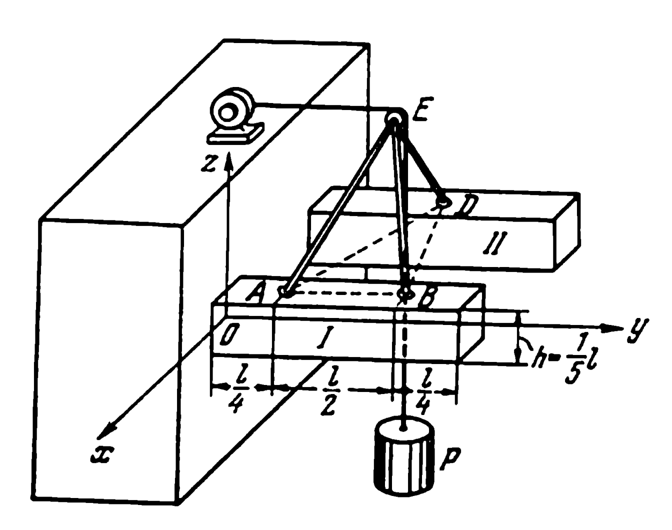
$S_4=-3{,}37$ t; $S_5=3{,}37$ t; $S_6=-14{,}4$ t.

8.44. Un trépied $ABDE$ ayant la forme d'une pyramide régulière de hauteur $\frac{l}{2}$ est articulé à deux poutres consoles. Un câble passant sur une

poulie fixée au sommet E du trépied soulève uniformément à l'aide d'un treuil une charge de poids P. Entre la poulie et le treuil le câble est parallèle aux consoles. Déterminer les réactions de l'encastrement de la première console en négligeant son poids et le poids du trépied.

Rép. $X_0 = -\frac{\sqrt{3}}{9} P$; $Y_0 = P$; $Z_0 = \frac{2}{3} P$; $M_x = -\frac{4}{15} Pl$;

$M_y = -\frac{\sqrt{3}}{90} Pl$; $M_z = -\frac{\sqrt{3}}{36} Pl$.

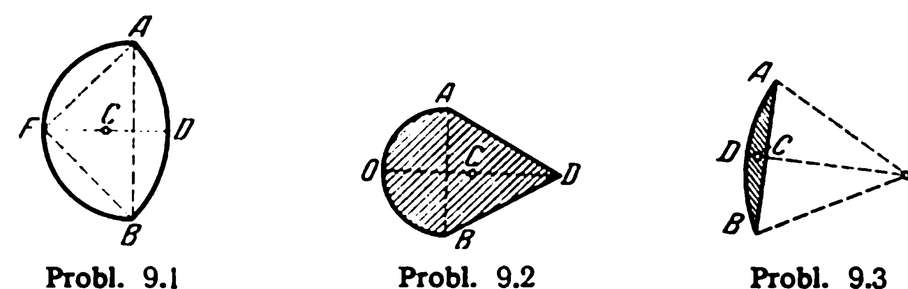


Probl. 8.44

§ 9. Centre de gravité

9.1. Déterminer la position du centre de gravité C du contour de barres homogène $AFBD$ formé par l'arc ADB d'un quart de cercle de rayon $FD = R$ et par l'arc d'un demi-cercle AFB dont la corde AB est son diamètre. Les densités linéiques des barres sont identiques.

Rép. $CF = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}524R$.



Probl. 9.1 Probl. 9.2 Probl. 9.3

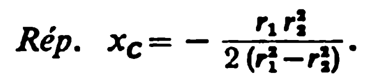
9.2. Déterminer la position du centre de gravité C de l'aire limitée par le demi-cercle AOB de rayon R et par deux droites d'égale longueur AD et DB; $OD = 3R$.

Rép. $OC = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1{,}19R$.

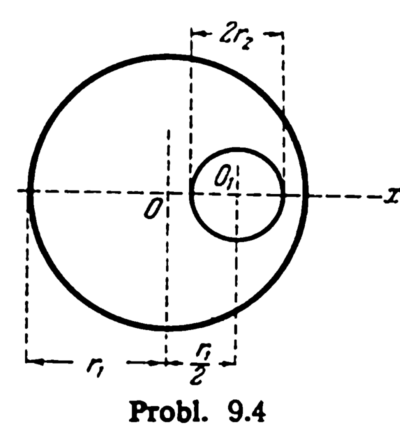
9.3. Trouver le centre de gravité C de l'aire du segment circulaire ADB de rayon $AO=30$ cm, si $\widehat{AOB}=60°$. (voir fig. p. 101)

Rép. $OC=27,7$ cm.

9.4. Déterminer la position du centre de gravité d'un disque homogène ayant une ouverture circulaire. Le rayon du disque est r_1, celui de l'ouverture est r_2, la distance du centre de celle-ci au centre du disque est $\frac{r_1}{2}$.



Rép. $x_C = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.



Probl. 9.4

y
1cm
3cm
x

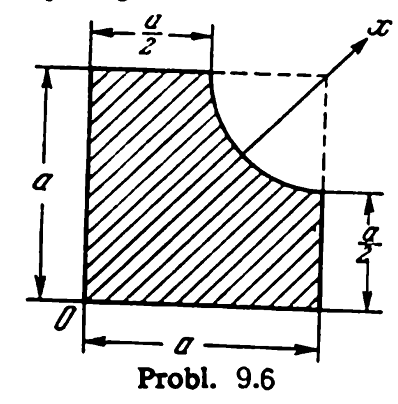
Probl. 9.5

9.5. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du quart de l'anneau (cf. schéma).

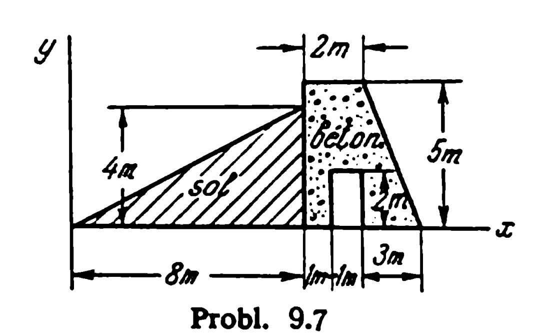
Rép. $x_C=y_C=1,38$ cm.

9.6. Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure (cf. schéma).

Rép. $x_C=0,61a$.



Probl. 9.6



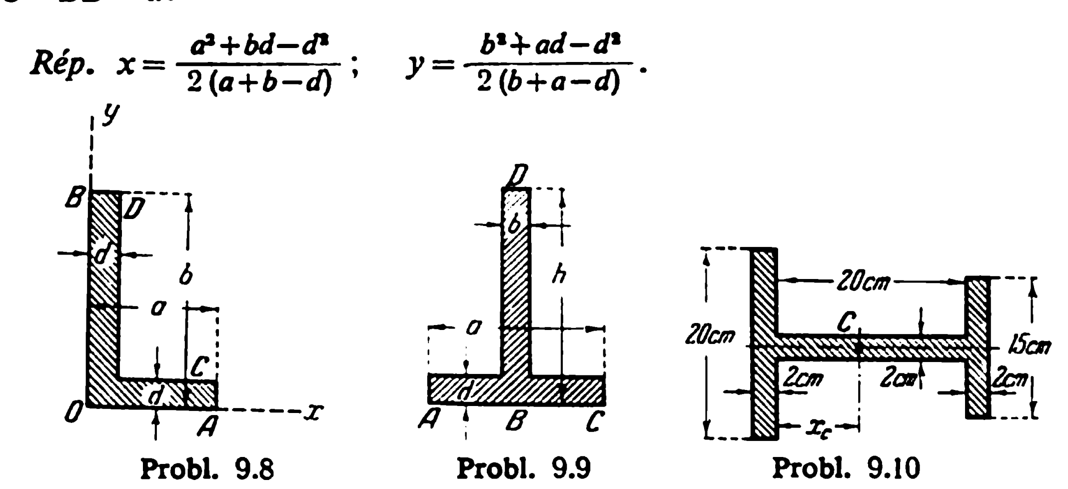
Probl. 9.7

9.7. Trouver le centre de gravité de la section droite du barrage (cf. schéma). Le poids spécifique du béton est de 2,4 t/m³, celui du sol, de 1,6 t/m³.

Rép. $x_C=8,19$ m; $y_C=1,9$ m.

9.8. Trouver les coordonnées du centre de gravité de la section droite d'une cornière à ailes inégales de dimensions: $OA=a$, $OB=b$, $AC=BD=d$.

Rép. $x=\frac{a^2+bd-d^2}{2(a+b-d)}$; $y=\frac{b^2+ad-d^2}{2(b+a-d)}$.



Probl. 9.8 Probl. 9.9 Probl. 9.10

9.9. Trouver la distance du centre de gravité d'une section en T *ABCD* à la semelle *AC* sachant que la hauteur $BD=h$ et que la largeur de la semelle $AC=a$, l'épaisseur de la semelle étant d et celle de l'âme étant b.

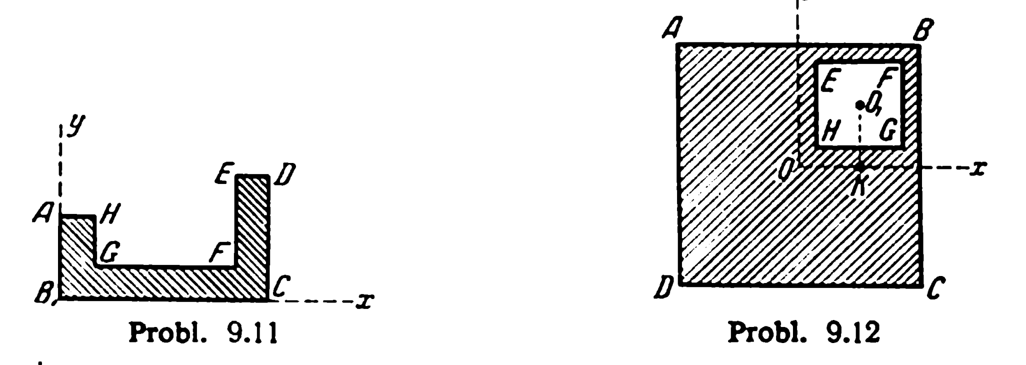
Rép. $\frac{ad^2+bh^2-bd^2}{2(ad+bh-bd)}$.

9.10. Trouver le centre de gravité d'une section en double T dont les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. $x_C=9$ cm.

9.11. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène (cf. schéma) sachant que $AH=2$ cm, $HG=1{,}5$ cm, $AB=3$ cm, $BC=10$ cm, $EF=4$ cm, $ED=2$ cm.

Rép. $x=5\frac{10}{13}$ cm; $y=1\frac{10}{13}$ cm.



Probl. 9.11 Probl. 9.12

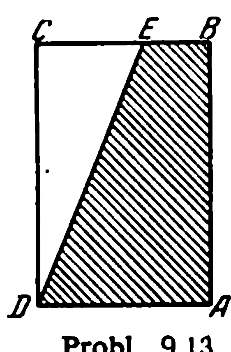
9.12. Une planche carrée homogène *ABCD* de côté $AB=2$ m comporte une ouverture carrée *EFGH* de côtés parallèles à ceux de *ABCD* et égaux à 0,7 m chacun. Déterminer les coordonnées x et y du centre de gravité de la

partie restante de la planche sachant que $OK = O_1K = 0{,}5$ m; O et O_1 sont le centres des carrés et OK et O_1K respectivement parallèles aux côtés des cars rés.

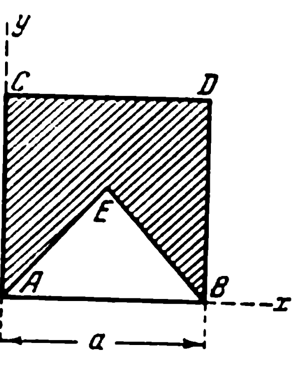
Rép. $x = y = -0{,}07$ m.

9.13. Mener par le sommet D d'un rectangle homogène $ABCD$ une droite DE telle que si l'on suspend le trapèze $ABED$ découpé par cette droite au sommet E, le côté AD, de longueur a, soit horizontal.

Rép. $BE = 0{,}366a$.



Probl. 9.13



Probl. 9.14

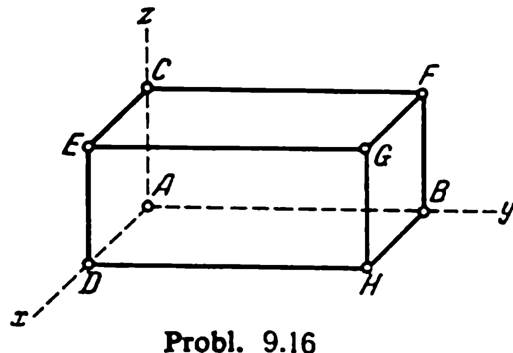
9.14. Trouver à l'intérieur du carré $ABDC$ de côté a, un point E tel qu'il soit le centre de gravité d'une aire obtenue en découpant dans le carré le triangle équilatéral AEB.

Rép. $x_E = \frac{a}{2}$; $y_E = 0{,}634a$.

9.15. Quatre hommes portent une plaque homogène triangulaire. Deux d'entre eux soutiennent la plaque aux sommets, les autres, par les côtés adjacents au troisième sommet. A quelle distance du troisième sommet doivent-ils se tenir pour que chacun des quatre hommes porte le quart du poids total de la plaque?

Rép. Au tiers de la longueur du côté correspondant.

9.16. Déterminer les coordonnées du centre de gravité d'un système de charges disposées aux sommets d'un parallélépipède rectangle dont les



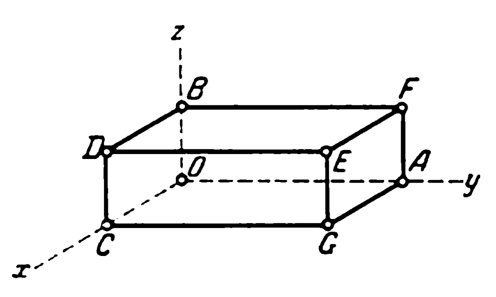
Probl. 9.16

longueurs des arêtes sont respectivement: $AB=20$ cm, $AC=10$ cm, $AD=5$ cm. Les charges aux sommets *A, B, C, D, E, F, G, H* pèsent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 3 kgf.

Rép. $x=3{,}2$ cm; $y=9{,}6$ cm; $z=6$ cm.

9.17. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du contour d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont des tiges homogènes de longueurs: $OA=8$ dm, $OB=4$ dm, $OC=6$ dm. Les tiges pèsent respectivement: $OA=250$ N; *OB, OC* et *CD* 75 N chacune; $CG=200$ N; $AF=125$ N; *AG* et *GE* 50 N chacune; *BD, BF, DE* et *EF* 25 N chacune.

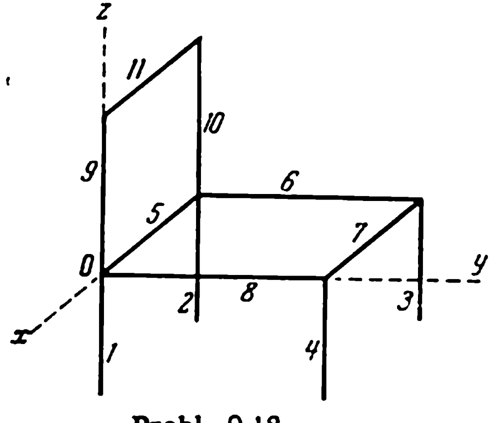
Rép. $x=2{,}625$ dm, $y=4$ dm, $z=1{,}05$ dm.



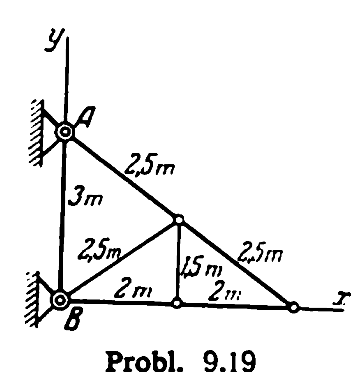
Probl. 9.17

9.18. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un corps ayant la forme d'une chaise comportant des tiges de même longueur et de même poids. La longueur de la tige est de 44 cm.

Rép. $x=-22$ cm, $y=16$ cm, $z=0$.



Probl. 9.18



Probl. 9.19

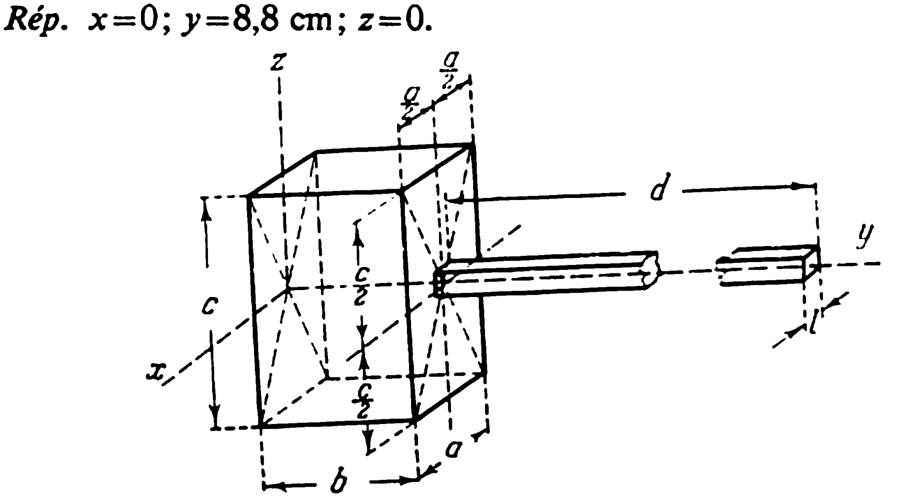
9.19. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'une ferme plane composée de sept éléments homogènes d'égal poids par mètre et dont les longueurs sont indiquées sur le schéma.

Rép. $x=1{,}47$ m; $y=0{,}94$ m.

9.20. Trouver les coordonnées du centre de gravité d'un marteau composé d'un parallélépipède rectangle et d'un manche de section droite carrée.

Les dimensions sont: $a=10$ cm, $b=8$ cm, $c=18$ cm, $d=40$ cm, $l=3$ cm.

Rép. $x=0$; $y=8{,}8$ cm; $z=0$.



Probl. 9.20

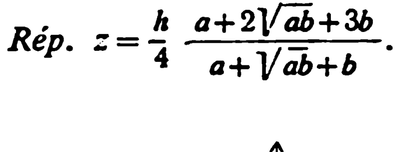
9.21. La coque d'un croiseur léger pèse 1 900 t. Le centre de gravité de la coque est situé au-dessus de la quille à la hauteur $y_1=6$ m suivant la verticale. Après la mise à l'eau on y installe les principaux moteurs et les chaudières. Les moteurs pèsent 450 t et l'ordonnée de leur centre de gravité $y_2=3$ m. Les chaudières pèsent 500 t et l'ordonnée de leur centre de gravité $y_3=4{,}6$ m. Déterminer l'ordonnée y_C du centre de gravité global de la coque, des moteurs et des chaudières.

Rép. $y_C=5{,}28$ m.

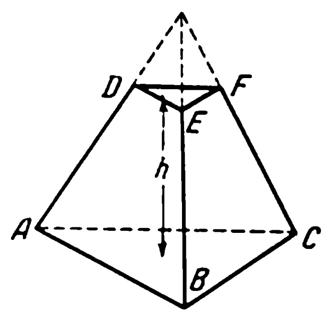
9.22. Si l'on déplace une charge de 30 t sur une distance de 60 m de la proue à la poupe d'un navire jaugeant 4 500 t, de combien se déplacera le centre de gravité du système navire-charge?

Rép. De 0,4 m.

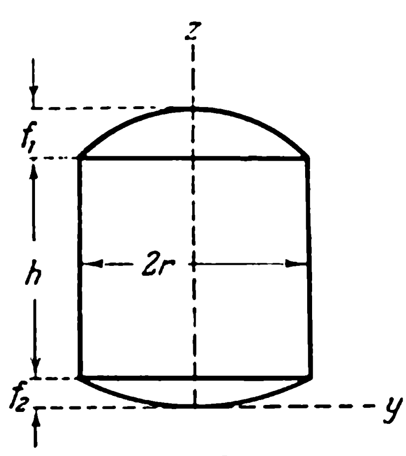
9.23. Etant données l'aire $ABC=a$, l'aire $DEF=b$ d'un tronc de tétraèdre homogène $ABCDEF$ dont les bases sont parallèles et distantes de h, trouver la distance z de son centre de gravité à la base ABC.



Rép. $z=\frac{h}{4}\,\frac{a+2\sqrt{ab}+3b}{a+\sqrt{ab}+b}$.



Probl. 9.23



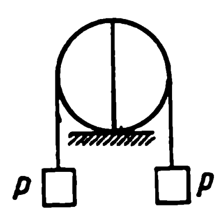
Probl. 9.24

9.24. La coque d'une mine ancrée sous-marine a la forme d'un cylindre de fonds sphériques concaves. Le rayon du cylindre est $r=0{,}4$ m, sa hauteur $h=2r$; les hauteurs des segments sphériques sont respectivement: $f_1=0{,}5r$ et $f_2=0{,}2r$. Trouver le centre de gravité de la surface de la coque de la mine.

Rép. $x_C=y_C=0$; $z_C=1{,}267r=0{,}507$ m.

9.25. Les deux moitiés d'un cylindre circulaire homogène sont réunies par un fil passant sur le cylindre et dont les extrémités supportent des poids de P kgf chacune. Le cylindre pèse Q kgf. Le plan de contact des deux moitiés du cylindre est vertical. Déterminer la plus petite valeur du poids P pour laquelle les deux moitiés du cylindre seront en repos sur un plan horizontal.

Rép. $P=\frac{2}{3}\frac{Q}{\pi}$ kgf.

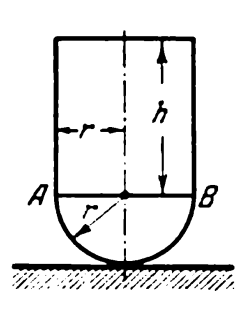


Probl. 9.25

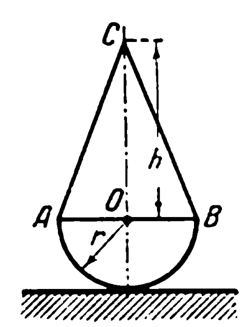
9.26. Trouver la hauteur limite h du cylindre pour laquelle l'équilibre d'un corps formé par ce cylindre et une demi-sphère de même densité et de même rayon r devient instable. Le corps repose sur un plan horizontal lisse par sa surface semi-sphérique.

Le centre de gravité du corps doit être confondu avec le centre de la demi-sphère. La distance du centre de gravité d'une demi-sphère homogène à sa base est $\frac{3}{8}r$.

Rép. $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$.



Probl. 9.26



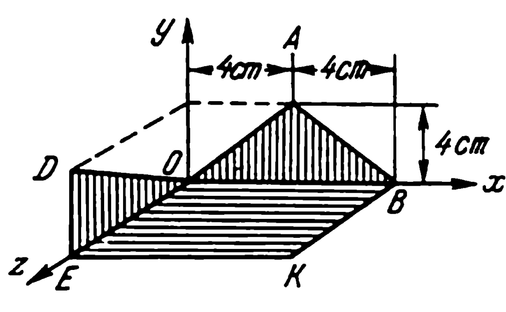
Probl. 9.27

9.27. Trouver la hauteur limite h d'un cône pour laquelle l'équilibre du corps que forme ce cône et une demi-sphère de même densité et de rayon r devient instable dans les conditions du problème précédent.

Rép. $h=r\sqrt{3}$.

9.28. Une feuille mince homogène est pliée de manière à former deux triangles et un carré (cf. schéma); le triangle équilatéral *OAB* est situé dans le plan *xy*, le triangle rectangle *ODE* dans le plan *yz* (le point *E* étant le sommet de l'angle droit) et le carré *OBKE* dans le plan horizontal. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la feuille pliée.

Rép. $x_C=3{,}33$ cm, $y_C=0{,}444$ cm, $z_C=3{,}55$ cm.



Probl. 9.28

DEUXIÈME PARTIE

Cinématique

CHAPITRE III

CINÉMATIQUE DU POINT

§ 10. Trajectoire et équations du mouvement du point

10.1. Etant donnée l'équation du mouvement d'un point sur une trajectoire arbitrairement choisie, construire pour des intervalles égaux de temps six positions du point, calculer la distance s sur la trajectoire à partir de l'origine jusqu'à la position terminale du point et le chemin parcouru σ par ce point dans l'intervalle de temps indiqué (s et σ sont évalués en centimètres, t en secondes).

1) $s=5-4t+t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Rép. $s=10$ cm, $\sigma=13$ cm.

2) $s=1+2t-t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 2{,}5$.

Rép. $s=-0{,}25$ cm, $\sigma=3{,}25$ cm.

3) $s=4 \sin 10t$, $\frac{\pi}{20} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{10}$.

Rép. $s=0$, $\sigma=20$ cm.

10.2. Etant données les équations du mouvement d'un point, trouver l'équation de sa trajectoire en coordonnées rectangulaires et indiquer sur le schéma le sens du mouvement.

1) $x=3t-5$, $y=4-2t$.

Rép. La demi-droite $2x+3y-2=0$ issue du point $x=-5$, $y=4$.

2) $x=2t$, $y=8t^2$.

Rép. La branche droite de la parabole $y=2x^2$ issue du point $x=0$, $y=0$.

3) $x=5 \sin 10t$, $y=3 \cos 10t$.

Rép. L'ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ issue du point $x=0$, $y=3$.

4) $x=2-3\cos 5t$, $y=4\sin 5t-1$.

Rép. L'ellipse $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ issue du point $x=-1$, $y=-1$.

5) $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$, $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$.

Rép. La partie supérieure de la branche droite de l'hyperbole $x^2-y^2=1$ issue du point $x=1$, $y=0$.

10.3. Construire la trajectoire du point dont le rayon vecteur varie comme suit ($\boldsymbol{r}_0$ et $\boldsymbol{e}$ sont des vecteurs constants donnés, $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ les vecteurs unités).

1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\cdot\boldsymbol{e}$.

Rép. La demi-droite passant par le point initial $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ parallèlement au vecteur $\boldsymbol{e}$.

2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\cos t\cdot\boldsymbol{e}$.

Rép. Le segment M_0M_1 de la droite passant par le point $M(\boldsymbol{r}_0)$, parallèlement au vecteur $\boldsymbol{e}$. Le point initial est $M_0(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{e})$; l'autre extrémité est $M_1(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{e})$. Lorsque $t\to\infty$ l'extrémité du rayon vecteur passe une infinité de fois par chaque point de la trajectoire.

3) $\boldsymbol{r}=a\cos\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{i}+b\sin\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{j}$.

Rép. Le tronçon de la partie supérieure de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Le point part du sommet gauche de l'ellipse et se rapproche d'une manière monotone de son sommet droit.

10.4. Etant données les équations du mouvement d'un point trouver l'équation de sa trajectoire et la loi du déplacement du point sur la trajectoire; calculer la distance à partir de la position initiale du point:

1) $x=3t^2$, $y=4t^2$.

Rép. La demi-droite $4x-3y=0$; $s=5t^2$.

2) $x=3\sin t$, $y=3\cos t$.

Rép. La circonférence $x^2+y^2=9$; $s=3t$.

3) $x=a\cos^2 t$, $y=a\sin^2 t$.

Rép. Le segment de la droite $x+y-a=0$, $0\leqslant x\leqslant a$; $s=a\sqrt{2}\sin^2 t$.

4) $x=5\cos 5t^2$, $y=5\sin 5t^2$.

Rép. La circonférence $x^2+y^2=25$; $s=25t^2$.

10.5. Un pont roulant se déplace dans l'atelier d'après l'équation $x=t$; un chariot roule sur ce pont dans la direction transversale d'après l'équation $y=1{,}5t$ (x et y sont évaluées en mètres, t en secondes). La chaîne se raccourcit avec la vitesse $v=0{,}5$ m/s. Déterminer la trajectoire du centre de gravité de la charge; dans la position initiale son centre de gravité était dans le plan horizontal Oxy; l'axe vertical Oz est orienté vers le haut.

Rép. La trajectoire est la droite: $y=1{,}5x$; $z=0{,}5x$.

10.6. Le mouvement du point décrivant une figure de Lissajous est donné par les équations $x=3 \sin t$, $y=2\cos 2t$ (t en secondes). Trouver l'équation de la trajectoire, dessiner cette dernière, et indiquer la direction du mouvement du point à divers instants de temps. Indiquer également l'instant t_1 immédiat à l'instant initial du mouvement quand la trajectoire coupe l'axe Ox.

Rép. La partie de la parabole $4x^2+9y=18$, le long de laquelle $|x|\leqslant 3$, $|y|\leqslant 2$; $t_1=\frac{\pi}{4}$ s.

10.7. Dans un système de coordonnées approprié les équations du mouvement de l'électron dans un champ magnétique constant sont données par les égalités

$$x=a\sin kt,\ y=a\cos kt,\ z=vt,$$

où a, k et v sont des constantes qui dépendent de la tension du champ magnétique, de la masse, de la charge et de la vitesse de l'électron. Calculer la trajectoire de l'électron et la loi de son mouvement sur la trajectoire.

Rép. L'électron se déplace suivant une ligne hélicoïdale. Le point initial est $x=0$, $y=a$, $z=0$; le pas de l'hélice $h=\frac{2\pi}{k}v$. La loi du mouvement de l'électron suivant l'hélice est: $s=\sqrt{a^2k^2+v^2}\,t$.

10.8. Les oscillations harmoniques d'un point sont décrites par l'équation $x=a\sin(kt+\varepsilon)$, où $a>0$ est l'amplitude des oscillations, $k>0$ la pulsation et ε ($-\pi\leqslant\varepsilon\leqslant\pi$) la phase initiale.

Déterminer le centre des oscillations a_0, l'amplitude, la pulsation, la période T, la fréquence des oscillations f en hertz et la phase initiale lorsque les équations du mouvement sont (x étant évaluée en centimètres, t en secondes):

Equation du mouvement	Réponse					
	a_0 (cm)	a (cm)	k (s^{-1})	T (s)	f (Hz)	ε
1. $x=-7\cos 12t$	0	7	12	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2. $x=4\sin\frac{\pi t}{20}-3\cos\frac{\pi t}{20}$	0	5	$\frac{\pi}{20}$	40	0,025	$-\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3}{4}$
3. $x=2-4\sin 140t$	2	4	140	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{70}{\pi}$	π
4. $x=6\sin^2 18t$	3	3	36	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{18}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
5. $x=1-4\cos^2\frac{\pi}{60}t$	-1	2	$\frac{\pi}{30}$	60	$\frac{1}{60}$	$-\frac{\pi}{2}$

10.9. Une charge soulevée par un câble élastique oscille d'après l'équation $x=a \sin\left(kt+\frac{3\pi}{2}\right)$, où a est évaluée en centimètres, k en s^{-1}. Déterminer l'amplitude et la pulsation des oscillations de la charge, si la période des oscillations est égale à 0,4 s et si à l'instant initial $x_0=-4$ cm. Construire également la courbe des distances.

Rép. $a=4$ cm; $k=5\pi\ s^{-1}$.

10.10. Calculer la trajectoire du point effectuant simultanément deux mouvements oscillatoires de même fréquence, mais d'amplitude et de phase différentes, si les oscillations ont lieu suivant deux axes rectangulaires:

$$x=a \sin (kt+\alpha),\ y=b \sin (kt+\beta).$$

Rép. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

10.11. Calculer l'équation de la trajectoire du mouvement d'un point, ce mouvement étant la somme de deux oscillations orthogonales de fréquences différentes:

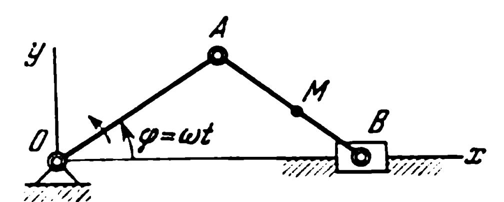
1) $x=a \sin 2\omega t,\ y=a \sin \omega t$;

2) $x=a \cos 2\omega t,\ y=a \cos \omega t$.

Rép. 1) $x^2a^2=4y^2(a^2-y^2)$;

2) $2y^2-ax-a^2=0,\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant a$.

10.12. Une manivelle OA tourne à une vitesse angulaire constante $\omega=10\ s^{-1}$. La longueur $OA=AB=80$ cm. Trouver l'équation du mouvement, la trajectoire du point médian M de la bielle et l'équation du mou-



Probl. 10.12

vement du coulisseau B, si à l'instant initial le coulisseau occupait la position extrême droite; les axes de coordonnées sont indiqués sur le dessin.

Rép. 1) La trajectoire du point M est l'ellipse

$$\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{40^2}=1;$$

2) L'équation du mouvement du coulisseau B est

$$x=160 \cos 10t.$$

10.13. Les équations du mouvement d'un point de la jante d'une roue, qui roule sans glisser sur un rail rectiligne, sont:

$$x=a(kt-\sin kt),\ y=a(1-\cos kt).$$

Calculer les instants où le point occupe les positions inférieure, moyenne et supérieure sur la trajectoire; l'axe des y est dirigé vers le haut.

Rép. 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda$ s; 2) $\left(\frac{\pi}{2k}+\frac{\pi}{k}\lambda\right)$ s;

3) $\left(\frac{\pi}{k}+\frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ s, où $\lambda=0, 1, 2, 3, \ldots$

10.14. Trouver les équations du mouvement et la trajectoire d'un point de la jante d'une roue d'automobile, de rayon $R=1$ m, si l'automobile se déplace sur un chemin rectiligne à une vitesse constantre de 20 m/s. La roue tourne sans glisser; prendre comme origine des coordonnées la position initiale du point sur le chemin que l'on adopte comme l'axe Ox.

Rép. La cycloïde $x=20t-\sin 20t$; $y=1-\cos 20t$.

10.15. Etant données les équations du mouvement d'un projectile:

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t,\quad y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2},$$

où v_0 est la vitesse initiale du projectile, α l'angle que forme v_0 avec l'axe horizontal x, g l'accélération de la pesanteur.

Calculer la trajectoire du projectile, la hauteur H, la portée L et le temps T du vol du projectile.

Rép. La trajectoire est la parabole $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$;

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha;\quad L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha;\quad T=2\frac{v_0}{g}\sin\alpha.$$

10.16. Dans les conditions du problème précédent déterminer l'angle de tir α pour lequel la portée L du vol sera maximale. Trouver la hauteur et le temps du vol correspondants.

Rép. $\alpha=45°$; $L_{max}=\frac{v_0^2}{g}$; $H=\frac{v_0^2}{4g}$; $T=\sqrt{2}\,\frac{v_0}{g}$.

10.17. Compte tenu des données du problème 10.15 déterminer l'angle de tir α pour lequel le projectile tombe au point A de coordonnées x et y.

Rép. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2}}{gx}$.

10.18. Déterminer la parabole de sécurité (tous les points extérieurs à cette parabole ne peuvent être atteints par le projectile pour une vitesse initiale v_0 donnée et pour angle de tir α arbitraire).

Rép. $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$.

10.19. Un point se déplace sur l'hélice

$$x=a\cos kt,\quad y=a\sin kt,\quad z=vt.$$

Trouver les équations du mouvement du point en coordonnées cylindriques.

Rép. $r=a$, $\varphi=kt$, $z=vt$.

10.20. Etant données les équations du mouvement d'un point:

$$x=2a\cos^2\frac{kt}{2},\quad y=a\sin kt,$$

où a et k sont des constantes positives, calculer la trajectoire et la loi du mouvement du point sur sa trajectoire; calculer la distance à partir de la position initiale du point.

Rép. La circonférence $(x-a)^2+y^2=a^2$; $s=akt$.

10.21. Compte tenu des données du problème précédent trouver les équations du mouvement du point en coordonnées polaires.

Rép. $r=2a\cos\frac{kt}{2},\quad \varphi=\frac{kt}{2}$.

10.22. Etant données les équations du mouvement d'un point en coordonnées cartésiennes

$$x=R\cos^2\frac{kt}{2},\quad y=\frac{R}{2}\sin kt,\quad z=R\sin\frac{kt}{2},$$

calculer sa trajectoire et trouver les équations du mouvement en coordonnées sphériques.

Rép. La ligne d'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ et du cylindre $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Les équations du mouvement en coordonnées sphériques sont: $r=R, \varphi=\frac{kt}{2},\quad \vartheta=\frac{kt}{2}$.

10.23. Un point effectue simultanément deux oscillations amorties orthogonales d'équations:

$$x=Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon),\quad y=Ae^{-ht}\sin(kt+\varepsilon),$$

où $A>0$, $h>0$, $k>0$ et ε est une constante. Trouver les équations du mouvement en coordonnées polaires et calculer la trajectoire du point.

Rép. $r=Ae^{-ht}$, $\varphi=kt+\varepsilon$; la trajectoire est la spirale logarithmique $r=Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$.

§ 11. Vitesse d'un point

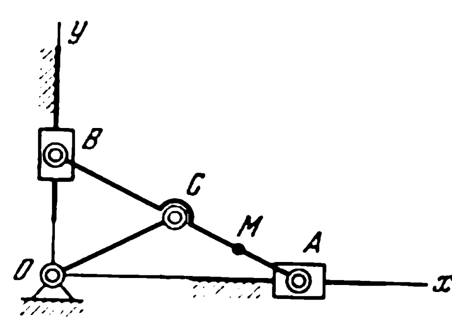
11.1. Un point effectue des oscillations harmoniques $x=a\sin kt$. Déterminer l'amplitude a et la pulsation k des oscillations, si pour $x=x_1$ la vitesse $v=v_1$, et pour $x=x_2$ la vitesse $v=v_2$.

Rép. $a=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}};\quad k=\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}$.

11.2. La longueur de la règle de l'ellipsographe $AB=40$ cm, la longueur de la manivelle $OC=20$ cm, $AC=CB$. La manivelle tourne unifor-

mément autour de l'axe O avec la vitesse angulaire ω. Trouver les équations de la trajectoire et de l'hodographe de la vitesse du point M de la règle, situé à une distance $AM = 10$ cm de l'extrémité A.

Rép. $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1$; $\frac{x_1^2}{900\omega^2} + \frac{y_1^2}{100\omega^2} = 1$.



Probl. 11.2

11.3. Un point décrit la figure de Lissajous d'après les équations

$$x = 2\cos t, \quad y = 4\cos 2t$$

(x, y étant évaluées en centimètres, t en secondes). Déterminer la valeur et la direction de la vitesse du point, lorsqu'il est sur l'axe Oy.

Rép. 1) $v = 2$ cm/s; $\cos(v, x) = -1$.

2) $v = 2$ cm/s; $\cos(v, x) = 1$.

11.4. Un point se déplace d'après les équations

$$x = 4\sin\frac{\pi}{2}t, \quad y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$$

(t étant évalué en secondes, x, y en centimètres). Déterminer la valeur et la direction de la vitesse du point lorsque $t = 0$; $t = 1$ s; $t = 2$ s.

Rép. 1) $v_0 = \frac{5}{2}\pi$ cm/s; $\cos(v_0, x) = \frac{4}{5}$; $\cos(v_0, y) = \frac{3}{5}$.

2) $v_1 = 0$.

3) $v_2 = \frac{5}{2}\pi$ cm/s; $\cos(v_2, x) = -\frac{4}{5}$; $\cos(v_2, y) = -\frac{3}{5}$.

11.5. La manivelle OA tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Trouver la vitesse du point médian M de la bielle d'un système bielle-manivelle et la vitesse du coulisseau B en fonction du temps, si $OA = AB = a$ (cf. figure du problème 10.12).

Rép. 1) $v_M = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}$;

2) $v_B = 2\omega\sin\omega t$.

11.6. Le mouvement d'un point est donné par les équations

$$x = v_0 t\cos\alpha_0, \quad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

l'axe Ox étant horizontal, l'axe Oy vertical et orienté vers le haut, v_0, g et $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ étant des constantes. Trouver: 1) la trajectoire du point, 2) les coordonnées de sa plus haute position, 3) les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées à l'instant où le point se trouve sur l'axe Ox.

Rép. 1) La parabole $y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$;

2) $x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0$, $y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0$;

3) $v_x = v_0 \cos \alpha_0$, $v_y = \pm v_0 \sin \alpha_0$,

le signe supérieur correspond à l'instant initial et le signe inférieur à l'instant

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

11.7. Le mouvement d'un point est donné par les mêmes équations que dans le problème précédent, $v_0=20$ m/s, $\alpha_0=60°$, $g=9{,}81$ m/s^2. Trouver la vitesse v_1 avec laquelle à l'instant $t=0$ un second point doit partir de l'origine des coordonnées pour que tout en se déplaçant uniformément suivant l'axe Ox il rencontre le premier point; déterminer la distance x_1 au lieu de la rencontre.

Rép. $v_1=10$ m/s, $x_1=35{,}3$ m.

11.8. Déterminer les hauteurs h_1, h_2 et h_3 au-dessus du niveau de l'eau des trois points d'une berge verticale sachant que trois balles tirées simultanément de ces points avec des vitesses horizontales de 50, 75 et 100 m/s tombent dans l'eau simultanément, la distance de la berge au point d'incidence de la première balle étant 100 m; ne tenir compte que de l'accélération de la pesanteur $g=9{,}81$ m/s^2. Déterminer aussi la durée T du vol des balles et leurs vitesses v_1, v_2 et v_3 à l'instant d'incidence.

Rép. $h_1=h_2=h_3=19{,}62$ m; $T=2$ s;

$v_1=53{,}71$ m/s, $v_2=77{,}52$ m/s, $v_3=101{,}95$ m/s.

11.9. La vitesse d'un obus tiré par un canon dont l'axe forme un angle de 30° avec l'horizontale est de 500 m/s. Supposant que l'obus ne possède que l'accélération de la pesanteur $g=9{,}81$ m/s^2, trouver l'hodographe de la vitesse de l'obus et la vitesse du point dessinant l'hodographe.

Rép. L'hodographe est une droite verticale située à une distance de 432 m de l'origine des coordonnées; $v_1=9{,}81$ m/s^2.

11.10. Trouver les équations du mouvement et la trajectoire du point de la roue d'une locomotive électrique de rayon $R=1$ m, situé à une distance $a=0{,}5$ m de l'axe, si la roue tourne sans glisser sur un rail rectiligne horizontal; la vitesse de l'axe de la roue est $v=10$ m/s. L'axe Ox est confondu avec le rail, l'axe Oy avec le rayon du point en sa position ini-

tiale inférieure. Déterminer aussi la vitesse de ce point aux instants où le diamètre de la roue sur lequel il est situé est horizontal et vertical.

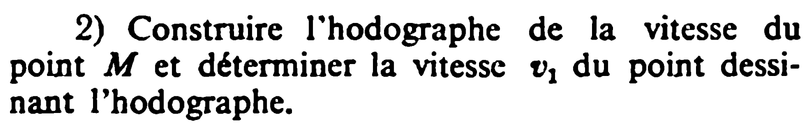
Rép. La cycloïde raccourcie

$$x=10t-0{,}5\sin 10t,\quad y=1-0{,}5\cos 10t.$$

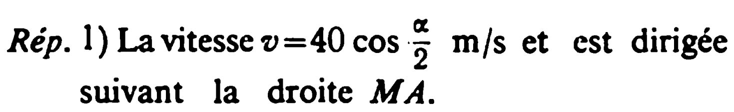
La vitesse: 1) 11,18 m/s, 2) 5 m/s; 15 m/s.

11.11. La vitesse d'une locomotive électrique est $v_0=72$ km/h; le rayon de la roue $R=1$ m; la roue tourne sur un rail rectiligne horizontal sans glisser.

1) Déterminer la valeur et la direction de la vitesse v du point M sur la jante de la roue à l'instant où le rayon du point M forme avec la direction de la vitesse v_0 l'angle $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

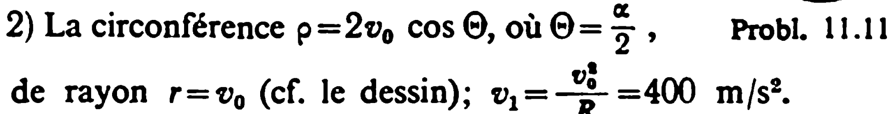


2) Construire l'hodographe de la vitesse du point M et déterminer la vitesse v_1 du point dessinant l'hodographe.

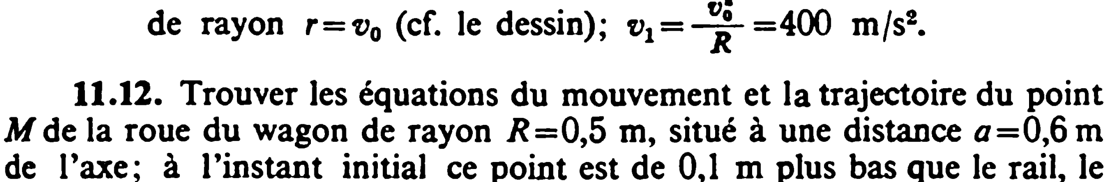


Rép. 1) La vitesse $v=40\cos\frac{\alpha}{2}$ m/s et est dirigée suivant la droite MA.

2) La circonférence $\rho=2v_0\cos\Theta$, où $\Theta=\frac{\alpha}{2}$, de rayon $r=v_0$ (cf. le dessin); $v_1=\frac{v_0^2}{R}=400$ m/s².



Probl. 11.11



11.12. Trouver les équations du mouvement et la trajectoire du point M de la roue du wagon de rayon $R=0{,}5$ m, situé à une distance $a=0{,}6$ m de l'axe; à l'instant initial ce point est de 0,1 m plus bas que le rail, le wagon se déplaçant avec une vitesse $v=10$ m/s sur des rails rectilignes. Déterminer aussi les instants où ce point passe par ses positions inférieure et supérieure, et les projections de sa vitesse sur les axes Ox, Oy à ces instants. L'axe Ox est confondu avec le rail, l'axe Oy passe par la position initiale inférieure du point.

Rép. La cycloïde allongée

$$x=10t-0{,}6\sin 20t;\quad y=0{,}5-0{,}6\cos 20t;$$

lorsque $t=\frac{\pi k}{10}$ s, le point occupe sa position inférieure, $v_x=-2$ m/s, $v_y=0$; lorsque $t=\frac{\pi}{20}(1+2k)$ s, le point occupe sa position supérieure, $v_x=22$ m/s, $v_y=0$, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

11.13. Un point participe simultanément à deux mouvements oscillatoires amortis orthogonaux donnés par les équations

$$x=Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon),\quad y=Ae^{-ht}\sin(kt+\varepsilon).$$

Déterminer les projections de la vitesse du point sur les axes de coordonnées cartésiennes et polaires et trouver le module de la vitesse du point.

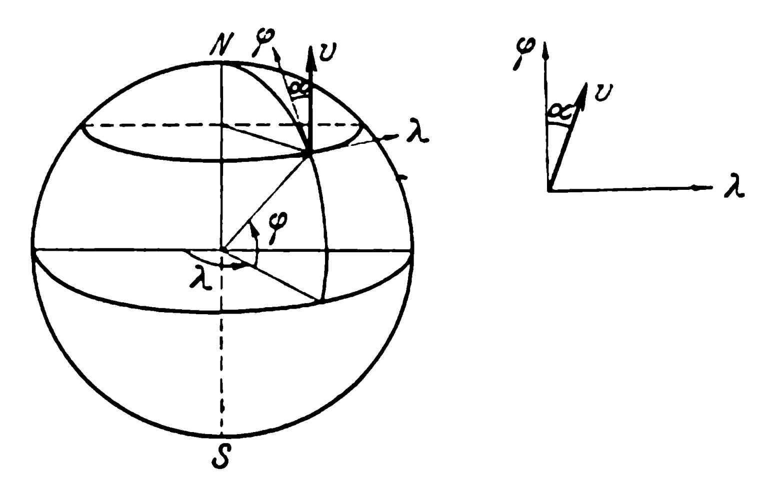
Rép. 1) $v_x = -Ae^{-ht}[h\cos(kt+\varepsilon)+k\sin(kt+\varepsilon)]$,

$v_y = -Ae^{-ht}[h\sin(kt+\varepsilon)-k\cos(kt+\varepsilon)]$;

2) $v_r = -Ahe^{-ht}$, $v_\varphi = Ake^{-ht}$;

3) $v = A\sqrt{h^2+k^2}\, e^{-ht} = \sqrt{h^2+k^2}\, r$.

11.14. Déterminer la courbe que décrit un bateau dont le cap α par rapport au méridien géographique est constant. Le bateau est considéré comme un point se déplaçant sur la surface du globe terrestre.



Probl. 11.14

Rép. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right) e^{(\lambda-\lambda_0)\operatorname{ctg}\alpha}$,

φ étant la latitude, λ la longitude de la position courante du bateau (cette courbe est appelée loxodromie).

Indication. Utiliser les coordonnées sphériques r, λ et φ.

11.15. Les équations du mouvement d'un point M dans un système de coordonnées cylindriques sont (cf. le problème 10.19)

$r=a$, $\varphi=kt$, $z=\nu t$.

Trouver les projections de la vitesse du point M sur l'axe du système de coordonnées cylindriques, les équations du mouvement du point M_1 décrivant l'hodographe de la vitesse et les projections de la vitesse du point M_1.

Rép. 1) $v_r=0$, $v_\varphi=ak$, $v_z=\nu$;

2) $r_1=ak$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}+kt$, $z_1=\nu$;

3) $v_{r_1}=0$, $v_{\varphi_1}=ak^2$, $v_{z_1}=0$.

11.16. Le point M se déplace sur une circonférence d'après les équations

$$r = 2a \cos \frac{kt}{2}, \quad \varphi = \frac{kt}{2}$$

(r et φ sont les coordonnées polaires). Trouver les projections de la vitesse du point M sur l'axe du système de coordonnées polaires, les équations du mouvement du point M_1 décrivant l'hodographe de la vitesse et les projections de la vitesse du point M_1.

Rép. 1) $v_r = -ak \sin \frac{kt}{2}$, $v_\varphi = ak \cos \frac{kt}{2}$;

2) $r_1 = ak$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$;

3) $v_{r_1} = 0$, $v_{\varphi_1} = ak^2$.

11.17. Les équations du mouvement d'un point suivant la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cylindre sont

$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \vartheta = \frac{kt}{2}$$

(r, φ, ϑ étant les coordonnées sphériques; cf. le problème 10.22). Trouver le module et les projections de la vitesse du point sur l'axe du système de coordonnées sphériques.

Rép. $v_r = 0$, $v_\varphi = \frac{Rk}{2} \cos \frac{kt}{2}$, $v_\vartheta = \frac{Rk}{2}$; $v = \frac{Rk}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{kt}{2}}$.

11.18. Trouver en coordonnées polaires (r, φ) l'équation de la courbe que décrit un bateau dont l'angle de relèvement α par rapport à un point fixe est constant (angle compris entre la direction de la vitesse et celle du point fixe), si l'on sait que α et $r_{\varphi=0} = r_0$. Le bateau est considéré comme un point se déplaçant dans un plan, le pôle étant un point fixe arbitraire dans ce plan. Etudier les cas particuliers $\alpha = 0$, $\pi/2$ et π.

Rép. La spirale logarithmique $r = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$. Pour $\alpha = \pi/2$ la courbe est la circonférence $r = r_0$; pour $\alpha = 0$, ou $\alpha = \pi$, elle est une droite.

§ 12. Accélération d'un point

12.1. Un train roule à la vitesse de 72 km/h; après freinage il ralentit de 0,4 m/s². Trouver la durée de la phase de freinage et la distance à laquelle elle doit commencer avant l'arrêt du train à la gare.

Rép. 50 s; 500 m.

12.2. Après le choc avec le pilot, un mouton de sonnette se déplace avec lui pendant 0,02 s jusqu'à l'arrêt; le pilot s'enfonce alors dans le sol de 6 cm. Déterminer la vitesse initiale du mouvement du pilot, ce mouvement étant uniformément retardé.

Rép. 6 m/s.

12.3. Des gouttes d'eau tombent de l'orifice d'un tube vertical par intervalle de 0,1 s avec une accélération de 981 cm/s². Déterminer la distance entre la première et la seconde goutte 1 s après l'instant où la première goutte tombe.

Rép. 93,2 cm.

12.4. Le mouvement d'un tramway suivant une voie rectiligne est caractérisé dans sa phase d'accélération par le fait que le chemin parcouru par le tramway est en raison du cube du temps; au cours de la première minute le tramway a parcouru 90 m. Trouver la vitesse et l'accélération aux instants $t=0$ et $t=5$ s. Construire les courbes des distances, des vitesses et des accélérations.

Rép. $v_0=0$; $w_0=0$; $v_5=\frac{15}{8}$ m/mn; $w_5=45$ m/mn².

12.5. La vitesse d'atterrissage d'un avion étant de 400 km/h, déterminer sa décélération lors d'un atterrissage sur une distance $l=1\ 200$ m. Supposer que la décélération est uniforme.

Rép. $w=5,15$ m/s².

12.6. Un mouton de sonnette tombe d'une hauteur de 2,5 m; pour l'élever à cette même hauteur on dépense trois fois plus de temps que lors de sa chute. Combien de coups effectue-t-il en une minute, si l'accélération de sa chute libre est 9,81 m/s²?

Rép. 21 coups.

12.7. Un coulisseau se déplace suivant un guide rectiligne avec une accélération $w_x=-\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ m/s². Trouver l'équation du mouvement du coulisseau, si sa vitesse initiale est $v_{0x}=2\pi$ m/s, sa position initiale étant confondue avec sa position médiane prise comme origine des coordonnées. Construire les courbes des distances, des vitesses et des accélérations.

Rép. $x=4 \sin \frac{\pi}{2} t$ m.

12.8. Un train dont la vitesse initiale est 54 km/h a parcouru 600 m dans les premières 30 s. Considérant son mouvement comme uniformément varié, déterminer la vitesse et l'accélération du train à la fin de la 30ᵉ seconde, si le train roule suivant une circonférence de rayon $R=1$ km.

Rép. $v=25$ m/s; $w=0,708$ m/s².

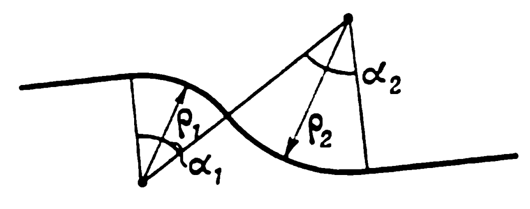
12.9. Lors du départ de la gare la vitesse d'un train croît uniformément et 3 mn après son départ elle atteint la valeur de 72 km/h; le chemin parcouru est une circonférence d'un rayon de 800 m. Déterminer l'accélération tangentielle, normale et totale du train 2 mn après son départ de la gare.

Rép. $w_t=\frac{1}{9}$ m/s²; $w_n=\frac{2}{9}$ m/s²; $w=0,25$ m/s².

12.10. Le mouvement d'un train suivant un arc de circonférence de rayon $R=800$ m est uniformément retardé; il parcourt 800 m ayant une vitesse initiale $v_0=54$ km/h et une vitesse terminale $v=18$ km/h. Déterminer l'accélération totale du train au début et à la fin de l'arc, et la durée du mouvement suivant cet arc.

Rép. $w_0=0{,}308$ m/s²; $w=0{,}129$ m/s²; $T=80$ s.

12.11. La trajectoire d'un tramway consiste en deux arcs de circonférence de rayons $\rho_1=300$ m et $\rho_2=400$ m. Les angles au centre sont $\alpha_1=\alpha_2=60°$. Construire le graphique de l'accélération normale du wagon roulant sur cette trajectoire avec une vitesse $v=36$ km/h.



Probl. 12.11

12.12. Un point se déplace sur un arc de circonférence de rayon $R=20$ cm. La loi de son mouvement sur cette trajectoire est: $s=20\sin\pi t$ (t étant évalué en secondes, s en centimètres). Trouver la valeur et le sens de la vitesse et les accélérations tangentielle, normale et totale du point à l'instant $t=5$ s. Construire aussi le graphique de la vitesse, des accélérations tangentielle et normale.

Rép. La vitesse est de 20π cm/s; elle est dirigée dans le sens contraire au sens positif de référence de l'arc s; $w_t=0$; $w=w_n=20\pi^2$ cm/s².

12.13. La loi du mouvement rectiligne d'un point est: $s=\frac{g}{a^2}(at+e^{-at})$, où a et g sont des constantes. Trouver la vitesse initiale du point, et déterminer son accélération en fonction de la vitesse.

Rép. $v_0=0$; $w=g-av$.

12.14. Le mouvement d'un point est donné par les équations

$$x=10\cos 2\pi\frac{t}{5},\quad y=10\sin 2\pi\frac{t}{5}$$

(x et y étant évaluées en centimètres, t en secondes). Calculer la trajectoire du point, la valeur et la direction de sa vitesse ainsi que la valeur et la direction de son accélération.

Rép. Une circonférence de rayon de 10 cm; la vitesse $v=4\pi$ cm/s et est dirigée suivant la tangente dans le sens de rotation de l'axe Ox vers l'axe Oy de 90°; l'accélération $w=1{,}6\,\pi^2$ cm/s² et est dirigée vers le centre.

12.15. Les équations du mouvement du maneton de la manivelle d'un moteur diesel lors du démarrage sont: $x=75\cos 4t^2$, $y=75\sin 4t^2$

(x, y en centimètres, t en secondes). Trouver la vitesse, les accélérations tangentielle et normale du maneton.

Rép. $v=600t$ cm/s; $w_t=600$ cm/s²; $w_n=4\,800t^2$ cm/s².

12.16. Le mouvement d'un point est donné par les équations

$$x=a\,(e^{kt}+e^{-kt}), \quad y=a\,(e^{kt}-e^{-kt}),$$

où a et k sont des constantes.

Trouver l'équation de la trajectoire, la vitesse et l'accélération du point en fonction du rayon vecteur $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Rép. L'hyperbole $x^2-y^2=4a^2$, $v=kr$; $w=k^2r$.

12.17. Trouver l'accélération et le rayon de courbure de la trajectoire d'un point à l'instant $t=1$ s, si les équations du mouvement de ce point sont:

$$x=4\sin\frac{\pi}{2}t, \quad y=3\sin\frac{\pi}{2}t$$

(t en secondes, x, y en centimètres).

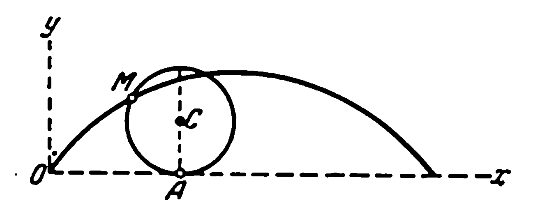
Rép. $w=1{,}25\pi^2$ cm/s²; $\rho=\infty$.

12.18. Trouver le rayon de courbure pour $x=y=0$ de la trajectoire d'un point décrivant une figure de Lissajous d'après les équations

$$x=-a\sin 2\omega t, \quad y=-a\sin\omega t.$$

Rép. $\rho=\infty$.

12.19. Trouver la valeur et la direction de l'accélération ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire d'un point d'une roue qui roule sans



Probl. 12.19

glisser sur l'axe horizontal Ox, si ce point décrit une cycloïde d'équation

$$x=20t-\sin 20t, \quad y=1-\cos 20t$$

(t étant évalué en secondes, x, y en mètres). Déterminer aussi la valeur du rayon de courbure ρ pour $t=0$.

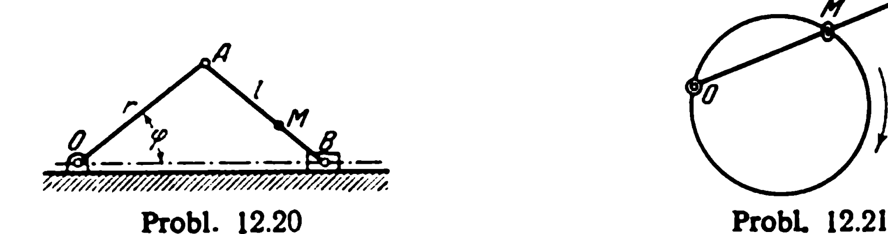
Rép. L'accélération $w=400$ m/s² et est dirigée suivant MC vers le centre C du cercle roulant; $\rho=2MA$; $\rho_0=0$.

12.20. Calculer la trajectoire du point M de la bielle d'un système bielle-manivelle, si $r=l=60$ cm, $MB=\frac{1}{3}l$, $\varphi=4\pi t$ (t en secondes); détermi-

ner la vitesse, l'accélération et le rayon de courburc de la trajectoire de ce point à l'instant où $\varphi=0$.

Rép. L'ellipse $\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$; $v=80\pi$ cm/s; $w=1\,600\pi^2$ cm/s²;

$\rho=4$ cm.



Probl. 12.20 Probl. 12.21

12.21. Un anneau M est monté sur un fil formant une circonférence d'un rayon de 10 cm; une tige OA passe par cet anneau et tourne uniformément autour du point O situé sur cette même circonférence; la vitesse angulaire de la tige est telle qu'elle tourne de 90° en 5 s. Déterminer la vitesse v et l'accélération w de l'anneau.

Rép. $v=2\pi$ cm/s; $w=0{,}4\pi^2$ cm/s².

12.22. Le mouvement d'un projectile est donné par les équations

$$x=v_0 t\cos\alpha_0,\quad y=v_0 t\sin\alpha_0-\frac{1}{2}gt^2,$$

où v_0 et α_0 sont des constantes. Trouver le rayon de courbure de la trajectoire pour $t=0$ et à l'instant de l'impact.

Rép. $\rho=\frac{v_0^2}{g\cos\alpha_0}$.

12.23. Le mouvement d'un projectile dans le plan vertical est décrit par les équations $x=300t$, $y=400t-5t^2$ (t étant évalué en secondes, x, y en mètres). Trouver: 1) la vitesse et l'accélération à l'instant initial, 2) la hauteur et la portée du tir, 3) le rayon de courbure de la trajectoire au point initial et au point de hauteur maximale.

Rép. $v_0=500$ m/s; $w_0=10$ m/s²; $h=8$ km; $s=24$ km; $\rho_0=41{,}67$ km, $\rho=9$ km.

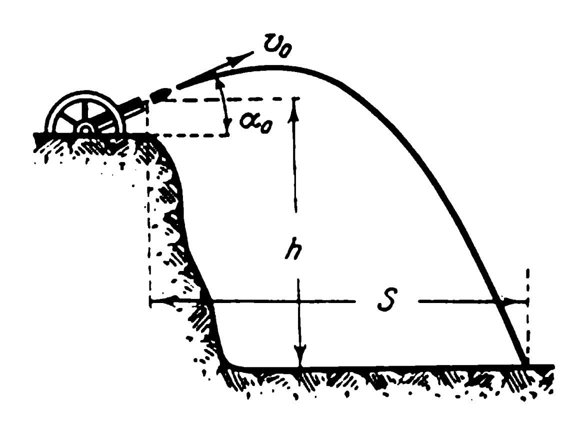
12.24. Un canon d'artillerie côtière, situé à la hauteur $h=30$ m au-dessus du niveau de la mer, tire un projectile sous un angle $\alpha_0=45°$ par rapport à l'horizontale et dont la vitesse initiale est $v_0=1\,000$ m/s. Déterminer à quelle distance du canon le projectile arrive au but situé au niveau de la mer. Faire abstraction de la résistance de l'air. (Voir fig. p. 124.)

Rép. 102 km.

12.25. Trouver les accélérations tangentielle et normale du point dont les équations du mouvement sont:

$$x=\alpha t,\quad y=\beta t-\frac{gt^2}{2}.$$

Rép. $w_t=-\frac{g(\beta-gt)}{v}$; $w_n=\frac{g\alpha}{v}$, v est la vitesse du point.



Probl. 12.24

12.26. Le mouvement d'un point suivant une hélice est décrit par les équations $x=2\cos 4t$, $y=2\sin 4t$, $z=2t$, l'unité de longueur étant le mètre. Déterminer le rayon de courbure ρ de la trajectoire.

Rép. $\rho=2\frac{1}{8}$ m.

12.27. Le mouvement d'un point est donné en coordonnées polaires par les équations $r=ae^{kt}$ et $\varphi=kt$, a et k étant des constantes données. Trouver l'équation de la trajectoire, la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure de la trajectoire du point en tant que fonctions de son rayon vecteur r.

Rép. La spirale logarithmique $r=ae^{\varphi}$; $v=kr\sqrt{2}$; $w=2k^2r$; $\rho=r\sqrt{2}$.

12.28. Le mouvement d'un point est donné par les équations

$$x=2t,\quad y=t^2$$

(t étant évalué en secondes, x et y en centimètres). Déterminer les valeurs et les directions de la vitesse et de l'accélération du point à l'instant $t=1$ s.

Rép. $v=2\sqrt{2}$ cm/s; $w=2$ cm/s²; $(\widehat{\mathbf{v}, x})=45°$, $(\widehat{\mathbf{w}, x})=90°$.

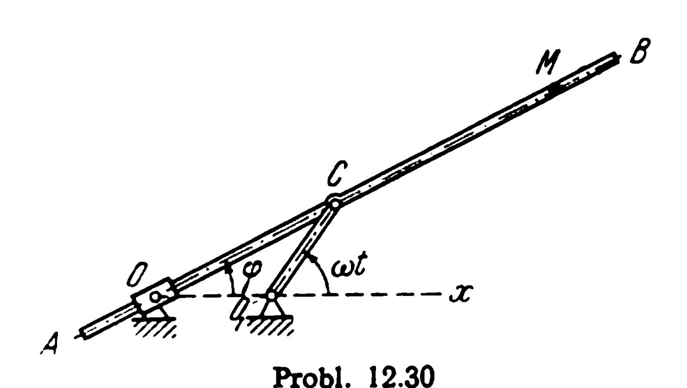
12.29. Construire la trajectoire d'un point, l'hodographe de sa vitesse et déterminer le rayon de courbure de sa trajectoire à l'instant initial; les équations du mouvement du point sont:

$$x=4t,\quad y=t^3$$

(t étant évalué en secondes, x et y en centimètres).

Rép. L'équation de la trajectoire est la parabole cubique $y=\frac{x^3}{64}$; l'hodographe de la vitesse est la droite parallèle à l'axe v_y; $\rho_0=\infty$ (le point initial de la trajectoire est un point d'inflexion).

12.30. Une manivelle O_1C de longueur $a/2$ tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe O_1. La manivelle est articulée au point C avec



Probl. 12.30

une tige AB qui passe toujours par le manchon pivotant O situé à une distance $a/2$ de l'axe de rotation O_1.

Prenant le point O comme pôle, trouver, en coordonnées polaires, les équations du mouvement du point M de la tige situé à une distance a de l'articulation C; trouver également la trajectoire, la vitesse et l'accélération de ce point (à l'instant initial l'angle $\varphi=\widehat{COO_1}=0$).

Rép. 1) $r=a\left(1+\cos\frac{\omega t}{2}\right)$, $\varphi=\frac{\omega t}{2}$;

2) la cardioïde $r=a(1+\cos\varphi)$;

3) $v=a\omega\cos\frac{\omega t}{4}$;

4) $w=\frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5+4\cos\frac{\omega t}{2}}$.

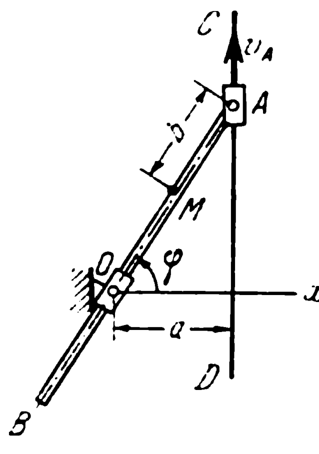
12.31. Déterminer, dans les hypothèses du problème précédent, la position du point M, sa vitesse et son accélération à l'instant initial et à l'instant où la manivelle a effectué un tour complet.

Rép. 1) A l'instant $t=0$, le point M se trouve à l'extrême droite à une distance $2a$ du point O; la vitesse v est perpendiculaire à l'axe des x et est égale à $a\omega$; l'accélération est dirigée vers le point O et vaut $\frac{3}{4}a\omega^2$.

2) Après un tour complet de la manivelle le point M passera par le point O, $v=0$, l'accélération est dirigée vers le point O_1 et vaut $a\omega^2/4$.

12.32. Déterminer, dans les hypothèses du problème 12.31, le rayon de courbure de la cardioïde pour $r=2a$, $\varphi=0$.

Rép. $\rho_0=\frac{4}{3}a$.



Probl. 12.33

12.33. L'extrémité A d'une tige AB se déplace suivant le guide rectiligne CD à une vitesse constante v_A. La tige AB passe toujours par le manchon pivotant O situé à une distance a du guide CD. Prenant le point O pour pôle, trouver, en coordonnées polaires r, φ, la vitesse et l'accélération du point M de la tige situé à une distance b du coulisseau A.

Rép. $v=\frac{v_A}{a}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+r^2\cos^4\varphi}$;

$$w=\frac{v_A^2}{a}\cos^2\varphi\left(1-\frac{r}{a}\cos\varphi\right)\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}.$$

12.34. Un point M se déplace suivant une hélice. Les équations du mouvement de ce point, dans un système de coordonnées cylindriques, sont:

$$r=a,\quad \varphi=kt,\quad z=vt.$$

Trouver les projections de l'accélération du point sur l'axe du système de coordonnées cylindriques, les composantes tangentielle et normale de l'accélération et le rayon de courbure de l'hélice.

Rép. 1) $w_r=-ak^2$, $w_\varphi=0$, $w_z=0$;

2) $w_\tau=0$, $w_n=ak^2$;

3) $\rho=\frac{a^2k^2+v^2}{ak^2}$.

12.35. Le point M se déplace suivant la ligne d'intersection de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ et du cylindre $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Les équations du mouvement de ce point en coordonnées sphériques sont (cf. le problème 10.22):

$$r=R,\quad \varphi=\frac{kt}{2},\quad \vartheta=\frac{kt}{2}.$$

Trouver les projections et le module de l'accélération du point en coordonnées sphériques.

Rép. $w_r=-\frac{Rk^2}{4}(1+\cos^2\Theta)$, $w_\varphi=-\frac{Rk^2}{2}\sin\Theta$,

$w_\Theta=-\frac{Rk^2}{4}\sin\Theta\cos\Theta$; $w=\frac{Rk^2}{4}\sqrt{4+\sin^2\Theta}$.

12.36. Le cap α d'un bateau par rapport au méridien géographique étant constant, celui-ci décrit une loxodromie (cf. le problème 11.14). Admettant que le module de la vitesse v du bateau ne varie pas, déterminer les pro-

jections de l'accélération du bateau sur l'axe du système de coordonnées sphériques r, λ et φ (λ étant la longitude, φ la latitude du lieu de navigation), trouver également le module de l'accélération et le rayon de courbure de la loxodromie.

Rép. $w_r = -\frac{v^2}{R}$, $w_\lambda - \frac{v^2}{R} \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi$,

$$w_\varphi = -\frac{v^2}{R} \sin^2\alpha \operatorname{tg}\varphi; \quad w = \frac{v^2}{R} \sqrt{1+\sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi};$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{1+\sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}},$$ R étant le rayon de la Terre.

12.37. Exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point en fonction des coordonnées toroïdales $r = CM$, ψ et φ et déterminer les coefficients de Lamé.

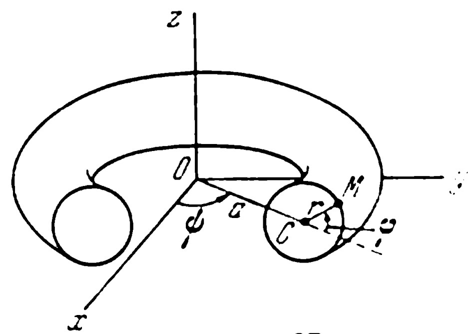
Rép. 1) $x = (a + r\cos\varphi)\cos\psi$,

$y = (a + r\cos\varphi)\sin\psi$,

$z = r\sin\varphi$;

2) $H_r = 1$, $H_\psi = a + r\cos\varphi$,

$H_\varphi = r$.



Probl. 12.37

12.38. Le mouvement d'un point est donné dans un système de coordonnées toroïdales r, ψ et φ. Trouver les projections de la vitesse et de l'accélération du point sur les axes de ce système de référence.

Rép. 1) $v_r = \dot{r}$, $v_\psi = (a + r\cos\varphi)\dot{\psi}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}$;

2) $w_r = \ddot{r} - (a + r\cos\varphi)\cos\varphi\dot{\psi}^2 - r\dot{\varphi}^2$;

$w_\psi = (a + r\cos\varphi)\ddot{\psi} + 2\cos\varphi\dot{r}\dot{\psi} - 2r\sin\varphi\dot{\psi}\dot{\varphi}$;

$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + (a + r\cos\varphi)\sin\varphi\dot{\psi}^2$.

12.39. Les équations du mouvement d'un point suivant une hélice enroulée sur un tore sont:

$$r = R = \text{const}, \quad \psi = \omega t, \quad \varphi = kt.$$

Déterminer les projections de la vitesse et de l'accélération de ce point dans le système de coordonnées toroïdales ($w = \text{const}$, $k = \text{const}$).

Rép. $v_r = 0$, $v_\psi = (a + R\cos\varphi)\omega$, $v_\varphi = Rk$; $w_r = -[(a + R\cos\varphi)\cos\varphi\omega^2 + Rk^2]$, $w_\psi = -2R\omega k\sin\varphi$, $w_\varphi = \omega^2(a + R\cos\varphi)\sin\varphi$.

CHAPITRE IV

MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES DU CORPS SOLIDE

§ 13. Rotation du corps solide autour d'un axe fixe

13.1. Déterminer la vitesse angulaire: 1) de l'aiguille des secondes d'une montre, 2) de la grande aiguille d'une montre, 3) de la petite aiguille d'une montre, 4) de la rotation de la Terre autour de son axe, admettant que la Terre effectue un tour en 24 heures, 5) de la turbine à vapeur de Laval effectuant 15 000 tr/mn.

Rép. 1) $\omega = \frac{\pi}{30}$ $s^{-1} = 0{,}1047$ s^{-1};

2) $\omega = \frac{\pi}{1\,800}$ $s^{-1} = 0{,}001745\,s^{-1}$;

3) $\omega = \frac{\pi}{21\,600}$ $s^{-1} = 0{,}0001455$ s^{-1};

4) $\omega = \frac{\pi}{43\,200}$ $s^{-1} = 0{,}0000727$ s^{-1};

5) $\omega = 1\,571$ s^{-1}.

13.2. Ecrire l'équation du mouvement rotatoire du disque d'une turbine à vapeur pendant la phase de démarrage sachant que l'angle de rotation est en raison du cube du temps et que pour $t = 3$ s la vitesse angulaire du disque correspond à $n = 810$ tr/mn.

Rép. $\varphi = \pi t^3$ rd.

13.3. Le pendule d'un régulateur centrifuge tourne autour de l'axe vertical AB et fait 120 tr/mn. A l'instant initial l'angle de rotation était égal à $\frac{\pi}{6}$ rd. Trouver l'angle de rotation et le déplacement angulaire du pendule au cours du temps $t = 1/2$ s.

Rép. $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ rd; $\Delta\varphi = 2\pi$ rd.

13.4. Un corps à l'état de repos commence à tourner avec une accélération constante et fait 3 600 tours pendant les deux premières minutes, Déterminer son accélération angulaire.

Rép. $\varepsilon = \pi$ s^{-2}.

13.5. Un arbre commence à tourner avec une accélération constante et fait 12,5 tours dans les premières 5 s. Déterminer sa vitesse angulaire à l'instant $t=5$ s.

Rép. $\omega=5$ tr/s$=10\pi$ s^{-1}.

13.6. Un volant commence à tourner avec une accélération constante; dans 10 minutes sa vitesse angulaire atteint 120 tr/mn. Calculer le nombre de tours qu'a fait le volant pendant ces 10 minutes.

Rép. 600 tours.

13.7. La vitesse angulaire initiale d'une roue dont l'axe est fixe vaut 2π s^{-1}; ayant effectué 10 tours elle s'est arrêtée à cause du frottement dans les paliers. Déterminer l'accélération angulaire ε de la roue supposée constante.

Rép. $\varepsilon=0{,}1\pi$ s^{-2}, la rotation est uniformément retardée.

13.8. Dès l'instant où le moteur a été coupé l'hélice de l'avion tournant avec une vitesse angulaire $n=1\,200$ tr/mn a effectué 80 tours jusqu'à l'arrêt. Déterminer le temps écoulé à partir de l'instant où le moteur a été coupé jusqu'à l'arrêt de l'hélice dont la rotation est supposée uniformément retardée.

Rép. 8 s.

13.9. Un corps effectue un mouvement oscillatoire autour d'un axe fixe, l'angle de rotation étant donné par l'équation

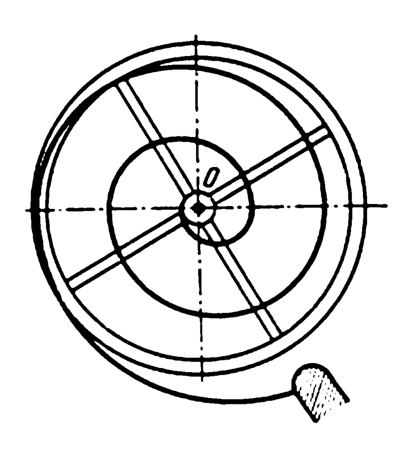
$$\varphi=20^\circ \sin\psi,$$

où l'angle ψ est exprimé en degrés par la relation $\psi=(2t)^\circ$, t désignant des secondes. Déterminer la vitesse angulaire du corps à l'instant $t=0$ et aux instants immédiats t_1 et t_2 où le sens de rotation change, ainsi que la période T de l'oscillation.

Rép. $\omega=\frac{1}{810}\pi^2$ s^{-1}; $t_1=45$ s; $t_2=135$ s; $T=180$ s.

13.10. Un balancier effectue des oscillations harmoniques de torsion de période $T=1/2$ s. Le plus grand angle de déviation de la position d'équilibre d'un point de la jante du balancier est $\alpha=\pi/2$ rd. Trouver la vitesse et l'accélération angulaires du balancier 2 s après l'instant où le balancier passe par la position d'équilibre.

Rép. $\omega=2\pi^2$ s^{-1}; $\varepsilon=0$.



Probl. 13.10

13.11. Un pendule oscille dans le plan vertical autour d'un axe fixe horizontal O. Ayant dévié de sa position d'équilibre à l'instant initial, il atteint la déviation maximale $\alpha=\pi/16$ rd en 2/3 s.

1) Ecrire la loi des oscillations du pendule, supposées harmoniques.

2) Dans quelle position le pendule possède-t-il la plus grande vitesse angulaire et quelle en est la valeur?

Rép. 1) $\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4} \pi t$ rd.

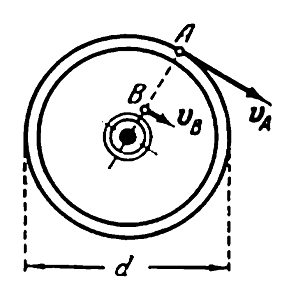
2) dans la position verticale; $\omega_{max} = \frac{3}{64} \pi^2$ s^{-1}.

13.12. Déterminer la vitesse v et l'accélération w d'un point de la surface de la Terre à Léningrad; on ne tiendra compte que de la rotation de la Terre autour de son axe; la latitude de Léningrad est 60°; le rayon de la Terre est égal à 6 370 km.

Rép. $v = 0{,}232$ km/s; $w = 0{,}0169$ m/s^2.

13.13. Un volant de rayon de 0,5 m tourne uniformément autour de son axe; la vitesse des points de sa périphérie est de 2 m/s. Evaluer la vitesse angulaire du volant en tr/mn.

Rép. $n = 38{,}2$ tr/mn.



Probl. 13.14

13.14. Le point A de la périphérie d'une poulie se déplace à la vitesse de 50 cm/s, un point quelconque B situé sur le même rayon que le point A se déplace à la vitesse de 10 cm/s; la distance $AB = 20$ cm. Déterminer la vitesse angulaire ω et le diamètre de la poulie.

Rép. $\omega = 2$ s^{-1}; $d = 50$ cm.

13.15. Un volant de rayon $R = 2$ m commence à tourner avec une accélération constante; après 10 s la vitesse linéique des points périphériques du volant est $v = 100$ m/s. Trouver la vitesse, les accélérations tangentielle et normale des points périphériques du volant à l'instant $t = 15$ s.

Rép. $v = 150$ m/s; $w_n = 11\,250$ m/s^2; $w_\tau = 10$ m/s^2.

13.16. Trouver la vitesse horizontale v qu'il faut communiquer à un corps sur l'équateur pour que celui-ci en se déplaçant uniformément autour de la Terre suivant l'équateur dans des guides spéciaux ait l'accélération de la chute libre. Déterminer aussi le temps T que met le corps pour revenir à sa position initiale. Le rayon de la Terre $R = 637 \cdot 10^6$ cm, l'accélération de la pesanteur à l'équateur $g = 978$ cm/s^2.

Rép. $v = 7{,}9$ km/s; $T = 1{,}4$ h.

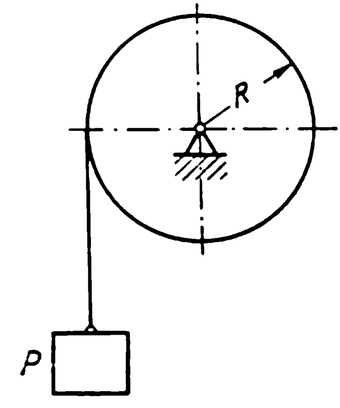
13.17. L'accélération totale d'un point périphérique d'un volant fait avec le rayon un angle de 60°. L'accélération tangentielle de ce point à l'instant donné $w_\tau = 10\sqrt{3}$ m/s^2. Trouver l'accélération normale du point à une distance $r = 0{,}5$ m de l'axe. Le rayon du volant $R = 1$ m.

Rép. $w_n = 5$ m/s^2.

13.18. Un arbre de rayon $R=10$ cm tourne sous l'action du poids P suspendu à cet arbre par un fil. Le mouvement du poids est donné par l'équation $x=100\,t^2$, où x est la distance du poids au point où le fil s'écarte de l'arbre et est évaluée en centimètres, t étant le temps évalué en secondes. Déterminer la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε de l'arbre, ainsi que l'accélération totale w d'un point sur la surface de l'arbre à l'instant t.

Rép. $\omega=20t$ s^{-1}; $\varepsilon=20$ s^{-2};

$w=200\sqrt{1+400t^4}$ cm/s^2.



Probl. 13.18

13.19. Résoudre le problème précédent sous une forme générale en exprimant l'accélération des points de la périphérie du volant en fonction de la distance x parcourue par le poids, du rayon R du volant et de l'accélération du poids $\ddot{x}=w_0=\text{const}$.

Rép. $w=w_0\sqrt{1+4\,\frac{x^2}{R^2}}$.

13.20. L'aiguille d'un galvanomètre longue de 3 cm oscille autour d'un axe fixe d'après la loi

$$\varphi=\varphi_0 \sin kt.$$

Déterminer l'accélération de l'extrémité de l'aiguille dans ses positions neutre et extrêmes, ainsi que les instantss où la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε s'annulent, si la période est égale à 0,4 s et l'amplitude $\varphi_0=\frac{\pi}{30}$.

Rép. : 1) Dans la position neutre de l'aiguille $w=8{,}1$ cm/s^2.
2) Dans les positions extrêmes de l'aiguille $w=77{,}5$ cm/s^2.
3) $\omega=0$ pour $t=(0{,}1+0{,}2n)$ s $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$
4) $\varepsilon=0$ pour $t=0{,}2n$ s $(n=0{,}1,\ 2,\ \ldots)$.

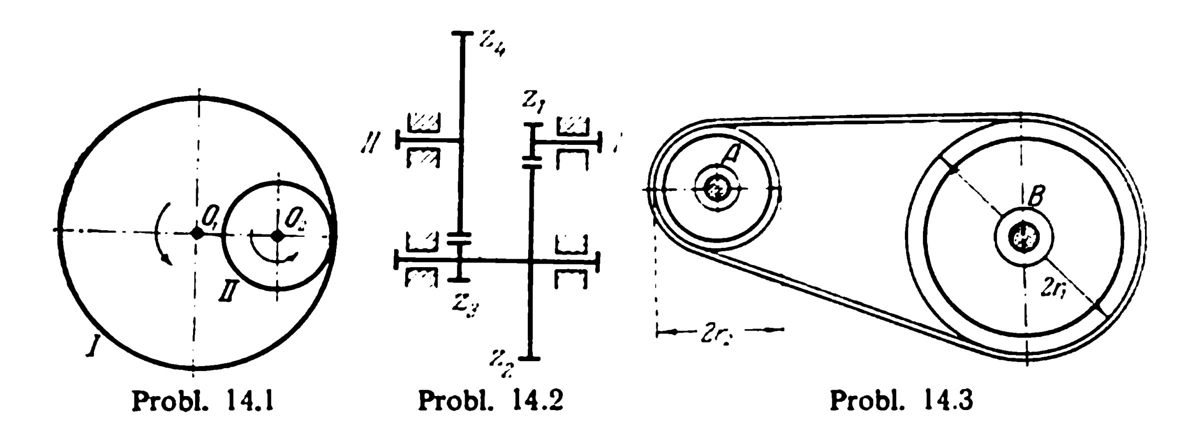
§ 14. Transformations des mouvements élémentaires d'un corps solide

14.1. Une roue dentée I de diamètre $D_1=360$ mm effectue $n_1=100$ tr/mn. Quel est le diamètre de la roue dentée II qui s'engrène intérieurement avec la roue I et effectue $n_2=300$ tr/mn? (Voir fig. p. 132.)

Rép. $D_2=120$ mm.

14.2. Un réducteur de vitesse qui sert à ralentir la rotation de l'arbre I et à mettre en rotation l'arbre II comporte quatre roues dentées dont le nombre respectif des dents est: $z_1=10$, $z_2=60$, $z_3=12$, $z_4=70$. Déterminer le rapport de transmission (voir fig. p. 132)

Rép. $i_{\text{I, II}}=\frac{\omega_{\text{I}}}{\omega_{\text{II}}}=35.$



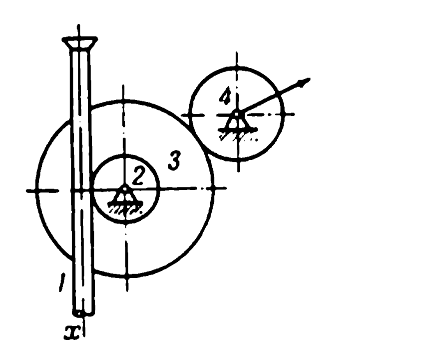
Probl. 14.1 Probl. 14.2 Probl. 14.3

14.3. Une machine-outil avec la poulie *A* est mise en mouvement à partir de l'arrêt par la courroie sans fin passant de la poulie *B* d'un moteur électrique; les rayons des poulies sont: $r_1=75$ cm, $r_2=30$ cm; après le démarrage du moteur son accélération angulaire est de $0{,}4\pi\ s^{-2}$. Négligeant le frottement entre la courroie et les poulies, déterminer en combien de temps la machine-outil atteindra la vitesse de rotation de 300 tr/mn.

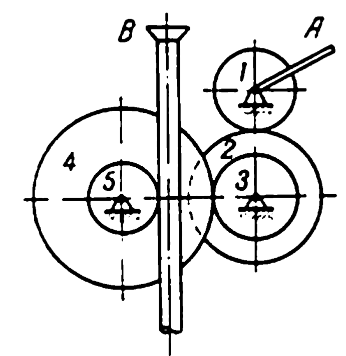
Rép. 10 s.

14.4. Dans le mécanisme d'un indicateur à aiguille le mouvement de la crémaillère *1* est transmis au pignon *2* dont l'axe porte le pignon *3* qui s'engrène avec le pignon *4* auquel est fixée l'aiguille. Déterminer la vitesse angulaire de l'aiguille, si le mouvement de la crémaillère est donné par l'équation $x=a\sin kt$ les rayons des pignons étant respectivement r_2, r_3 et r_4.

Rép. $\omega_4=\frac{r_3}{r_2 r_4}ak\cos kt.$



Probl. 14.4



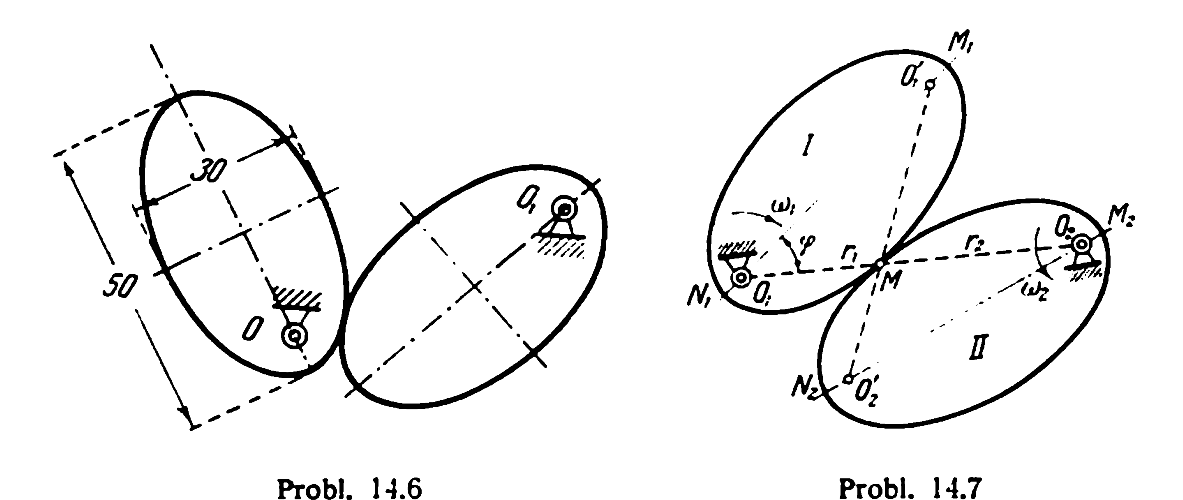
Probl. 14.5

14.5. Dans le mécanisme d'un cric le mouvement de rotation du levier *A* est transmis aux pignons *1*, *2*, *3*, *4* et *5* lesquels, à leur tour, transmettent le mouvement à la crémaillère *B* du cric. Déterminer la vitesse de la crémaillère, si le levier effectue 30 tr/mn. Les nombres de dents des pignons sont: $z_1=6$, $z_2=24$, $z_3=8$, $z_4=32$; le rayon du cinquième pignon $r_5=4$ cm.

Rép. $v_B=7{,}8$ mm/s.

14.6. Pour obtenir des vitesses angulaires périodiques on utilise un engrenage de deux roues dentées elliptiques identiques dont l'une tourne uniformément autour de l'axe O en effectuant 270 tr/mn; l'autre étant menée par la première effectue un mouvement de rotation autour de l'axe O_1. Les axes O et O_1 sont parallèles et passent par les foyers des ellipses. La distance OO_1 est de 50 cm, les demi-axes des ellipses mesurent 25 et 15 cm. Déterminer la plus petite et la plus grande vitesse angulaire de la roue O_1.

Rép. $\omega_{min} = \pi\ s^{-1}$; $\omega_{max} = 81\ \pi\ s^{-1}$.



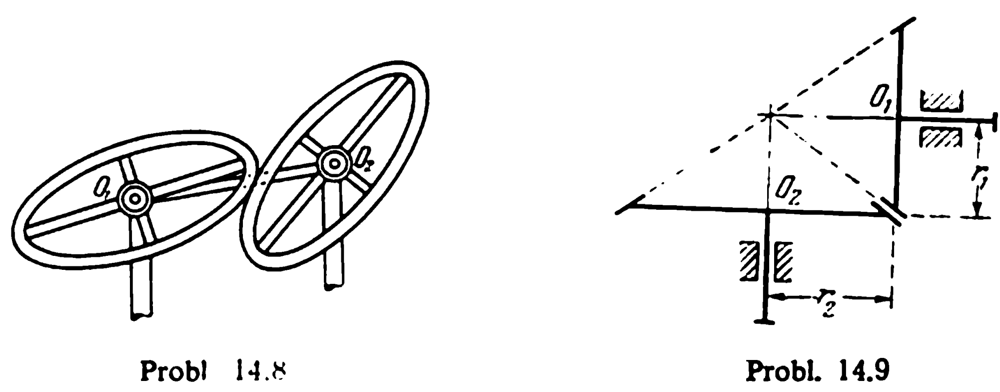
Probl. 14.6

Probl. 14.7

14.7. Déduire la loi de transmission du mouvement de rotation d'un couple de pignons elliptiques de demi-axes a et b. La vitesse angulaire du pignon I $\omega_1 = \text{const}$. La distance entre les axes $O_1O_2 = 2a$; φ est l'angle formé par la droite joignant les axes de rotation et l'axe du pignon elliptique I. Les axes passent par les foyers des ellipses.

Rép. $\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}\,\omega_1$, où c est l'excentricité linéique des ellipses : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

14.8. Trouver la plus grande et la plus petite vitesse angulaire du pignon ovale O_2 engrené avec le pignon O_1 celui-ci effectuant 240 tr/mn.



Probl 14.8

Probl. 14.9

Les axes de rotation des pignons sont situés aux foyers des ovales. La distance entre les axes est de 50 cm. Les demi-axes des ovales mesurent 40 et 10 cm.

Rép. $\omega_{min}=2\pi\ s^{-1}$; $\omega_{max}=32\pi\ s^{-1}$.

14.9. Déterminer l'intervalle de temps nécessaire pour que la roue dentée conique O_1 de rayon $r_1=10$ cm ait une vitesse angulaire $n_1=$ $=4\ 320$ tr/mn, si elle est entraînée en mouvement de rotation à partir du repos par une roue identique O_2 de rayon $r_2=15$ cm tournant avec une accélération angulaire constante de 2 tr/s² (voir fig. p. 133).

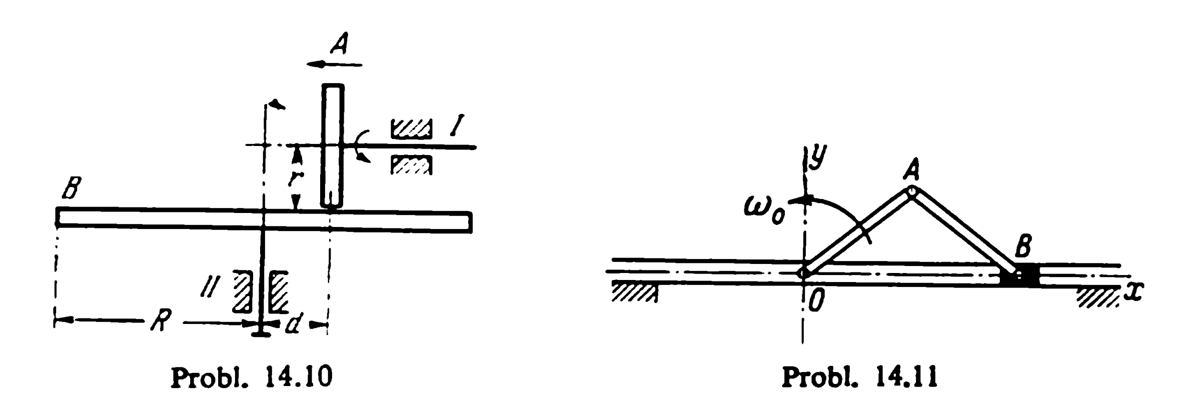
Rép. $t=24$ s.

14.10. L'arbre moteur I d'une transmission à friction effectue 600 tr/mn tout en se déplaçant dans la direction indiquée par la flèche d'après la loi $d=(10-0{,}5t)$ cm (d est la distance, t est évalué en secondes).

Déterminer: 1) l'accélération angulaire de l'arbre II en fonction de la distance d; 2) l'accélération d'un point sur la périphérie de la roue B à l'instant où $d=r$; les rayons des roues à friction sont: $r=5$ cm; $R=15$ cm.

Rép. 1) $\varepsilon=\frac{50\pi}{d^2}\ s^{-2}$;

2) $w=30\pi\sqrt{40\ 000\pi^2+1}$ cm/s².



Probl. 14.10 Probl. 14.11

14.11. Trouver la loi du mouvement, la vitesse et l'accélération du coulisseau B d'un système bielle-manivelle OAB, si les longueurs de la bielle et de la manivelle sont identiques: $OA=AB=r$, la rotation de la manivelle autour de l'axe O étant uniforme: $\omega=\omega_0$. L'axe des x est dirigé suivant le guide du coulisseau. Les distances sont calculées à partir du centre O de la manivelle.

Rép. $x=2r\cos\omega_0 t$; $v_x=-2r\omega_0\sin\omega_0 t$; $w_x=-\omega_0^2 x$.

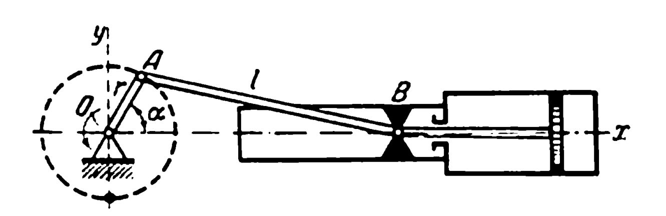
14.12. Déterminer la loi du mouvement, la vitesse et l'accélération du coulisseau B d'un système bielle-manivelle, si la manivelle OA tourne à une vitesse angulaire constante ω_0. La longueur de la manivelle $OA=r$, celle de la bielle $AB=l$.

L'axe Ox est dirigé suivant le guide du coulisseau. L'origine de référence est le centre O de la manivelle. Le rapport $\frac{r}{l}$ λ est minime ($\lambda \ll 1$); $\alpha = \omega_0 t$.

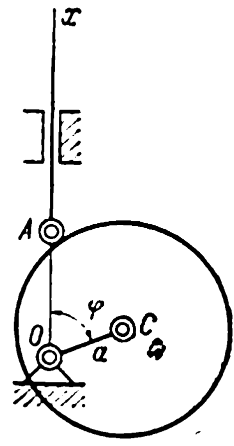
Rép. $x = r\left(\cos \omega_0 t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega_0 t\right) + l - \frac{\lambda}{4} r;$

$$v_x = -r\omega_0\left(\sin \omega_0 t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega_0 t\right);$$

$$w_x = -r\omega_0^2 (\cos \omega_0 t + \lambda \cos 2\omega_0 t).$$



Probl. 14.12

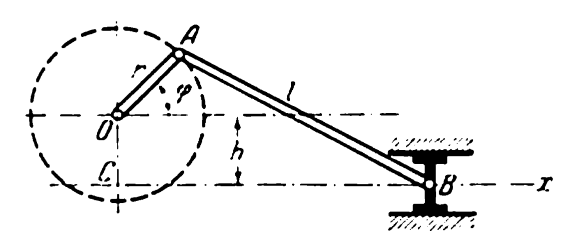


Probl. 14.13

14.13. Trouver la loi du mouvement d'une tige, si le diamètre de l'excentrique $d = 2r$, la distance de l'axe de rotation O à l'axe C du disque étant a; l'axe Ox est dirigé suivant la tige, l'origine est au point O, $\frac{a}{r} = \lambda$.

Rép. $x = a \cos \varphi + r \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$.

14.14. Ecrire l'équation du mouvement du piston d'un système bielle-manivelle excentrique. La distance de l'axe de rotation de la manivelle au guide est h, la longueur de la manivelle est r, celle de la



Probl. 14.14

bielle est l; l'axe Ox est dirigé suivant le guide du coulisseau. Les distances sont comptées à partir de la position extrême droite du coulisseau; $\frac{l}{r} = \lambda$, $\frac{h}{r} = k$, $\varphi = \omega_0 t$.

Rép. $x = r\left[\sqrt{(\lambda + 1)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (\sin \varphi + k)^2} - \cos \varphi\right]$.

14.15. Une came tournant uniformément autour de l'axe O engendre un mouvement de translation alternatif de la tige AB. La came effectue un tour complet en 8 s; les équations du mouvement de la tige en ce laps de temps sont (x étant évalué en centimètres et t en secondes):

$$x = \begin{cases} 30 + 5t, & 0 \leqslant t \leqslant 4, \\ 30 + 5(8 - t), & 4 \leqslant t \leqslant 8. \end{cases}$$

Déterminer les équations du contour de la came et construire le graphique du mouvement de la tige.

$$Rép.\ r = \begin{cases} 30 + \dfrac{20}{\pi}\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 30 + \dfrac{20}{\pi}(2\pi - \varphi), & \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

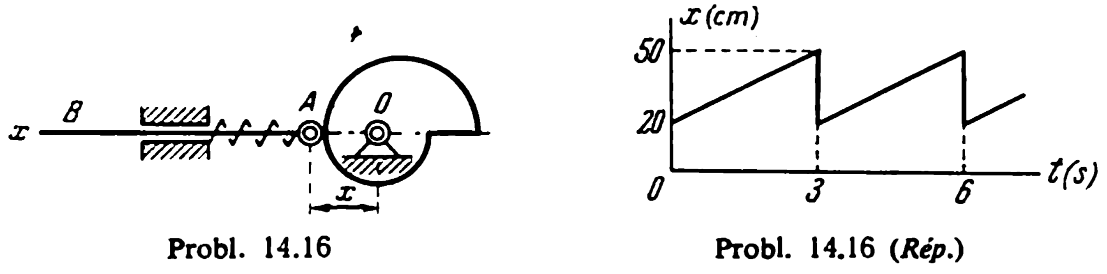
Probl. 14.15 Probl. 14.15 (*Rép.*)

14.16. Trouver la loi et construire le graphique du mouvement de translation alternatif d'une tige AB, si l'on connaît l'équation du contour de la came

$$r = \left(20 + \frac{15}{\pi}\varphi\right) \text{ cm}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

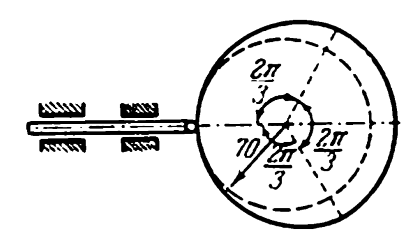
La came tourne uniformément et effectue 20 tr/mn.

Rép. $x = 20 + 10t$ lorsque la came fait un tour (3 s), après quoi le mouvement se répète périodiquement.



Probl. 14.16 Probl. 14.16 (*Rép.*)

14.17. Ecrire l'équation du contour de la came pour laquelle la course totale d'une tige $h = 20$ cm correspondrait au tiers d'un tour, les déplacements de la tige devant être proportionnels à l'angle de rotation dans cet intervalle de temps. Pendant le second tiers de tour la tige doit être immo-



Probl. 14.17

bile, et enfin, pendant le dernier tiers de tour elle doit effectuer la course inverse dans des conditions identiques au premier tiers de tour. La plus petite distance de l'extrémité de la tige au centre de la came est de 70 cm. La came effectue 20 tr/mn.

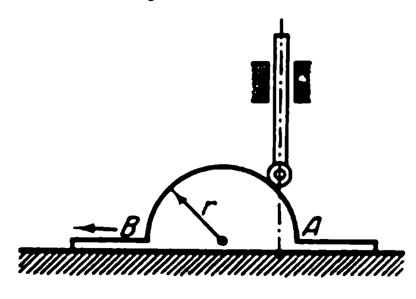
Rép. Le contour de la came qui correspond au premier tiers de tour est une spirale d'Archimède

$$r=\left(\frac{30}{\pi}\varphi+70\right)\text{ cm.}$$

Le second tiers de tour correspond à une circonférence de rayon $r=90$ cm. Pour le dernier tiers de tour le contour est aussi une spirale d'Archimède

$$r=\left(90-\frac{30}{\pi}\varphi\right)\text{ cm.}$$

14.18. Déterminer l'abaissement d'une tige butant à son extrémité contre le contour circulaire de rayon $r=30$ cm d'une came; cette dernière



Probl. 14.18

effectue un mouvement de translation alternée à la vitesse $v=5$ cm/s. Le temps d'abaissement de la tige est $t=3$ s. A l'instant initial la tige occupe la position la plus haute.

Rép. $h=4{,}020$ cm.

14.19. Trouver l'accélération d'une came circulaire dont le mouvement de translation possède une accélération constante sans vitesse initiale, si en 4 s la tige s'abaisse de sa plus haute position de $h=4$ cm. Le rayon de la came circulaire $r=10$ cm (cf. le schéma du problème 14.18).

Rép. $w=1$ cm/s^2.

CHAPITRE V

MOUVEMENT PLAN DU CORPS SOLIDE

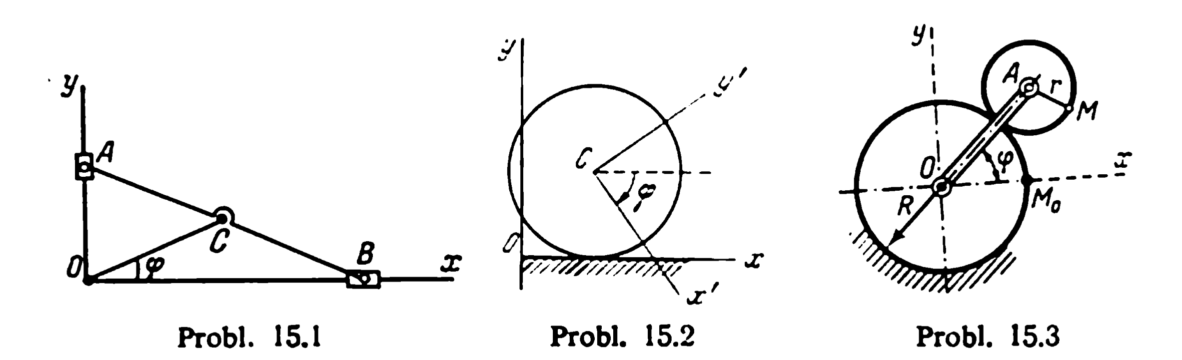
§ 15. Equations du mouvement d'une figure plane

15.1. La règle d'un ellipsographe est entraînée par la manivelle OC tournant à une vitesse angulaire constante ω_0=autour de l'axe O.

Prenant le coulisseau B comme pôle, déterminer les équations du mouvement plan de la règle de l'ellipsographe si $OC=BC=AC=r$. A l'instant initial la règle AB était disposée horizontalement.

Rép. $x_B=2r\cos\omega_0 t$; $y_B=0$; $\varphi=-\omega_0 t$.

15.2. Une roue de rayon R roule sans glisser sur une droite horizontale. La vitesse v du centre C de la roue est constante.



Probl. 15.1 Probl. 15.2 Probl. 15.3

Déterminer les équations du mouvement de la roue, si à l'instant initial l'axe y' fixé à la roue était vertical, l'axe immobile y passant à cet instant par le centre C de la roue. Prendre le point C comme pôle.

Rép. $x_C=vt$; $y_C=-R$; $\varphi=\frac{v}{R}t$.

15.3. Un pignon de rayon r roulant sur un pignon fixe de rayon R est entraîné par la manivelle OA tournant avec une accélération angulaire ε_0 autour de l'axe O du pignon fixe.

Ecrire les équations du mouvement du pignon mobile. Prendre le centre A comme pôle; pour $t=0$ la vitesse angulaire de la manivelle $\omega_0=0$ et l'angle de rotation initial $\varphi_0=0$.

Rép. $x_A=(R+r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$; $y_A=(R+r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$;

$$\varphi_1=-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

où φ_1 est l'angle de rotation du pignon mobile.

15.4. Un pignon de rayon r roulant à l'intérieur d'un pignon fixe de rayon R est entraîné par la manivelle OA qui tourne uniformément autour de l'axe O du pignon immobile avec la vitesse angulaire ω_0. Pour $t=0, \varphi_0=0$.

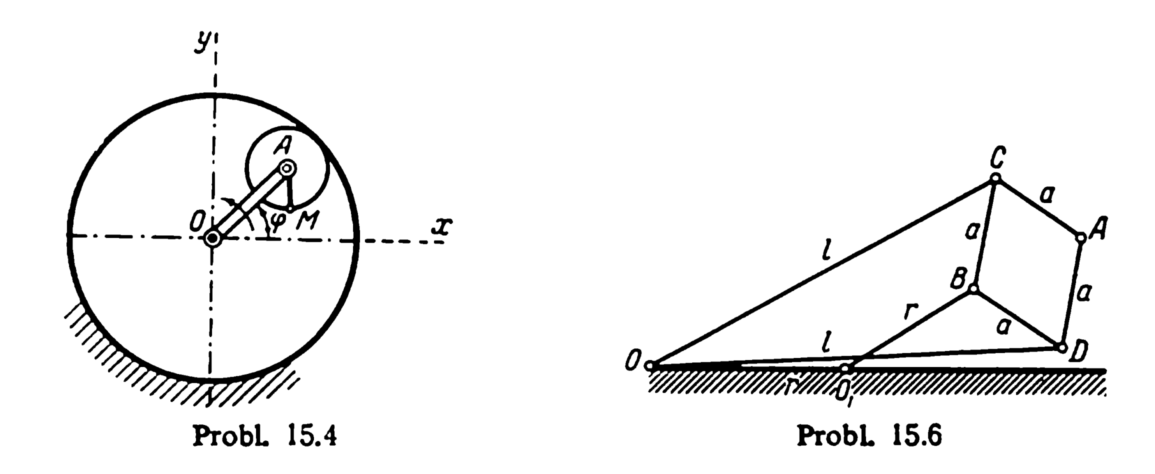
Ecrire les équations du mouvement du pignon mobile; prendre le centre A comme pôle.

Rép. $x_A=(R-r)\cos\omega_0 t;$

$$y_A=(R-r)\sin\omega_0 t;$$

$$\varphi_1=-\left(\frac{R}{r}-1\right)\omega_0 t,$$

où φ_1 est l'angle de rotation du pignon mobile; le signe moins signifie que le pignon tourne dans le sens contraire à la rotation de la manivelle.



Probl. 15.4 Probl. 15.6

15.5. Trouver les équations du mouvement de la bielle d'une machine à vapeur, si la manivelle tourne uniformément. Prendre pour pôle le point A sur l'axe de la manivelle; la longueur de la manivelle est r, celle de la bielle est l, la vitesse angulaire de la manivelle est ω_0. Pour $t=0$, l'angle $\alpha=0$ (cf. la figure du problème 14.12).

Rép. $x=r\cos\omega_0 t;\quad y=r\sin\omega_0 t;\quad \varphi=-\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right).$

15.6. Un inverseur est un mécanisme articulé constitué par un losange $ADBC$ de côté a. Les sommets C et D se déplacent sur une même circonférence grâce aux éléments OC et OD de longueur l; quant au sommet B, il se déplace sur une autre circonférence grâce à l'élément O_1B de longueur $r=OO_1$.

Trouver la trajectoire du sommet A.

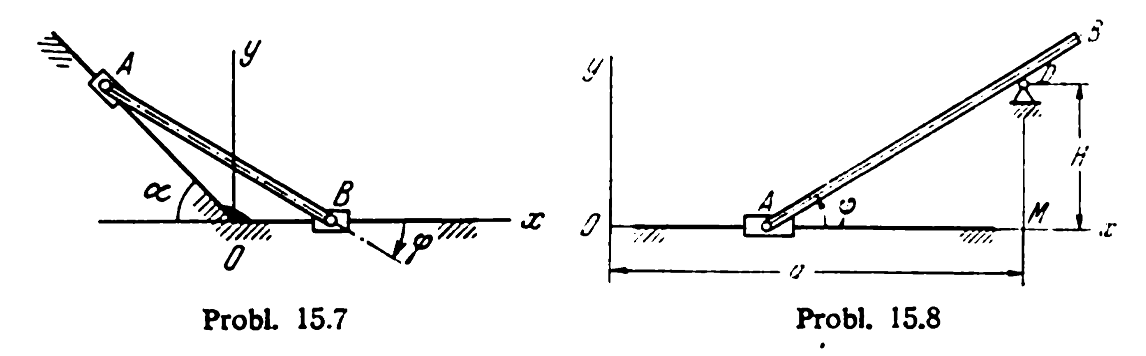
Rép. La droite perpendiculaire à OO_1 est située à une distance

$$x=\frac{l^2-a^2}{2r}$$ du point O.

15.7. Les manchons A et B glissant le long des guides rectilignes sont reliés par la tige AB de longueur l. Le manchon A se déplace à une vitesse constante v_A.

Déterminer les équations du mouvement de la tige AB, en supposant qu'à l'instant initial le manchon A se trouvait au point O. Prendre le point A comme pôle. L'angle $\widehat{BOA}=\pi-\alpha$.

Rép. $x_A=-v_A t\cos\alpha;\quad y_A=v_A t\sin\alpha;\quad \varphi=-\arcsin\frac{v_A t}{l}\sin\alpha.$



Probl. 15.7 Probl. 15.8

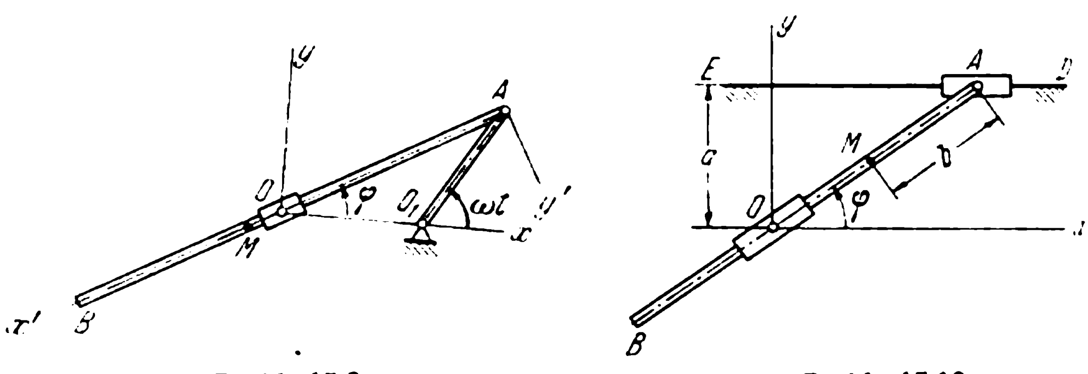
15.8. L'extrémité A de la tige AB glisse le long d'un guide rectiligne à une vitesse constante v. Lors du mouvement la tige s'appuie sur la goupille D.

Déterminer les équations du mouvement de la tige et de son extrémité B. La longueur de la tige est l, la hauteur de la goupille D au-dessus du guide rectiligne est H. A l'instant initial l'extrémité A de la tige coïncidait avec le point O, origine du système de coordonnées fixe; $OM=a$. Prendre le point A comme pôle.

Rép. $x_A=vt,\ y_A=0,\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{H}{a-vt};$

$$x_B=vt+l\frac{a-vt}{\sqrt{H^2+(a-vt)^2}};\quad y_B=\frac{Hl}{\sqrt{H^2+(a-vt)^2}}.$$

15.9. La manivelle O_1A de longueur $a/2$ tourne à la vitesse angulaire constante ω. Une tige AB est articulée au point A de la manivelle et passe toujours par le manchon pivotant O; la distance $OO_1=a/2$.



Probl. 15.9 Probl. 15.10

Trouver les équations du mouvement de la tige AB et la trajectoire (en coordonnées polaires et cartésiennes) du point M sur la tige à une distance a de l'articulation A, le point A étant pris comme pôle.

Rép. 1) $x_A = \frac{a}{2}(1 + \cos \omega t)$, $y_A = \frac{a}{2} \sin \omega t$, $\varphi = \frac{\omega t}{2}$;

2) la cardioïde: $\rho = a(\cos \varphi - 1)$, $x^2 + y^2 = a(x - \sqrt{x^2 + y^2})$.

15.10. Un conchoïdographe est composé de la règle AB qui s'articule en A avec un coulisseau glissant le long du guide rectiligne ED et qui passe par un manchon pivotant autour de l'axe fixe O. Le coulisseau effectue un mouvement oscillatoire suivant la loi $x = c \sin \omega t$, où c et ω sont des nombres constants donnés (les axes des coordonnées sont indiqués sur la figure).

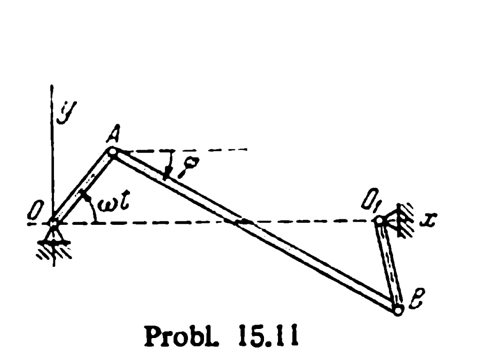
Trouver les équations du mouvement de la règle AB et les équations, en coordonnées polaires et cartésiennes, de la courbe décrite par le point M de la règle AB, si $AM = b$.

Rép. 1) $x_A = c \sin \omega t$, $y_A = a$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{c \sin \omega t}$;

2) $\rho = \frac{a}{\sin \varphi} - b$, $(x_M^2 + y_M^2)(y_M - a)^2 = b^2 y_M^2$.

15.11. La manivelle OA de l'antiparallélogramme articulé $OABO_1$, construit sur un grand élément OO_1, tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω. Prenant le point A comme pôle, écrire les équations du mouvement de l'élément AB, si $OA = O_1B = a$ et $OO_1 = AB = b$ $(a < b)$; à l'instant initial la manivelle OA était dirigée suivant OO_1.

Rép. $x_A = a \cos \omega t$; $y_A = a \sin \omega t$; $\varphi = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a \sin \omega t}{b - a \cos \omega t}$.



Probl. 15.11

Probl. 15.12

15.12. La manivelle OA de l'antiparallélogramme articulé $OABO_1$, construit sur le petit élément OO_1, tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω.

Prenant le point A comme pôle, trouver les équations du mouvement de l'élément AB, si $OA = O_1B = a$ et $OO_1 = AB = b$ $(a > b)$; à l'instant initial la manivelle OA était dirigée suivant OO_1.

Rép. $x_A = a \cos \omega t$; $y_A = a \sin \omega t$; $\varphi = 2 \operatorname{arc\,ctg} \frac{\cos \omega t - b/a}{\sin \omega t}$.

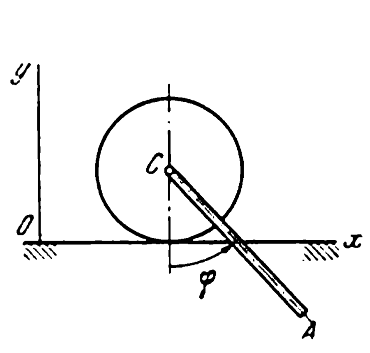
§ 16. Vitesses des points d'un corps solide en mouvement plan. Centre instantané des vitesses

16.1. Ayant orienté l'axe perpendiculairement à la vitesse de n'importe quel point d'une figure plane, montrer que les projections des vitesses de tous les points sur cet axe appartenant à cette figure sont nulles.

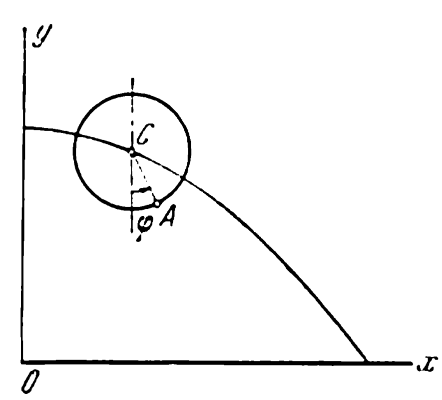
16.2. Le centre C d'une roue roulant sur un rail horizontal rectiligne se déplace suivant la loi $x_C = 2t^2$ cm. La tige AC de longueur $l = 12$ cm effectue un mouvement oscillatoire autour de l'axe horizontal C perpendiculaire au plan de la figure d'après l'équation $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} t$ rd.

Déterminer la vitesse de l'extrémité A de la tige AC à l'instant $t = 0$.

Rép. La vitesse est dirigée vers la droite suivant l'horizontale et son module est égal à 9,86 cm/s.



Probl. 16.2



Probl. 16.4

16.3. Dans les hypothèses du problème précédent déterminer la vitesse de l'extrémité A de la tige AC à l'instant $t = 1$ s.

Rép. La vitesse est dirigée vers la droite suivant l'horizontale et son module est égal à 4 cm/s.

16.4. Les équations du mouvement du centre C d'un disque de rayon $r = 20$ cm se déplaçant dans le plan vertical xy sont: $x_C = 10t$ m, $y_C = (100 - 4{,}9t^2)$ m. Le disque, tout en se déplaçant, tourne autour de l'axe horizontal C perpendiculaire au plan du disque avec une vitesse angulaire constante $\omega = \frac{\pi}{2}$ s^{-1}.

Déterminer la vitesse du point A sur la périphérie du disque à l'instant initial $t = 0$. La position du point A sur le disque est définie par l'angle $\varphi = \omega t$ compté à partir de la verticale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Rép. La vitesse est dirigée vers la droite suivant l'horizontale et son module est égal à 10,31 m/s.

16.5. Déterminer, dans les hypothèses du problème précédent, la vitesse du point A à l'instant $t = 1$ s.

Rép. $v_{A_x} = 10$ m/s; $v_{A_y} = -9{,}49$ m/s; $v_A = 13{,}8$ m/s.

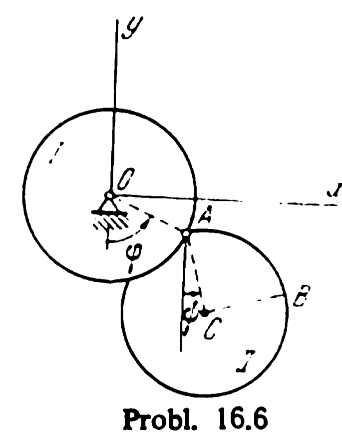
16.6. Deux disques identiques de rayon r sont reliés par une articulation cylindrique A. Le disque I tourne autour d'un axe horizontal fixe O suivant la loi $\varphi=\varphi(t)$. Le disque II tourne autour d'un axe horizontal A suivant la loi $\psi=\psi(t)$. Les axes O et A sont perpendiculaires au plan de la figure. Les angles φ et ψ sont comptés à partir de la verticale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Trouver la vitesse du centre C du disque II.

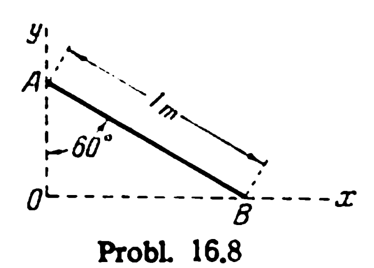
Rép. $v_{C_x}=r(\dot\varphi\cos\varphi+\dot\psi\cos\psi)$;

$v_{C_y}=r(\dot\varphi\sin\varphi+\dot\psi\sin\psi)$;

$v_C=r\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)}$.



Probl. 16.6



Probl. 16.8

16.7. Trouver, dans l'hypothèse du problème précédent, la vitesse du point B du disque II, si $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{2}$.

Rép. $v_{B_x}=r[\dot\varphi\cos\varphi+\sqrt{2}\,\dot\psi\cos(45^\circ+\psi)]$;

$v_{B_y}=r[\dot\varphi\sin\varphi+\sqrt{2}\,\dot\psi\sin(45^\circ+\psi)]$;

$v_B=r\sqrt{\dot\varphi^2+2\dot\psi^2+2\sqrt{2}\,\dot\varphi\dot\psi\cos[45^\circ-(\varphi-\psi)]}$.

16.8. Les extrémités de la tige AB d'une longueur de 1 m reposent sur deux droites orthogonales Ox et Oy pendant son mouvement.

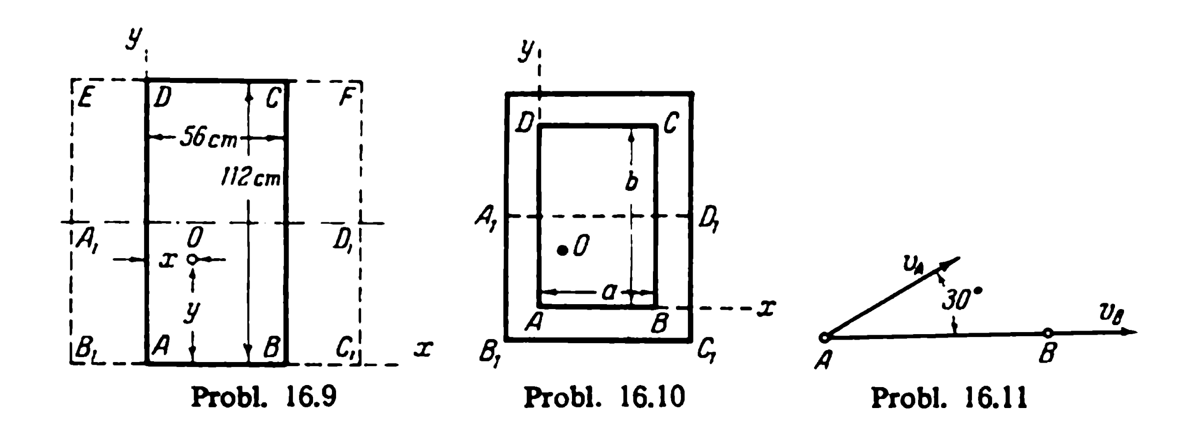
Trouver les coordonnées x et y du centre instantané des vitesses à l'instant où $\widehat{OAB}=60^\circ$.

Rép. $x=0{,}866$ m; $y=0{,}5$ m.

16.9. La planche d'une table pliante de forme rectangulaire $ABCD$ de côtés $AB=56$ cm et $AD=112$ cm tourne autour de l'axe O et occupe la position $A_1B_1C_1D_1$, où $AB_1=BC_1$; en dépliant la table on obtient le carré B_1EFC_1.

Déterminer la position de l'axe O (voir fig p. 144).

Rép. $x=14$ cm; $y=42$ cm.



Probl. 16.9 Probl. 16.10 Probl. 16.11

16.10. La planche d'une table pliante de forme rectangulaire de côtés a et b passe de la position $ABCD$ à la position $A_1B_1C_1D_1$ après rotation autour de l'axe O, et forme un rectangle de côtés b et $2a$ lorsqu'elle est dépliée.

Déterminer la position de l'axe O par rapport aux côtés AB et AD.

Rép. $x_O = \frac{a}{4}$; $y_O = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.

16.11. La droite AB se déplace dans le plan de la figure. A un certain instant la vitesse v_A du point A forme avec la droite AB un angle de 30° et est égale à 180 cm/s, la direction de la vitesse du point B étant confondue avec celle de la droite AB à cet instant.

Déterminer la vitesse v_B du point B.

Rép. $v_B = 156$ cm/s.

16.12. La droite AB se déplace dans le plan de la figure, son extrémité A restant en contact avec la demi-circonférence CAD. La droite elle-même passe toujours par le point fixe C du diamètre CD.

Probl. 16.12

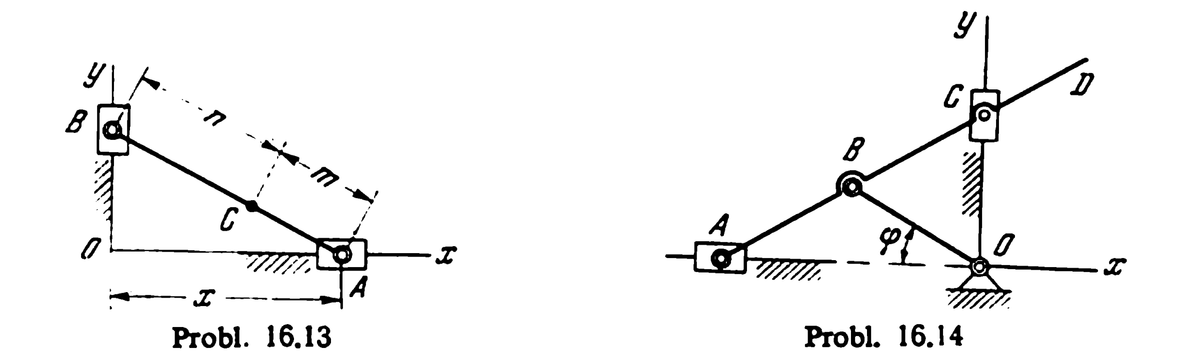
Déterminer la vitesse v_C du point de la droite qui coïncide avec le point C à l'instant où le rayon OA est perpendiculaire à CD sachant que la vitesse du point A à cet instant est de 4 m/s.

Rép. $v_C = 2{,}83$ m/s.

16.13. L'extrémité A de la règle de l'ellipsographe AB de longueur l se déplace le long de l'axe Ox, son extrémité B le long de l'axe Oy. L'extrémité A de la règle effectue un mouvement oscillatoire harmonique $x = a \sin \omega t$, où $a < l$.

Déterminer la valeur de la vitesse v du point C, si l'on sait que $CA = m$, $BC = n$, $\omega = \text{const}$.

Rép. $v_C = \frac{a\omega}{l} \cos \omega t \sqrt{n^2 - m^2 + \frac{m^2 l^2}{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t}}$.



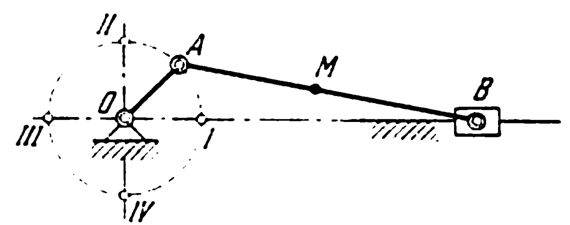
Probl. 16.13 Probl. 16.14

16.14. Une tige OB tourne autour de l'axe O avec une vitesse angulaire constante $\omega = 2s^{-1}$ et entraîne la tige AD dont les points A et C se déplacent suivant les axes horizontal Ox (point A) et vertical Oy (point C).

Déterminer la vitesse du point D de la tige pour $\varphi = 45°$ et trouver l'équation de la trajectoire de ce point, si $AB = OB = BC = CD = 12$ cm.

Rép. $v_D = 53{,}66$ cm/s; $\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1.$

16.15. Dans un système bielle-manivelle la longueur de la manivelle $OA = 40$ cm, celle de la bielle $AB = 2$ m; la manivelle tourne uniformément avec la vitesse angulaire de 180 tr/mn.



Probl. 16.15

Trouver la vitesse angulaire ω de la bielle et la vitesse de son point médian M pour quatre positions de la manivelle pour lesquelles $\widehat{AOB} = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

Rép. *I.* $\omega = -\frac{6}{5}\pi$ s^{-1}; $v_M = 377$ cm/s;

II. $\omega = 0$; $v_M = 754$ cm/s;

III. $\omega = \frac{6}{5}\pi$ s^{-1}; $v_M = 377$ cm/s;

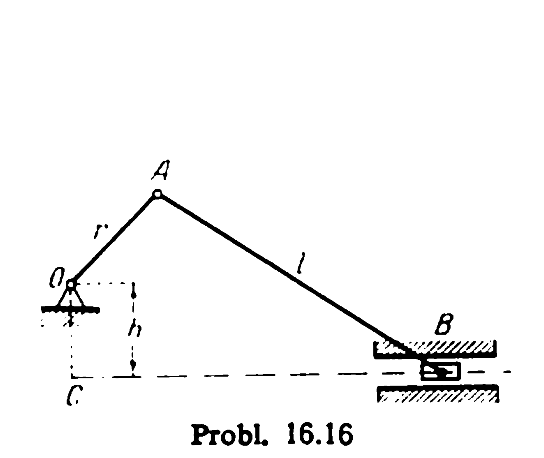
IV. $\omega = 0$; $v_M = 754$ cm/s.

Le signe moins dans l'expression de ω indique que le sens de rotation de la bielle est contraire à celui de la manivelle.

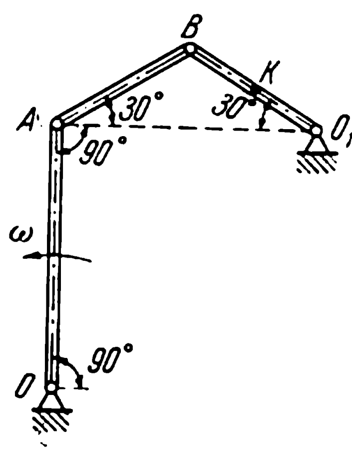
16.16. Trouver la vitesse du coulisseau B d'un système bielle-manivelle excentrique pour deux positions horizontales et deux positions verti-

cales de la manivelle tournant autour de l'arbre O avec la vitesse angulaire $\omega=1,5\ s^{-1}$, si $OA=40$ cm, $AB=200$ cm, $OC=20$ cm.

Rép. $v_1=v_3=6,03$ cm/s; $v_2=v_4=60$ cm/s.



Probl. 16.16



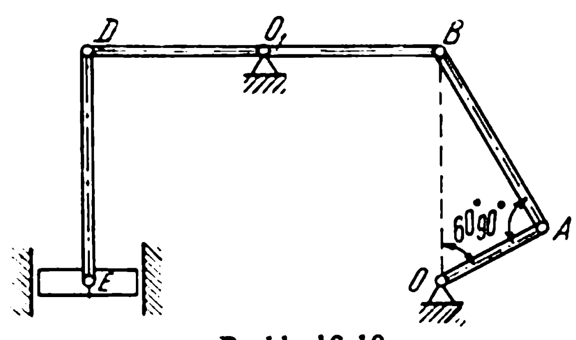
Probl. 16.17

16.17. Déterminer la vitesse du point médian K de la tige O_1B du mécanisme $OABO_1$ dans la position indiquée sur la figure, si, à l'instant donné, la vitesse angulaire de l'élément OA mesurant 20 cm est de $2\ s^{-1}$.

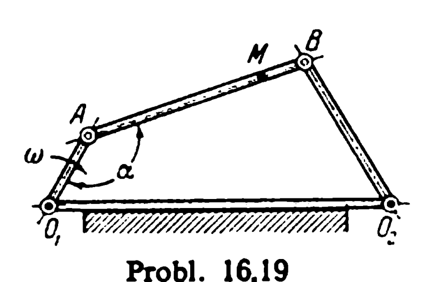
Rép. 20 cm/s.

16.18. Déterminer la vitesse du piston E du mécanisme de commande d'une pompe dans la position indiquée sur la figure, si $OA=20$ cm, $O_1B=O_1D$. La manivelle OA tourne uniformément avec la vitesse angulaire de $2\ s^{-1}$.

Rép. 46,25 cm/s.



Probl. 16.18



Probl. 16.19

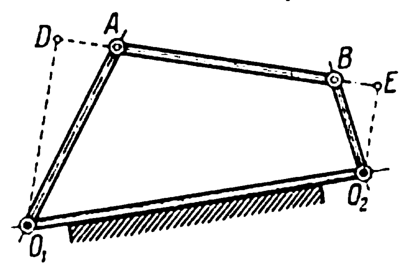
16.19. Les éléments O_1A et O_2B reliés avec l'élément AB par des couples cinématiques A et B peuvent tourner autour des points fixes O_1 et O_2 tout en restant dans un même plan et formant un mécanisme articulé. Etant données la longueur de l'élément $O_1A=a$ et sa vitesse angulaire ω déterminer par construction le point M de l'élément AB dont la vitesse est dirigée suivant cet élément; trouver également la valeur de la vitesse v du point M à l'instant où $\widehat{O_1AB}=\alpha$.

Rép. $v_M=a\omega\sin\alpha$.

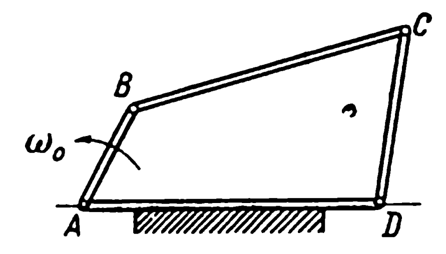
16.20. La vitesse angulaire de l'élément O_1A du mécanisme à articulations est ω_1.

Exprimer la vitesse angulaire ω_2 de l'élément O_2B en fonction de ω_1 et des plus courtes distances O_1D et O_2E des axes de rotation des éléments O_1A et O_2B à la bielle AB.

Rép. $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{O_1D}{O_2E}$.



Probl. 16.20



Probl. 16.21

16.21. Dans un mécanisme articulé $ABCD$ la manivelle motrice AB tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega_0 = 6\pi$ s^{-1}.

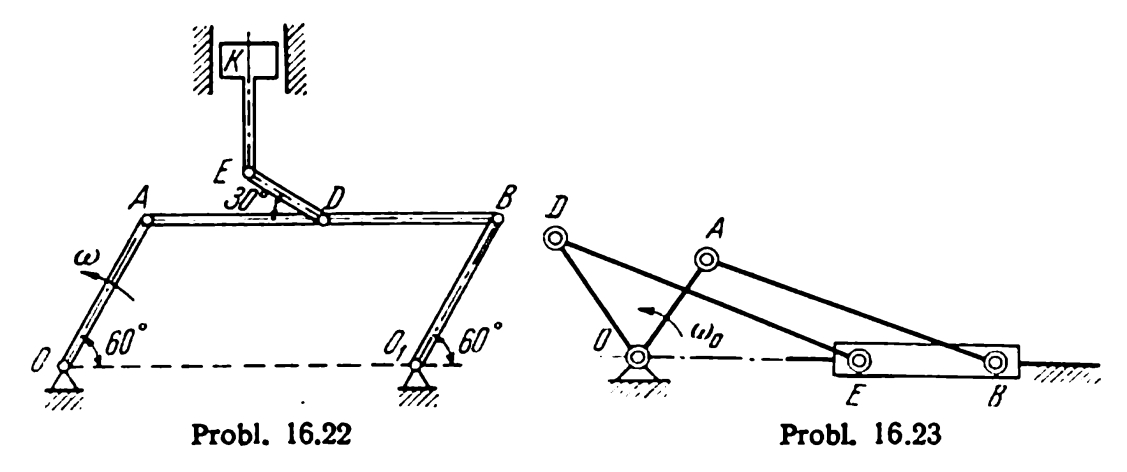
Déterminer les vitesses angulaires instantanées de la manivelle CD et de l'élément BC à l'instant où la manivelle AB et l'élément BC forment une seule droite, si $BC = 3AB$.

Rép. $\omega_{BC} = 2\pi$ s^{-1}; $\omega_{CD} = 0$.

16.22. La tige DE est articulée au point médian D de l'élément AB du parallélogramme à articulations $OABO_1$ et met en mouvement de translation alternatif le coulisseau K.

Déterminer la vitesse du coulisseau K et la vitesse angulaire de la tige DE dans la position indiquée sur la figure, si $OA = O_1B = 2DE = 20$ cm; la vitesse angulaire de l'élément OA, à l'instant donné, est de 1 s^{-1}.

Rép. $v_K = 40$ cm/s; $\omega_{DE} = 3{,}46$ s^{-1}.



Probl. 16.22

Probl. 16.23

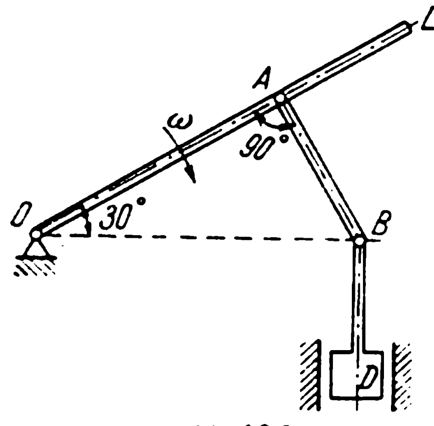
16.23. Les coulisseaux B et E d'un système bielle-manivelle doublé sont raccordés par la barre BE. La manivelle motrice OA et la manivelle

entraînée OD oscillent autour de l'axe commun fixe O perpendiculaire au plan de la figure.

Déterminer les vitesses angulaires instantanées de la manivelle entraînée OD et de la bielle DE à l'instant où la manivelle motrice OA, dont la vitesse angulaire instantanée est $\omega_0 = 12\ s^{-1}$, est perpendiculaire au guide des coulisseaux. $OA = 10$ cm; $OD = 12$ cm; $AB = 26$ cm; $EB = 12$ cm; $DE = 12\sqrt{3}$ cm.

Rép. $\omega_{OD} = 10\sqrt{3}\ s^{-1}$; $\omega_{DE} = \frac{10}{3}\sqrt{3}\ s^{-1}$.

16.24. Le piston D d'une presse hydraulique est actionné par le mécanisme articulé à levier $OABD$. La vitesse angulaire du levier OL, dans la position indiquée sur la figure, est $\omega = 2\ s^{-1}$.



Probl. 16.24

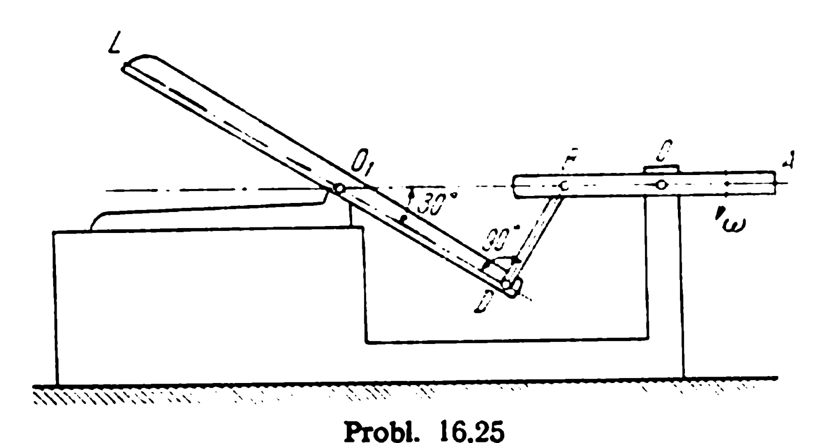
Déterminer la vitesse du piston D et la vitesse angulaire de l'élément AB, si $OA = 15$ cm.

Rép. $v_D = 34{,}6$ cm/s; $\omega_{AB} = 2\ s^{-1}$.

16.25. La lame mobile L de ciseaux à métal est actionnée par le mécanisme articulé à levier $AOBD$.

Déterminer la vitesse de l'articulation D et la vitesse angulaire de l'élément BD si, dans la position indiquée sur la figure, la vitesse angulaire du levier AB est de $2\ s^{-1}$, $OB = 5$ cm, $O_1D = 10$ cm.

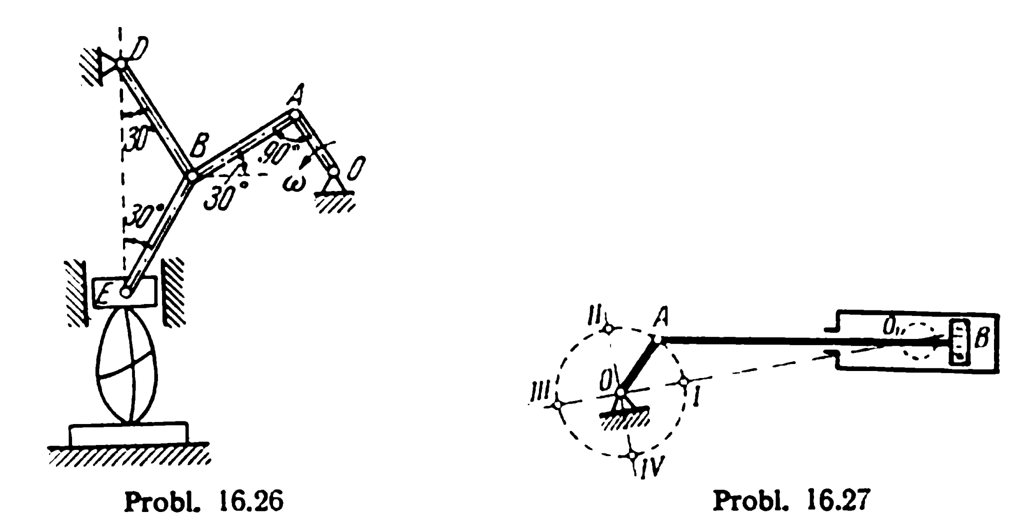
Rép. $v_D = 8{,}65$ cm/s; $\omega_{BD} = 0{,}87\ s^{-1}$.



Probl. 16.25

16.26. Déterminer la vitesse du piston E et les vitesses angulaires des éléments AB et BE du mécanisme d'une presse, dans la position indiquée sur la figure, si la vitesse angulaire de l'élément OA à l'instant donné est $\omega = 4\ s^{-1}$, $OA = 10$ cm, $BD = BE = 20$ cm.

Rép. $v_E = 40$ cm/s; $\omega_{AB} = 0$; $\omega_{BE} = 2\ s^{-1}$.



Probl. 16.26 Probl. 16.27

16.27. Dans une machine à cylindre pivotant la longueur de la manivelle $OA=12$ cm, la distance entre l'axe de l'arbre et celui du pivot du cylindre $OO_1=60$ cm, la longueur de la bielle $AB=60$ cm.

Déterminer la vitesse du piston pour les quatre positions de la manivelle, indiquées sur la figure, si la vitesse angulaire de la manivelle $\omega=5\ \mathrm{s}^{-1}=$ $=\mathrm{const}$.

Rép. $v_I=15$ cm/s; $v_{III}=10$ cm/s; $v_{II}=v_{IV}=58{,}88$ cm/s.

16.28. Dans une machine à cylindre pivotant la longueur de la manivelle $OA=15$ cm, sa vitesse angulaire $\omega_0=15\ \mathrm{s}^{-1}=\mathrm{const}$.

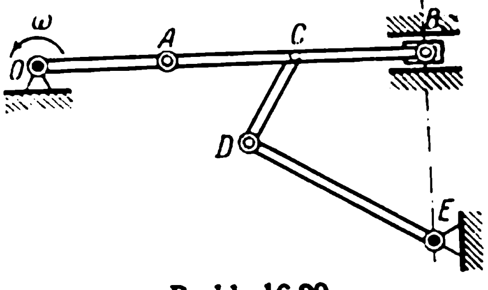
Trouver la vitesse du piston et la vitesse angulaire du cylindre à l'instant où la manivelle est perpendiculaire à la bielle (cf. la figure du problème 16.27).

Rép. $v=225$ cm/s; $\omega=0$.

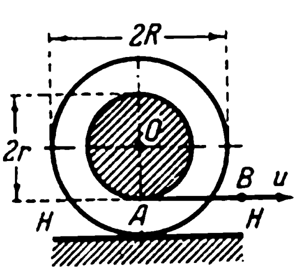
16.29. Un système à manivelle est articulé au point médian C de la bielle à l'élément CD et ce dernier à l'élément DE qui peut tourner autour de l'axe E.

Déterminer la vitesse angulaire de l'élément DE, dans la position du système indiquée sur la figure, si les points B et E sont situés sur la même verticale; la vitesse angulaire ω de la manivelle OA est de $8\ \mathrm{s}^{-1}$; $OA=25$ cm, $DE=100$ cm, $\widehat{CDE}=90°$, $\widehat{BED}=30°$.

Rép. $\omega_{DE}=0{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$.



Probl. 16.29



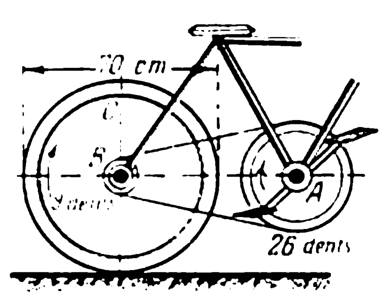
Probl. 16.30

16.30. Une bobine de rayon R roule sur un plan horizontal HH sans glisser. Une ficelle est enroulée sur la partie cylindrique moyenne de rayon r de la bobine. La vitesse de l'extrémité B de la ficelle dans la direction horizontale lors de ce mouvement est u. (Voir fig. p. 149.)

Déterminer la vitesse v du déplacement de l'axe de la bobine.

Rép. $v=u\ \frac{R}{R-r}$.

16.31. La transmission par chaîne d'une bicyclette consiste en une chaîne enroulée sur la roue dentée A de 26 dents et sur le pignon B de 9 dents. Le pignon B est solidaire de la roue arrière C dont le diamètre est de 70 cm.



Probl. 16.31

Déterminer la vitesse de la bicyclette lorsque la roue A effectue 1 tr/s, la roue C roulant sans glisser sur un chemin rectiligne.

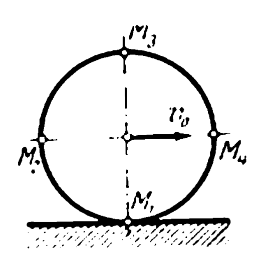
Rép. 22,87 km/h.

16.32. Une roue de rayon $R=0,5$ m roule sans glisser sur une voie rectiligne; la vitesse de son centre v_0 est constante et est égale à 10 m/s. 5

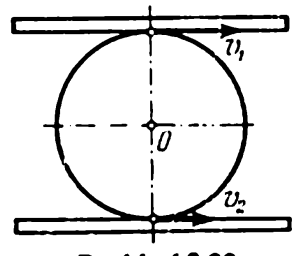
Trouver les vitesses des extrémités M_1, M_2, M_3 et M_4 des diamètres vertical et horizontal de la roue. Déterminer sa vitesse angulaire.

Rép. $v_1=0$, $v_2=14,14$ m/s; $v_3=20$ m/s; $v_4=14,14$ m/s; $\omega=20\ s^{-1}$.

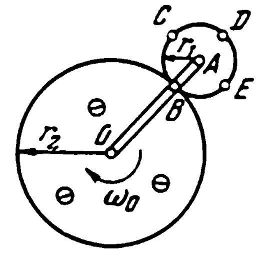
16.33. Deux règles parallèles se déplacent dans le même sens avec des vitesses constantes $v_1=6$ m/s et $v_2=2$ m/s, et serrent un disque de rayon $a=0,5$ m qui roule entre elles sans glisser.



Probl. 16.32



Probl. 16.33



Probl. 16.34

Trouver la vitesse angulaire du disque et la vitesse de son centre.

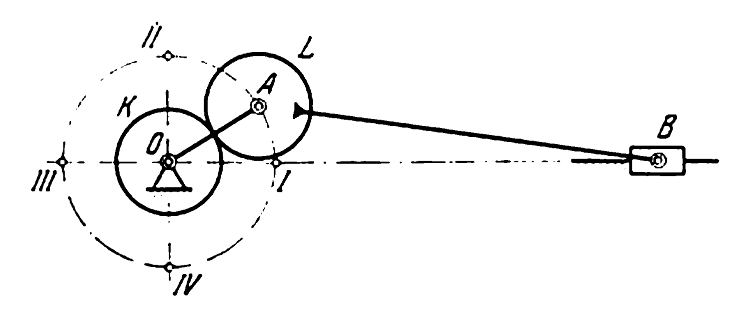
Rép. $\omega=4\ s^{-1}$; $v_O=4$ m/s.

16.34. Une manivelle OA tourne autour de l'axe O d'un pignon fixe de rayon $r_2=15$ cm avec la vitesse angulaire $\omega_0=2,5\ s^{-1}$ et entraîne le pignon de rayon $r_1=5$ cm fixé à son extrémité A.

Déterminer la valeur et la direction des vitesses des points A, B, C, D et E du pignon mobile, si $CE \perp BD$.

Rép. $v_A=50$ cm/s; $v_B=0$; $v_D=100$ cm/s; $v_C=v_E=70,7$ cm/s.

16.35. Une roue dentée K de diamètre de 20 cm et la manivelle OA longue de 20 cm non solidaires l'une de l'autre sont fixées sur l'axe O. La roue dentée L d'un diamètre de 20 cm est solidaire d'une bielle AB longue de 1 m. La roue K tourne uniformément avec la vitesse angulaire $n=$



Probl. 16.35

$=60$ tr/mn et, s'engrenant avec la roue L, entraîne la bielle AB et la manivelle OA.

Déterminer la vitesse angulaire ω_1 de la manivelle OA dans ses deux positions horizontales et ses deux positions verticales.

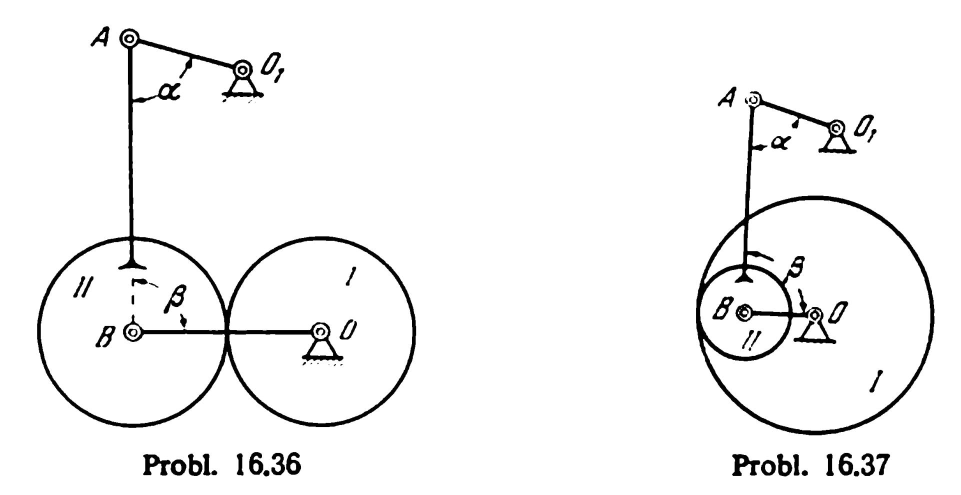
Rép. *I.* $\omega_1=\frac{10}{11}\pi\ s^{-1}$. *III.* $\omega_1=\frac{10}{9}\pi\ s^{-1}$.

II. $\omega_1=\pi\ s^{-1}$. *IV.* $\omega_1=\pi\ s^{-1}$.

16.36. Le mécanisme de Watt est formé par une coulisse oscillante O_1A (autour de l'axe O_1) qui entraîne par l'intermédiaire de la bielle AB la manivelle OB tournant librement autour de l'axe O. La roue I est fixée sur ce même axe O; la bielle AB est solidaire, à son extrémité B, d'une roue II.

Déterminer les vitesses angulaires de la manivelle OB et de la roue I à l'instant où $\alpha=60°$, $\beta=90°$, si $r_1=r_2=30\sqrt{3}$ cm, $O_1A=75$ cm, $AB=150$ cm et la vitesse angulaire de la coulisse oscillante $\omega_0=6\ s^{-1}$.

Rép. $\omega_{OB}=3{,}75\ s^{-1}$; $\omega_I=6\ s^{-1}$.



Probl. 16.36 Probl. 16.37

16.37. Un différentiel planétaire est formé par la manivelle O_1A entraînant la bielle AB, la coulisse oscillante OB et le pignon I de rayon $r_1=25$ cm;

la bielle AB est solidaire à son extrémité B du pignon II de rayon $r_2=10$ cm.

Déterminer les vitesses angulaires de la manivelle O_1A et de la roue I à l'instant où $\alpha=45°$, $\beta=90°$, si $O_1A=30\sqrt{2}$ cm, $AB=150$ cm, la vitesse angulaire de la coulisse oscillante OB $\omega=8$ s^{-1}.

Rép. $\omega_I=5{,}12$ s^{-1}; $\omega_0=4$ s^{-1}.

16.38. Dans une machine à cylindre pivotant la longueur de la manivelle $OA=r$ et la distance $OO_1=a$. La manivelle tourne avec une vitesse angulaire constante ω_0.

Déterminer la vitesse angulaire ω_1 de la bielle AB en fonction de la rotation φ de la manivelle. Calculer la plus grande et la plus petite valeur de ω_1 ainsi que la valeur de l'angle φ pour laquelle $\omega_1=0$ (cf. la figure du problème 16.27).

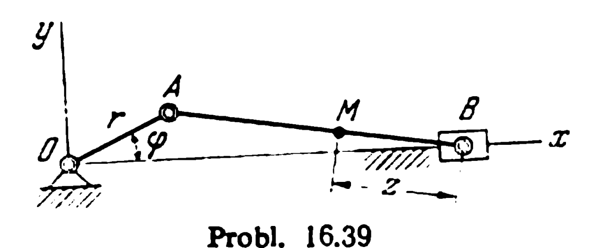
Rép. $\omega_1=\dfrac{\omega_0 r(a\cos\varphi-r)}{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}$;

$$\omega_{1\,\max}=\frac{\omega_0 r}{a-r}\ \text{pour}\ \varphi=0;$$

$$\omega_{1\,\min}=-\frac{\omega_0 r}{a+r}\ \text{pour}\ \varphi=\pi;$$

$$\omega_1=0\ \text{pour}\ \varphi=\arccos\frac{r}{a}.$$

16.39. Trouver l'expression approchée de la projection sur les axes de coordonnées de la vitesse d'un point quelconque M de la bielle AB d'un système à manivelle lorsque l'arbre tourne uniformément avec la vitesse



Probl. 16.39

angulaire ω. Supposer que la longueur de la manivelle r est petite devant celle de la bielle l. La position du point M est définie par sa distance $MB=z$.

Remarque. La formule que l'on obtient après avoir résolu le problème renferme l'expression $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}$, où $\varphi+\omega t$ désigne l'angle $\widehat{BOA}$. Développer cette expression en série et retenir seuls les deux premiers termes.

Rép. $v_x=-\omega\left[r\sin\varphi+\dfrac{(l-z)r^2}{2l^2}\sin 2\varphi\right]$;

$$v_y=\frac{zr}{l}\omega\cos\varphi.$$

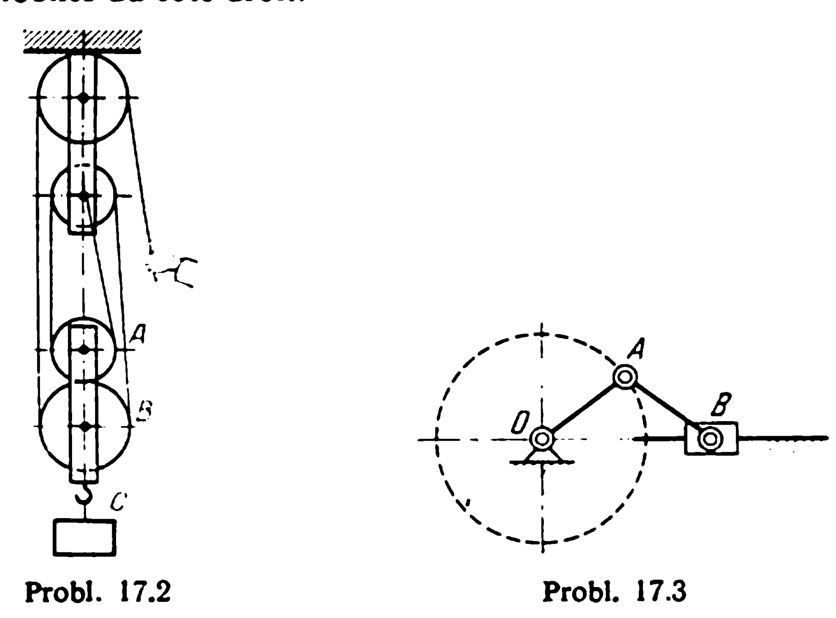
§ 17. Centroïdes fixe et mobile

17.1. Trouver les centroïdes lors du mouvement de la tige AB indiqué au problème 16.8.

Rép. La centroïde mobile est la circonférence du rayon de 0,5 m centrée au milieu de la tige AB; la centroïde fixe est la circonférence d'un rayon de 1 m centrée en O.

17.2. Déterminer les centroïdes fixe et mobile des poulies A et B d'un palan dont les rayons sont respectivement r_A et r_B; supposer que le chargeur (la frette) C est animé d'un mouvement de translation.

Rép. Les centroïdes mobiles sont: pour la poulie A la circonférence de rayon r_A, pour la poulie B la circonférence de rayon $\frac{1}{3} r_B$; les centroïdes fixes sont les tangentes verticales aux centroïdes mobiles du côté droit.



Probl. 17.2 Probl. 17.3

17.3. Trouver géométriquement les centroïdes fixe et mobile d'une bielle AB dont la longueur est égale à celle de la manivelle

$$AB = OA = r.$$

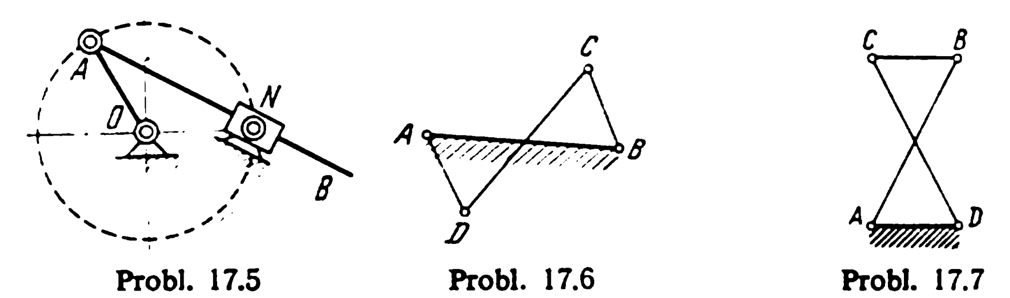
Rép. La centroïde fixe est la circonférence de rayon $2r$ centrée en O, la centroïde mobile étant la circonférence de rayon r centrée à l'extrémité A de la manivelle.

17.4. Construire graphiquement les centroïdes mobile et fixe de la bielle d'un système bielle-manivelle dont la longueur est le double de celle de la manivelle : $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$.

17.5. Le mouvement de la tige AB est tel que l'un de ses points A décrit une circonférence de rayon r centrée en O; la tige elle-même passe toujours par un point donné N, situé sur cette même circonférence.

Trouver ses centroïdes.

Rép. La centroïde fixe est la circonférence de rayon r centrée en O; la centroïde mobile est la circonférence de rayon $2r$ centrée en A.



Probl. 17.5 Probl. 17.6 Probl. 17.7

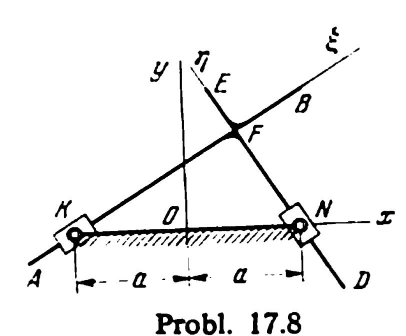
17.6. Trouver les centroïdes fixe et mobile de l'élément CD de l'antiparallélogramme construit sur un élément plus grand AB, si $AB=CD=b$, $AD=BC=a$, $a<b$.

Rép. La centroïde fixe est l'hyperbole dont les foyers sont en A et en B, la centroïde mobile est l'hyperbole identique dont les foyers sont en C et en D. Les demi-axes réels des hyperboles sont $\frac{a}{2}$.

17.7. Trouver les centroïdes fixe et mobile de l'élément BC de l'antiparallélogramme construit sur un élément plus petit AD, si $AB=CD=b$, $AD=$ $=CB=a$, $a<b$.

Rép. La centroïde fixe est l'ellipse dont les foyers sont en A et en D, de demi-axes $\frac{b}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. La centroïde mobile est une ellipse identique dont les foyers sont en B et en C.

17.8. Deux tiges AB et DE soudées orthogonalement au point F se déplacent de manière à ce que la tige AB passe toujours par le point fixe K, l'autre tige DE passant toujours par le point fixe N; la distance $KN=2a$.



Probl. 17.8

Trouver les équations des centroïdes dans ce mouvement: les axes de coordonnées sont indiqués sur la figure.

Rép. $x_C^2+y_C^2=a^2$; $\xi_C^2+\eta_C^2=4a^2$.

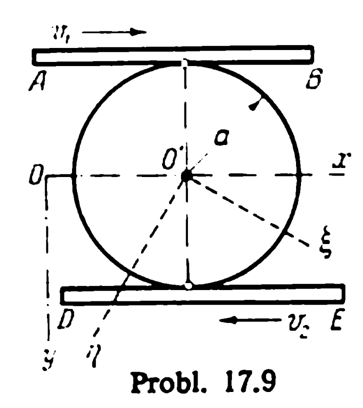
17.9. Deux règles parallèles AB et DE se déplacent en sens contraires avec des vitesses constantes v_1 et v_2. Les deux règles embrassent un disque de rayon a, qui, par suite des mouvements des règles et du frottement, roule entre ces règles sans glisser.

Trouver: 1) les équations des centroïdes du disque; 2) la vitesse $v_{O'}$ du centre O' du disque; 3) la vitesse angulaire ω du disque. Les axes de coordonnées sont indiqués sur la figure.

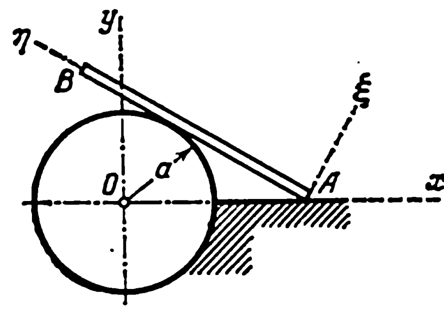
Rép. 1) $y_C=a\,\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}$; $\xi_C^2+\eta_C^2=a^2\left(\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}\right)^2$;

2) la vitesse du centre du disque est dirigée dans le sens de la plus grande des vitesses données; la grandeur $v_{O'}$ est égale à la moitié de la différence des valeurs des vitesses données;

3) $\omega = \frac{v_1+v_2}{2a}$.



Probl. 17.9



Probl. 17.10

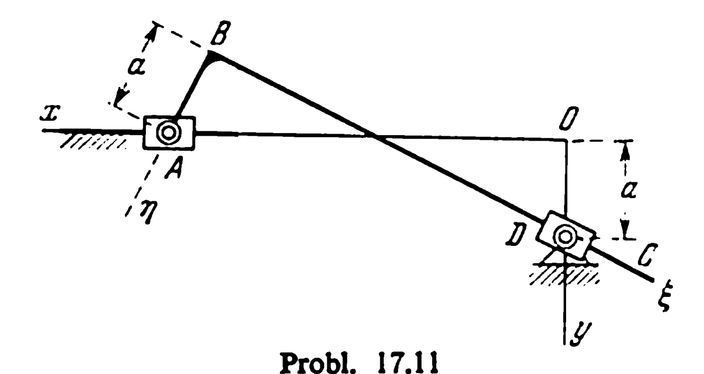
17.10. Trouver les équations des centroïdes fixe et mobile de la tige AB qui tout en s'appuyant sur la circonférence de rayon a glisse par son extrémité A sur la droite Ox passant par le centre de cette circonférence; les axes des coordonnées sont indiqués sur la figure.

Rép. $x_C^2(x_C^2-a^2)-a^2y_C^2=0$; $\eta_C^2=a\xi_C$.

17.11. L'angle droit ABC se déplace de manière à ce que le point A glisse suivant l'axe des x et que le côté BC passe par le point fixe D sur l'axe des y.

Trouver les équations des centroïdes fixe et mobile, si l'on a: $AB=$ $=OD=a$.

Rép. $x_C^2=a(2y_C-a)$; $\xi_C^2=a(2\eta_C-a)$.

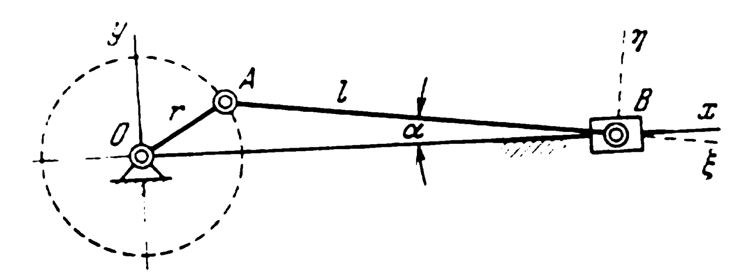


Probl. 17.11

17.12. Trouver les équations approchées des centroïdes fixe et mobile de la bielle AB d'un système à manivelle; supposer que la longueur de la bielle $AB=l$ est tellement grande par rapport à celle de la manivelle $OA=r$

que pour l'angle $\widehat{ABO}=\alpha$ on peut écrire $\sin\alpha=\alpha$ et $\cos\alpha=1$; les axes des coordonnées sont indiqués sur la figure.

Rép. $(x_C-l)^2(x_C^2+y_C^2)=r^2x_C^2$; $l^2\xi_C^2(l^2+\eta_{1C}^2)=r^2\eta_{1C}^4$.



Probl. 17.12

§ 18. Accélérations des points du corps solide lors d'un mouvement plan. Centre instantané des accélérations

18.1. Le centre C d'une roue roulant sur un rail rectiligne horizontal se déplace suivant la loi $x_C=2t^2$ cm.

La tige AC de longueur $l=12$ cm effectue des oscillations autour de l'axe horizontal C perpendiculaire au plan de la figure suivant la loi: $\varphi=$ $=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ rd (cf. la figure du problème 16.2).

Déterminer l'accélération de l'extrémité A de la tige AC à l'instant initial $t=0$.

Rép. $w_{A_x}=4$ cm/s²; $w_{A_y}=8{,}1$ cm/s²; $w_A=9{,}07$ cm/s².

18.2. Dans l'hypothèse du problème précédent déterminer l'accélération de l'extrémité A de la tige AC à l'instant $t=1$ s.

Rép. $w_{A_x}=-9{,}44$ cm/s²; $w_{A_y}=-7{,}73$ cm/s²; $w_A=12{,}20$ cm/s².

18.3. Le mouvement du centre C d'un disque de rayon $r=20$ cm qui se déplace dans le plan vertical xy est donné par les équations $x_C=10t$ m, $y_C=(100-4{,}9t^2)$ m. Tout en se déplaçant le disque tourne autour de l'axe horizontal C perpendiculaire au plan du disque avec une vitesse angulaire constante $\omega=\frac{\pi}{2}$ s⁻¹ (cf. figure du problème 16.4).

Déterminer l'accélération du point A sur la périphérie du disque à l'instant $t=0$. La position du point A sur le disque est définie par l'angle $\varphi=\omega t$ compté à partir de la verticale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Rép. L'accélération est dirigée verticalement vers le bas et son module est égal à 9,31 m/s².

18.4. Dans l'hypothèse du problème précédent, déterminer l'accélération du point A à l'instant $t=1$ s.

Rép. $w_{A_x}=-0{,}49$ m/s²; $w_{A_y}=-9{,}8$ m/s²;

$w_A=9{,}81$ cm/s².

18.5. Deux disques identiques de rayon r sont reliés par une articulation cylindrique A. Le disque I tourne autour d'un axe horizontal fixe O suivant la loi $\varphi=\varphi(t)$. Le disque II tourne autour d'un axe horizontal A suivant la loi $\psi=\psi(t)$. Les axes O et A sont perpendiculaires au plan de la figure. Les angles φ et ψ sont comptés à partir de la verticale dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (cf. la figure du problème 16.6).

Trouver l'accélération du centre C du disque II.

Rép. $w_C=\sqrt{w_{C_x}^2+w_{C_y}^2}$,

où $w_{C_x}=r(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\ddot{\psi}\cos\psi-\dot{\psi}^2\sin\psi)$,

$w_{C_y}=r(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\psi}\sin\psi+\dot{\psi}^2\cos\psi)$.

18.6. Trouver dans l'hypothèse du problème précédent l'accélération du point B du disque II, si $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{2}$.

Rép. $w_B=\sqrt{w_{B_x}^2+w_{B_y}^2}$,

où $w_{B_x}=r[\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\sqrt{2}\,\ddot{\psi}\cos(45°+\psi)-$

$-\sqrt{2}\,\dot{\psi}^2\sin(45°+\psi)]$,

$w_{B_y}=r[\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\sqrt{2}\,\ddot{\psi}\sin(45°+\psi)+$

$+\sqrt{2}\,\dot{\psi}^2\cos(45°+\psi)]$.

18.7. La règle d'un ellipsographe glisse à son extrémité B sur l'axe Ox et à son extrémité A sur l'axe Oy; $AB=20$ cm (cf. la figure du problème 15.1).

Déterminer la vitesse et l'accélération du point A à l'instant où l'angle φ formé par la règle avec l'axe Ox vaut 30°, et où les projections de la vitesse et de l'accélération du point B sur l'axe des x sont: $v_{B_x}=-20$ cm/s, $w_{B_x}=-10$ cm/s².

Rép. $v_{A_y}=34{,}64$ cm/s; $w_{A_y}=-142{,}68$ cm/s².

18.8. Les manchons A et B glissant le long des guides rectilignes sont reliés par la tige AB de longueur l. Le manchon A se déplace à une vitesse constante v_A (cf. la figure du problème 15.7).

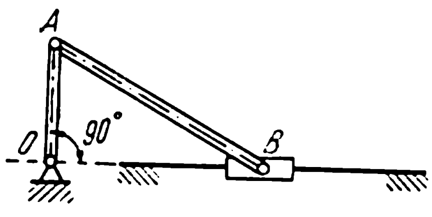
Déterminer l'accélération du manchon B et l'acélération angulaire de la tige AB lorsque la tige AB forme avec la droite OB un angle donné φ.

Rép. $w_B=\frac{v_A^2}{l}\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}$; $\varepsilon_{AB}=\frac{v_A^2}{l^2}\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}\sin\varphi$.

18.9. Trouver l'accélération du coulisseau B et le centre instantané des accélérations K de la bielle AB du système bielle-manivelle indiqué sur la figure du problème 16.39 pour deux positions horizontales et pour une position verticale de la manivelle OA tournant autour de l'arbre O avec une vitesse angulaire constante $\omega_0 = 15$ s^{-1}. La longueur de la manivelle $OA = 40$ cm, la longueur de la bielle $AB = 200$ cm.

Rép. Le centre instantané des accélérations K est, pour $\varphi = 0°$ et $\varphi = 180°$, sur l'axe du guide du coulisseau.
1) $\varphi = 0$; $w_B = 108$ m/s^2; $BK = 12$ m.
2) $\varphi = 90°$; $w_B = 18,37$ m/s^2; $BK = 40$ cm; $AK = 196$ cm.
3) $\varphi = 180°$; $w_B = 72$ m/s^2; $BK = 8$ m.

18.10. La longueur de la bielle AB d'un système bielle-manivelle est le double de celle de la manivelle OA. Déterminer la position du point de la



Probl. 18.10

lbielle AB dont l'accélération est dirigée le long de la bielle à l'instant où ta manivelle est perpendiculaire au guide du coulisseau, la manivelle OA ournant uniformément.

Rép. Le point recherché est situé au quart de la longueur de la bielle, compté à partir du coulisseau B.

18.11. Déterminer l'accélération du piston D et l'accélération angulaire de l'élément AB du mécanisme de commande d'une presse hydraulique considéré dans le problème 16.24, si dans la position indiquée sur la figure le levier OL tourne avec une accélération angulaire $\varepsilon = 4$ s^{-2}.

Rép. $w_D = 29,4$ cm/s^2, $\varepsilon_{AB} = 5,24$ s^{-2}.

18.12. La manivelle OA d'une longueur de 20 cm tourne uniformément avec la vitesse angulaire $\omega_0 = 10$ s^{-1} et entraîne la bielle AB longue de 100 cm; le coulisseau B se déplace suivant la verticale.

Trouver la vitesse et l'accélération angulaires de la bielle ainsi que l'accélération du coulisseau B à l'instant où la manivelle et la bielle sont orthogonales et forment avec l'axe horizontal des angles $\alpha = 45°$ et $\beta = 45°$.

Rép. $\omega = 2$ s^{-1}; $\varepsilon = 16$ s^{-2}; $w_B = 565,6$ cm/s^2.

18.13. Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de la bielle d'un système à manivelle excentrique ainsi que la vitesse et l'accélération du coulisseau B lorsque la manivelle OA occupe: 1) la position horizontale droite et 2) la position verticale supérieure. La manivelle tourne autour de

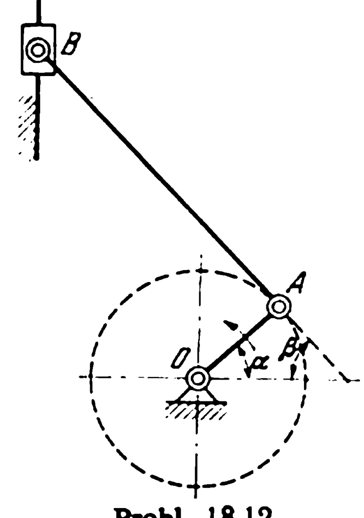
son extrémité O avec la vitesse angulaire constante ω_0 et $OA=r$, $AB=l$, la distance $OC=h$ (cf. la figure du problème 16.16).

Rép. 1) $\omega=\frac{r\omega_0}{\sqrt{l^2-h^2}}$; $\varepsilon=\frac{hr^2\omega_0^2}{(l^2-h^2)^{3/2}}$;

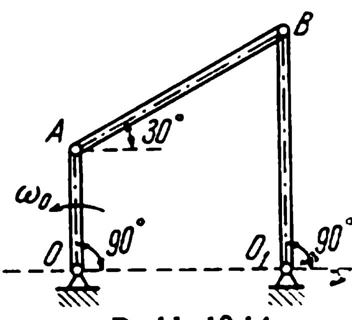
$$v_B=\frac{hr\omega_0}{\sqrt{l^2-h^2}};\quad w_B=r\omega_0^2\left[1+\frac{rl^2}{(l^2-h^2)^{3/2}}\right].$$

2) $\omega=0$; $\varepsilon=\frac{r\omega_0}{\sqrt{l^2-(r+h)^2}}$;

$$v_B=r\omega_0;\quad w_B=\frac{r(r+h)\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2-(r+h)^2}}.$$



Probl. 18.12



Probl. 18.14

18.14. L'élément OA du mécanisme à articulations $OABO_1$ tourne avec la vitesse angulaire constante ω_0.

Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de l'élément AB ainsi que l'accélération de l'articulation B dans la position indiquée sur la figure, si $AB=2OA=2a$.

Rép. $\omega=0$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2$, $\omega_B=\frac{\sqrt{3}}{3}a\omega_0^2$.

18.15. Déterminer l'accélération de l'articulation D et l'accélération angulaire de l'élément BD du mécanisme considéré dans le problème 16.25, si dans la position indiquée sur la figure le levier AB tourne avec une accélération angulaire $\varepsilon=4\ \mathrm{s}^{-2}$.

Rép. $w_D=32{,}4\ \mathrm{cm/s^2}$; $\varepsilon_{BD}=2{,}56\ \mathrm{s}^{-2}$.

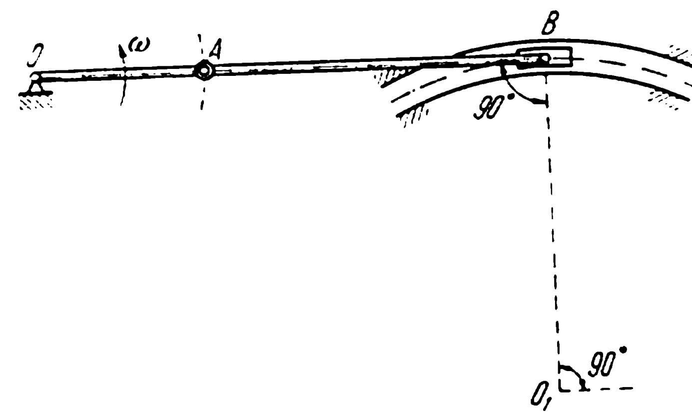
18.16. Déterminer l'accélération du piston E et l'accélération angulaire de l'élément BE du mécanisme considéré dans le problème 16.26, si à l'instant donné l'accélération angulaire de l'élément OA est nulle.

Rép. $w_E=138{,}4\ \mathrm{cm/s^2}$; $\varepsilon_{BE}=0$.

18.17. Le coulisseau B du système bielle-manivelle OAB se déplace suivant un guide curviligne.

Déterminer les accélérations tangentielle et normale du coulisseau B dans la position indiquée sur la figure, si $OA=10$ cm, $AB=20$ cm. A l'instant donné la manivelle OA tourne avec la vitesse angulaire $\omega=1\ s^{-1}$, son accélération angulaire ε étant nulle.

Rép. $w_{B_\tau}=15$ cm/s²; $w_{B_n}=0$.



Probl. 18.17

18.18. Déterminer l'accélération angulaire de la bielle AB du mécanisme considéré dans le problème précédent, si dans la position indiquée sur la figure l'accélération angulaire de la manivelle OA est 2 s^{-2}.

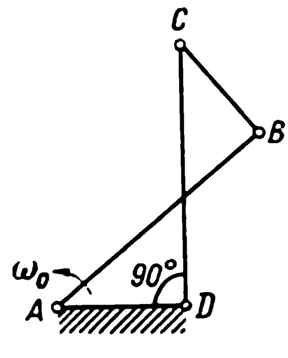
Rép. 1 s^{-2}.

18.19. Un antiparallélogramme est formé par deux manivelles AB et CD d'une même longueur de 40 cm et par la tige BC longue de 20 cm et articulée à ces manivelles. La distance entre les axes fixes A et D est de 20 cm. La manivelle AB tourne avec une vitesse angulaire constante ω_0.

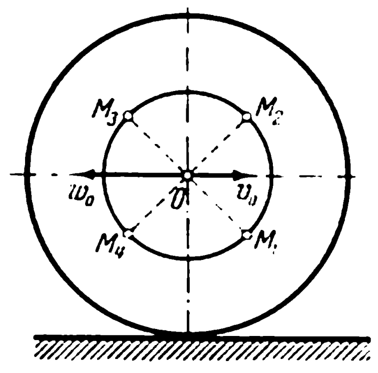
Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de la tige BC à l'instant où $\widehat{ADC}=90°$.

Rép. $\omega_{BC}=\frac{8}{3}\omega_0$, la rotation est ralentie;

$\varepsilon_{BC}=\frac{20}{9}\omega_0^2$.



Probl. 18.19



Probl. 18.22

18.20. Dans la machine à cylindre pivotant reposant sur les pivots O_1O_1, la longueur de la manivelle $OA = 12$ cm, celle de la bielle $AB = 60$ cm; la distance entre l'axe de l'arbre et l'axe des pivots du cylindre $OO_1 = 60$ cm.

Déterminer l'accélération du piston B et le rayon de courbure de sa trajectoire pour deux positions du cylindre: 1) lorsque la manivelle et la bielle sont orthogonales et 2) lorsque la manivelle occupe la position *III*; la vitesse angulaire de la manivelle $\omega_0 = \text{const} = 5\ \text{s}^{-1}$ (cf. la figure du problème 16.27).

Rép: 1) $w = 6{,}12\ \text{cm/s}^2$; $\rho = 589$ cm;

2) $w = 258{,}3\ \text{cm/s}^2$; $\rho = 0{,}39$ cm.

18.21. Le centre d'une roue roulant sans glisser sur un rail rectiligne se déplace uniformément à la vitesse v.

Déterminer l'accélération de n'importe quel point sur la périphérie de la roue, si son rayon est r.

Rép. L'accélération est dirigée vers le centre de la roue et vaut $\frac{v^2}{r}$.

18.22. Le wagon d'un tramway se déplace sur une voie rectiligne horizontale avec une décélération $w_0 = 2\ \text{m/s}^2$, sa vitesse à l'instant donné étant $v_0 = 1$ m/s. Les roues tournent sur les rails sans glisser.

Trouver les accélérations des extrémités de deux diamètres du rotor, formant avec la verticale des angles de 45°, si le rayon de la roue $R = 0{,}5$ m, celui du rotor étant $r = 0{,}25$ m.

Rép. $w_1 = 2{,}449\ \text{m/s}^2$; $w_2 = 3{,}414\ \text{m/s}^2$;

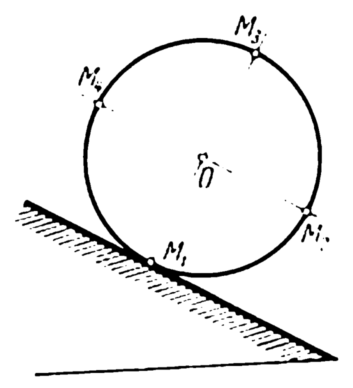
$w_3 = 2{,}449\ \text{m/s}^2$; $w_4 = 0{,}586\ \text{m/s}^2$.

18.23. Une roue tourne sans glisser dans le plan vertical sur un rail rectiligne incliné.

Trouver les accélérations des extrémités de deux diamètres orthogonaux de la roue dont l'un est parallèle au rail, si à l'instant considéré la vitesse et l'accélération du centre de la roue sont $v_0 = 1$ m/s et $w_0 = 3\ \text{m/s}^2$, le rayon de la roue $R = 0{,}5$ m.

Rép. $w_1 = 2\ \text{m/s}^2$; $w_2 = 3{,}16\ \text{m/s}^2$;

$w_3 = 6{,}32\ \text{m/s}^2$; $w_4 = 5{,}83\ \text{m/s}^2$.



Probl. 18.23

18.24. Une roue de rayon $R = 0{,}5$ m roule sans glisser sur un rail rectiligne; à l'instant considéré la vitesse et la décélération du centre O de la roue sont $v_0 = 0{,}5$ m/s, $w_0 = 0{,}5\ \text{m/s}^2$.

Trouver: 1) le centre instantané de l'accélération de la roue, 2) l'accé-

lération w_C du point de la roue confondu avec le centre instantané C des vitesses, ainsi que 3) l'accélération du point M, 4) le rayon de courbure de sa trajectoire, si $OM = MC = 0{,}5R$.

Rép. 1) $r = 0{,}3536$ m; $\theta = -\frac{\pi}{4}$; 2) $w_C = 0{,}5$ m/s²;

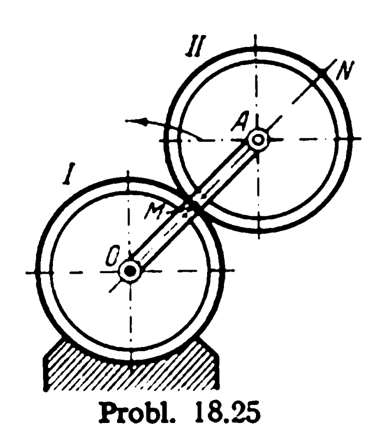
3) $w_M = 0{,}3536$ m/s²; 4) $\rho = 0{,}25$ m.

18.25. Un pignon de rayon $R = 12$ cm est entraîné par la manivelle OA tournant autour de l'axe O d'un pignon fixe de même rayon; la manivelle tourne avec une accélération angulaire $\varepsilon_0 = 8$ s^{-2}, sa vitesse angulaire à l'instant donné étant $\omega_0 = 2$ s^{-1}.

Déterminer: 1) l'accélération du point du pignon mobile qui est confondu à l'instant donné avec le centre instantané des vitesses, 2) l'accélération du point N diamétralement opposé, 3) la position du centre instantané K des accélérations.

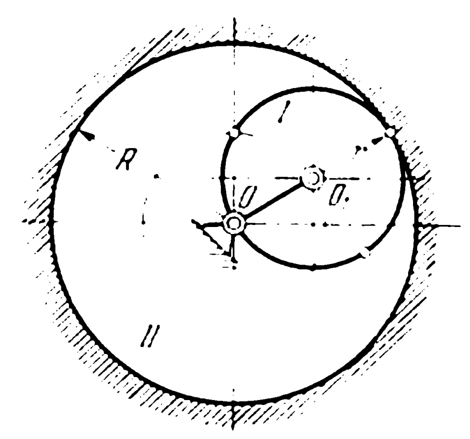
Rép. 1) $w_M = 96$ cm/s²; 2) $w_N = 480$ cm/s²;

3) $MK = 4{,}24$ cm; $\widehat{AMK} = 45°$.



Probl. 18.25

18.26. Trouver la position du centre instantané des accélérations et la vitesse v_K du point de la figure confondu avec ce centre à l'instant donné, ainsi que l'accélération w_C du point de la figure coïncidant à l'instant donné avec le centre instantané des vitesses, si le pignon I de rayon r tourne à l'intérieur du pignon II de rayon $R = 2r$ et si la vitesse angulaire constante de la manivelle OO_1 entraînant le pignon mobile est ω_0.



Probl. 18.26

Rép. Le centre instantané des accélérations est confondu avec le centre O du pignon fixe; $v_K = 2r\omega_0$; $w_C = 2r\omega_0^2$.

18.27. Trouver les accélérations des extrémités B, C, D, E de deux diamètres du pignon de rayon $r_1 = 5$ cm, roulant à l'extérieur d'un pignon fixe de rayon $r_2 = 15$ cm. Le pignon mobile est entraîné

par la manivelle OA tournant avec une vitesse angulaire constante $\omega_0=3$ s^{-1} autour de l'axe O du pignon fixe; l'un des diamètres est confondu avec la ligne OA, l'autre lui est perpendiculaire (cf. la figure du problème 16.34).

Rép. $w_B=540$ cm/s^2; $w_C=w_E=742$ cm/s^2; $w_D=900$ cm/s^2.

18.28. Montrer qu'à l'instant où l'accélération angulaire $\varepsilon=0$, les projections des accélérations des extrémités d'un segment effectuant un mouvement plan dans la direction perpendiculaire au segment sont égales.

18.29. Les accélérations des extrémités d'une tige AB longue de 10 cm effectuant un mouvement plan, sont dirigées l'une vers l'autre suivant la tige; $\omega_A=10$ cm/s^2, $w_B=20$ cm/s^2.

Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de la tige.

Rép. $\omega=\sqrt{3}$ s^{-1}, $\varepsilon=0$.

18.30. Les accélérations des extrémités d'une tige homogène AB longue de 12 cm effectuant un mouvement plan sont perpendiculaires à AB et de même sens, de plus $w_A=24$ cm/s^2, $w_B=12$ cm/s^2.

Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de la tige ainsi que l'accélération de son centre de gravité C.

Rép. $\omega=0$, $\varepsilon=1$ s^{-2}, l'accélération du point C est perpendiculaire à AB, est dirigée dans le sens des accélérations des points A et B et est égale à 18 cm/s^2.

18.31. Résoudre le problème précédent dans l'hypothèse où les accélérations des points A et B sont de sens opposés.

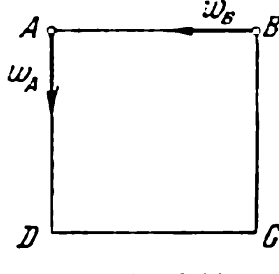
Rép. $\omega=0$, $\varepsilon=3$ s^{-2}, l'accélération du point C est perpendiculaire à AB et est dirigée dans le sens de l'accélération du point A; elle est égale à 6 cm/s^2.

18.32. Les vecteurs accélérations des sommets A et B du triangle ABC effectuant un mouvement plan sont $\boldsymbol{w}_B=\boldsymbol{w}_A=\boldsymbol{a}$.

Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires du triangle ainsi que l'accélération du sommet C.

Rép. $\omega=0$; $\varepsilon=0$; $\boldsymbol{w}_C=\boldsymbol{a}$.

18.33. Le carré $ABCD$ de côté $a=10$ cm effectue un mouvement dans le plan de la figure.



Probl. 18.33

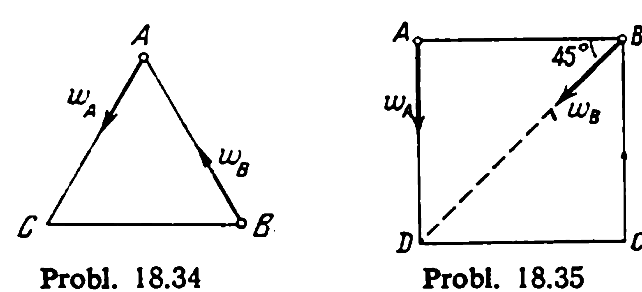
Trouver la position du centre instantané des accélérations et les accélérations des sommets C et D, si l'on sait qu'à l'instant donné les accélérations des deux sommets A et B sont égales et valent 10 cm/s². Les accélérations des points A et B sont dirigées suivant les côtés du carré, comme l'indique la figure.

Rép. $w_C = w_D = 10$ cm/s² et sont dirigées suivant les côtés du carré. Le centre instantané des accélérations est à l'intersection des diagonales du carré.

18.34. Un triangle équilatéral ABC se déplace dans le plan de la figure. Les accélérations des sommets A et B valent, à l'instant donné, 16 cm/s² et sont dirigées suivant les côtés du triangle (cf. la figure).

Déterminer l'accélération du troisième sommet C du triangle.

Rép. $w_C = 16$ cm/s², elle est dirigée suivant CB, de C à B.

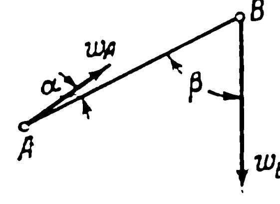


Probl. 18.34　　Probl. 18.35

18.35. Un carré $ABCD$ de côté $a = 2$ cm effectue un mouvement plan. A l'instant donné les accélérations de ses sommets A et B sont respectivement $w_A = 2$ cm/s², $w_B = 4\sqrt{2}$ cm/s² et sont dirigées comme l'indique la figure.

Trouver la vitesse et l'accélération angulaires instantanées du carré ainsi que l'accélération du point C.

Rép. $\omega = \sqrt{2}$ s⁻¹; $\varepsilon = 1$ s⁻²; $w_C = 6$ cm/s², dirigée suivant le côté CD, de C à D.



Probl. 18.36

18.36. Trouver l'accélération du point médian de la tige AB, connaissant les valeurs des accélérations à ses extrémités: $w_A = 10$ cm/s², $w_B = 20$ cm/s², les angles formés par les accélérations avec la droite AB étant: $\alpha = 10°$ et $\beta = 70°$

Rép. $w = \frac{1}{2}\sqrt{w_A^2 + w_B^2 - 2w_A w_B \cos(\beta - \alpha)} = 8{,}66$ cm/s².

CHAPITRE VI

MOUVEMENT PLAN DU CORPS SOLIDE AYANT UN POINT FIXE. ORIENTATION SPATIALE

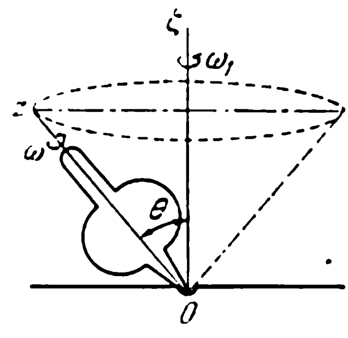
§ 19. Mouvement du corps solide ayant un point fixe

19.1. L'axe z d'une toupie décrit uniformément autour de la verticale $O\zeta$ un cône circulaire dont l'angle au sommet est 2θ. La vitesse angulaire de rotation de l'axe de la toupie autour de l'axe ζ est ω_1, la vitesse angulaire constante de rotation propre de la toupie étant ω.

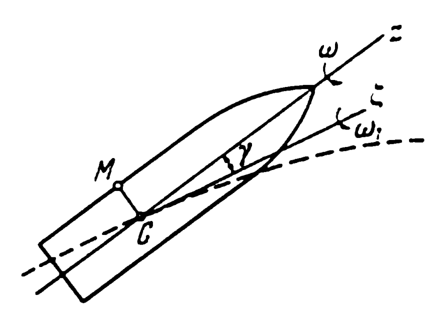
Déterminer la grandeur et la direction de la vitesse angulaire absolue Ω de la toupie.

Rép. $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}$,

$$\cos(\Omega, z) = \frac{\omega + \omega_1 \cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}}.$$



Probl. 19.1



Probl. 19.2

19.2. Un obus au cours de son mouvement dans l'atmosphère tourne autour de l'axe z avec la vitesse angulaire ω. L'axe de l'obus z tourne simultanément, avec la vitesse angulaire ω_1, autour de l'axe ζ dirigé suivant la tangente à la trajectoire du centre de gravité C de l'obus.

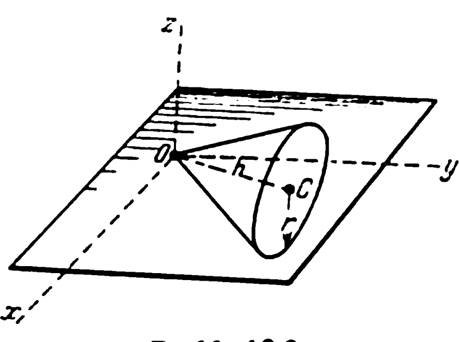
Déterminer la vitesse du point M de l'obus dans son mouvement de rotation, si $CM = r$ et si le segment CM est perpendiculaire à l'axe z; l'angle formé par les axes z et ζ vaut γ.

Rép. $v_M = (\omega + \omega_1 \cos\gamma) r$.

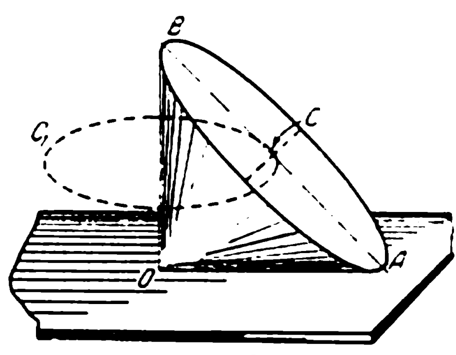
19.3. Un cône de hauteur $h = 4$ cm, de rayon de base $r = 3$ cm, roule sans glisser sur un plan, son sommet fixe étant au point O.

Déterminer la vitesse angulaire du cône, les coordonnées du point dessinant l'hodographe de la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du cône, si la vitesse du centre de la base du cône $v_C = 48$ cm/s = const. (Voir fig. p. 166.)

Rép. $\omega = 20$ s^{-1}; $x_1 = 20 \cos 15t$; $y_1 = 20 \sin 15t$; $z_1 = 0$; $\varepsilon = 300$ s^{-1}.



Probl. 19.3



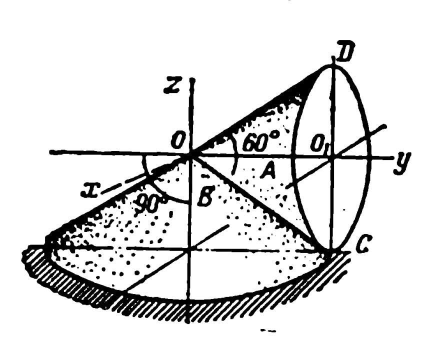
Probl. 19.4

19.4. Un cône dont le sommet O est fixe roule sur un plan sans glisser. La hauteur du cône $CO = 18$ cm, l'angle au sommet $\widehat{AOB} = 90°$. Le centre C de la base du cône se déplace uniformément et retourne à sa position initiale en 1 s.

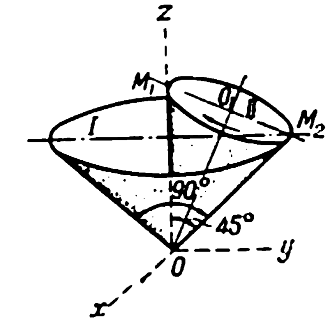
Déterminer la vitesse de l'extrémité B du diamètre AB, l'accélération angulaire du cône et les accélérations des points A et B.

Rép. $v_B = 36\pi\sqrt{2}$ cm/s $= 160$ cm/s; $\varepsilon = 39{,}5$ s^{-2}, dirigée perpendiculairement à OA et OB; $w_A = 1\,000$ cm/s^2 et est parallèle à OB; $w_B = 1\,000\sqrt{2}$ cm/s^2, se trouve dans le plan AOB et forme avec OB un angle de 45°.

19.5. Un cône A tourne 120 fois en 1 mn autour du cône fixe B. La hauteur du cône $OO_1 = 10$ cm.



Probl. 19.5



Probl. 19.7

Déterminer la vitesse angulaire d'entraînement ω_e du cône autour de l'axe z, la vitesse angulaire relative ω_r du cône autour de l'axe OO_1, la vitesse angulaire absolue ω_a et l'accélération angulaire absolue ε_a du cône.

Rép. $\omega_e = 4\pi$ s^{-1}; $\omega_r = 6{,}92\pi$ s^{-1}; $\omega_a = 8\pi$ s^{-1}, dirigée suivant l'axe OC; $\varepsilon_a = 27{,}68\pi^2$ s^{-2} et est parallèle à l'axe des x.

19.6. Déterminer, dans les hypothèses du problème précédent, les vitesses et les accélérations des points C et D du cône mobile.

Rép. $v_C = 0$; $v_D = 80\pi$ cm/s et est parallèle à l'axe des x; $w_C = 320\pi^2$ cm/s^2, dirigée perpendiculairement à OC dans le plan Oyz; les projections de l'accélération du point D sont: $w_{D_y} = -480\pi^2$ cm/s^2; $w_{D_z} = -160\sqrt{3}\,\pi^2$ cm/s^2.

19.7. Le cône II dont le sommet forme l'angle $\alpha_2=45°$ roule sans glisser à l'intérieur du cône fixe I dont l'angle au sommet est $\alpha_1=90°$. La hauteur du cône mobile $OO_1=100$ cm. Le centre O_1 de sa base décrit une circonférence en 0,5 s.

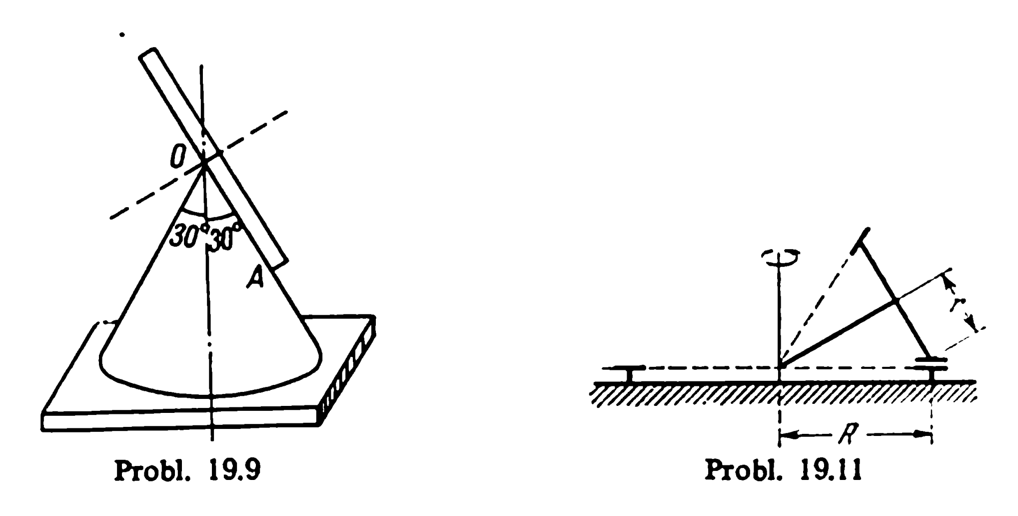
Déterminer les vitesses angulaires d'entraînement (autour de l'axe z), relative (autour de l'axe OO_1) et absolue du cône II ainsi que son accélération angulaire absolue.

Rép. $\omega_e=4\pi$ s^{-1} et est dirigée suivant l'axe des z.
$\omega_r=7{,}39\pi$ s^{-1}, dirigée suivant l'axe O_1O;
$\omega_a=4\pi$ s^{-1}, dirigée suivant l'axe OM_2;
$\varepsilon_a=11{,}3\pi^2$ s^{-2}, dirigée suivant l'axe des x.

19.8. Dans les hypothèses du problème précédent déterminer les vitesses et les accélérations des points O_1, M_1, M_2 du cône mobile.

Rép. $v_0=153{,}2\pi$ cm/s, $v_1=306{,}4\pi$ cm/s; elles sont dirigées parallèlement au demi-axe négatif Ox; $v_2=0$; $w_0=612{,}8\pi^2$ cm/s^2, dirigée de O_1 perpendiculairement à l'axe Oz; les projections de l'accélération du point M_1 : $w_{1y}=-362\pi^2$ cm/s^2, $w_{1z}=-865\pi^2$ cm/s^2; $w_2=1\,225\pi^2$ cm/s^2, est située dans le plan OO_1M_2 et dirigée perpendiculairement à OM_2.

19.9. Un disque OA de rayon $R=4\sqrt{3}$ cm tourne autour du point fixe O contre un cône fixe dont l'angle au sommet est égal à 60°. Trouver la



Probl. 19.9 Probl. 19.11

vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe de symétrie, si la valeur de l'accélération w_A du point A du disque est constante et égale à 48 cm/s^2.

Rép. $\omega=2$ s^{-1}.

19.10. Un corps est en mouvement autour d'un point fixe. A un certain moment sa vitesse angulaire est représentée par un vecteur dont les projections sur les axes des coordonnées sont $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Trouver à cet instant la vitesse v du point du corps dont les coordonnées sont $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$.

Rép. $v=0$.

19.11. Une roue dentée conique dont l'axe coupe en son centre l'axe géométrique du pignon plan d'appui tourne cinq fois sur le pignon d'appui en 1 mn. Déterminer la vitesse angulaire ω_r de rotation de la roue autour de son axe et la vitesse angulaire ω de rotation autour de l'axe instantané, si le rayon du pignon d'appui est le double de celui de la roue: $R=2r$. (Voir fig. p. 167.)

Rép. $\omega_r=1{,}047\ s^{-2}$; $\omega=0{,}907\ s^{-1}$.

19.12. La vitesse angulaire d'un corps est $\omega=7\ s^{-1}$; à un moment donné son axe instantané forme avec les axes fixes des coordonnées les angles aigus α, β et γ.

Trouver la vitesse v et ses projections v_x, v_y, v_z sur les axes des coordonnées du point du corps dont les coordonnées, évaluées en mètres, sont, à l'instant donné, 0, 2, 0, ainsi que la distance d de ce point à l'axe instantané, si $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

Rép. $v_x=-12$ m/s; $v_y=0$; $v_z=4$ m/s; $v=12{,}65$ m/s; $d=1{,}82$ m.

19.13. Trouver les équations de l'axe instantané et la vitesse angulaire ω d'un corps sachant que les projections de la vitesse du point M_1 (0, 0, 2) sur les axes des coordonnées fixés au corps sont

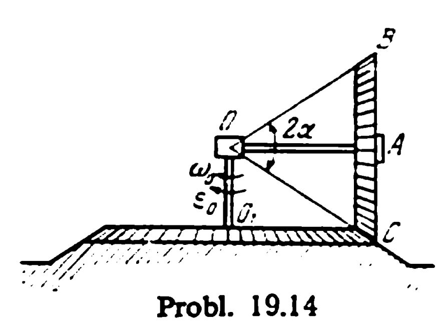
$$v_{x1}=1\ \text{m/s};\quad v_{y1}=2\ \text{m/s};\quad v_{z1}=0,$$

la direction de la vitesse du point M_2 (0, 1, 2) étant donnée par les cosinus des angles formés avec les axes des coordonnées:

$$-\frac{2}{3},\quad +\frac{2}{3},\quad -\frac{1}{3}.$$

Rép. $x+2y=0$; $3x+z=0$; $\omega=3{,}2\ s^{-1}$.

19.14. Une roue dentée conique montée librement sur la manivelle OA roule sur une base dentée conique fixe. Déterminer la vitesse ω et l'accélération ε angulaires de la roue si les modules de la vitesse et de l'accélération angulaires (leurs sens sont indiqués sur la figure) de la manivelle OA tournant autour de l'axe fixe O_1O sont respectivement ω_0 et ε_0.



Probl. 19.14

Rép. $\omega=\frac{\omega_0}{\sin\alpha}e_1$,

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{\sin\alpha}e_1+\omega_0^2\operatorname{ctg}\alpha e_2,$$

où e_1 est le vecteur unité dirigé de O à C, e_2 le vecteur unité perpendiculaire au plan OAC et dirigé vers le lecteur.

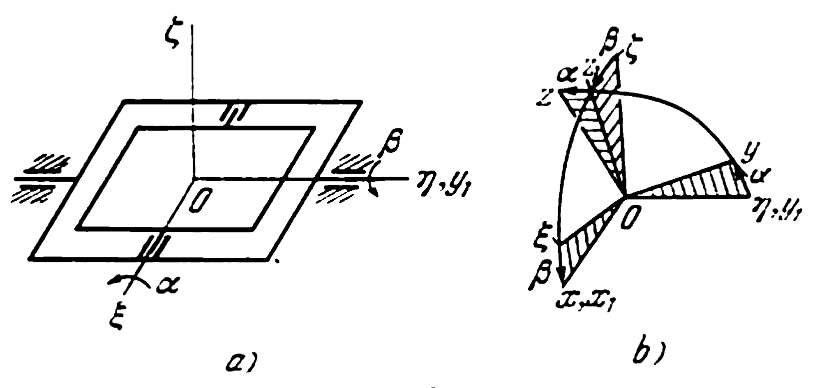
19.15. Dans les hypothèses du problème précédent déterminer les accélérations des points C et B, si le rayon de la base est R.

Rép. $w_C=\frac{R\omega_0^2}{\sin\alpha}e_3$; $w_B=2R\varepsilon_0 e_2+\frac{R\omega_0^2}{\sin\alpha}(e_4-2e_3)$,

où e_3 et e_4 sont des vecteurs unité situés dans le plan de la figure respectivement perpendiculaires aux droites OC et OB (les deux vecteurs unité sont dirigés vers le haut).

§ 20. Orientation dans l'espace; les formules cinématiques d'Euler et leurs modifications; les axoïdes

20.1. L'horizon artificiel sur un bateau en roulis est créé à l'aide d'une suspension à cardan. L'axe y_1 de rotation de l'anneau extérieur est parallèle à l'axe longitudinal du bateau; l'angle de rotation de l'anneau extérieur est désigné par β (angle de roulis). L'angle de rotation du cadre intérieur est désigné par α. Pour définir l'orientation des anneaux on introduit trois systèmes de coordonnées : le système $\xi\eta\zeta$ fixé au bateau (l'axe ξ est dirigé vers le bord droit, l'axe η vers la proue, l'axe ζ est perpendiculaire



Probl. 20.1

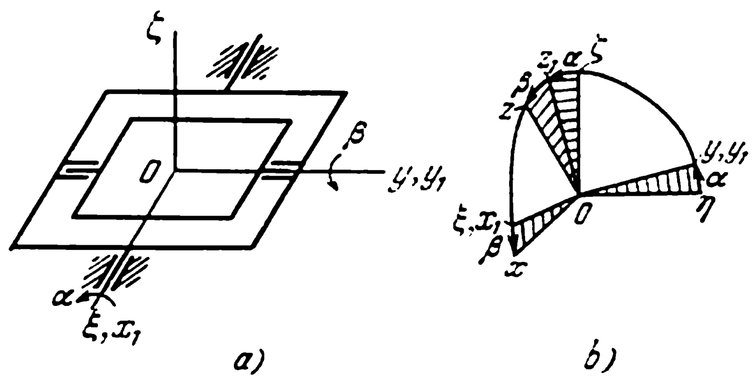
au pont); le système $x_1y_1z_1$ fixé à l'anneau extérieur (l'axe y_1 est confondu avec l'axe η); le système xyz fixé à l'anneau intérieur (l'axe x est confondu avec l'axe x_1). Les sens positifs pour le calcul des angles sont indiqués sur les figures, pour $\alpha=\beta=0$ tous les systèmes de référence sont confondus.

Déterminer l'orientation (les cosinus directeurs correspondants) de l'anneau intérieur de la suspension par rapport au bateau.

Rép.

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	0	$-\sin\beta$
y	$\sin\alpha\ \sin\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\ \cos\beta$
z	$\cos\alpha\ \sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha\ \cos\beta$

20.2. Dans un second mode de fixation de la suspension à cardan décrit dans le problème précédent, l'axe de rotation de l'anneau extérieur est parallèle à l'axe transversal du bateau. Dans ce mode de suspension l'axe ξ fixé au bateau est confondu avec l'axe x_1 de rotation de l'anneau extérieur, et l'axe y de rotation de l'anneau intérieur est confondu avec l'axe y_1 fixé à l'anneau extérieur. L'angle de rotation de l'anneau extérieur est désigné, à présent, par α (angle de tangage), et l'angle de rotation de l'anneau intérieur par β.



Probl. 20.2

Déterminer l'orientation de l'anneau intérieur de la suspension par rapport au bateau.

Rép.

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	$\sin\alpha\ \sin\beta$	$-\cos\alpha\ \sin\beta$
y	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\ \cos\beta$	$\cos\alpha\ \cos\beta$

20.3. La position d'un corps solide, ayant un point fixe O, est définie par les trois angles d'Euler: l'angle de précession ψ, l'angle de nutation θ et l'angle de rotation propre φ (cf. figure). Déterminer les cosinus directeurs du système mobile de référence $Oxyz$.

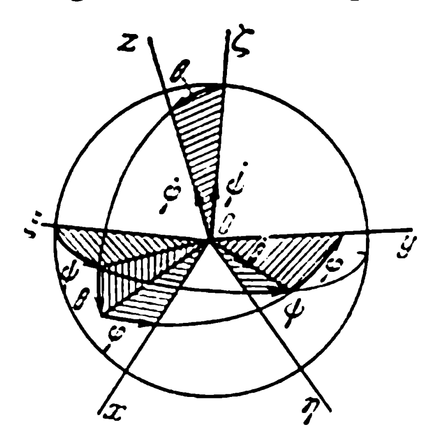
Rép.

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi$	$\sin\psi\cos\theta\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
y	$-\cos\psi\cos\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi$	$-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
z	$\cos\psi\sin\theta$	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

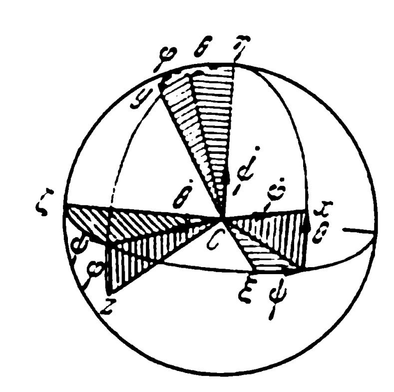
20.4. Connaissant les vitesses de variation des angles d'Euler, déterminer la vitesse angulaire du corps et ses projections sur les axes du système de référence fixe $O\xi\eta\zeta$ et mobile $Oxyz$.

Rép. $\omega=\sqrt{\dot\psi^2+\dot\theta^2+\dot\varphi^2+2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta}$; $\quad \omega_\xi=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi$,
$\omega_\eta=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi$; $\quad \omega_\zeta=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi$;
$\omega_x=-\dot\psi\sin\theta\cos\varphi+\dot\theta\sin\varphi$, $\quad \omega_y=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi$,
$\omega_z=\dot\psi\cos\theta=\dot\varphi$.

20.5. Pour déterminer le mouvement de rotation d'un avion on lui fixe un système de coordonnées orthogonales $Cxyz$; l'axe des x est dirigé suivant l'axe de l'avion, des empennages à la cabine du pilote, l'axe des y est disposé dans le plan de symétrie de l'avion et l'axe des z suivant l'envergure de l'aile à droite du pilote (C étant le centre de gravité de l'avion). Les déplacements angulaires de l'avion par rapport aux axes $C\ \xi\eta\zeta$ (l'axe horizontal



Probl. 20.3 et 20.4



Probl. 20.5 et 20.6

$C\xi$ est dirigé suivant la vitesse de l'avion, l'axe $C\eta$ est dirigé verticalement vers le haut, l'axe horizontal $C\zeta$ est perpendiculaire aux axes $C\xi$ et $C\eta$) sont définis, comme l'indique la figure, par trois angles d'avion: l'angle de lacet ψ, l'angle de tangage θ et l'angle de roulis φ.

Déterminer l'orientation de l'avion (du système de référence $Cxyz$) par rapport au trièdre $C\xi\eta\zeta$.

Rép.

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\psi\cos\theta$
y	$\sin\psi\sin\varphi-\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$	$-\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$

20.6. Connaissant les vitesses de variation des angles de l'avion, déterminer les projections de la vitesse angulaire de l'avion sur les axes des systèmes de coordonnées $Cxyz$ et $C\xi\eta\zeta$ (cf. la figure du problème précédent).

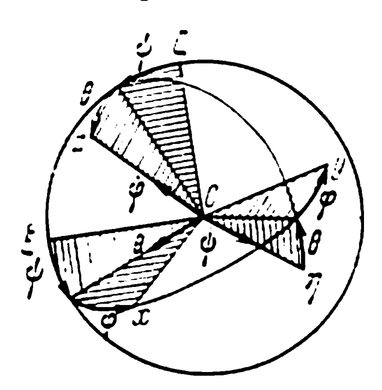
Rép. $\omega_x=\dot{\psi}\sin\theta+\dot{\varphi}$, $\omega_y=\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi+\dot{\theta}\sin\varphi$,

$\omega_z=-\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi$;

$\omega_\xi=\dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta+\dot{\theta}\sin\psi$, $\omega_\eta=\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}$,

$\omega_\zeta=-\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta+\dot{\theta}\cos\psi$.

20.7. Pour étudier le mouvement de roulis d'un bateau et sa stabilité de cap on introduit trois angles: de différence ψ, de bande θ et de louvoiement φ. Le système de référence $Cxyz$ est lié au bateau, C étant le centre de gravité du bateau; l'axe des x est dirigé de la poupe à la proue, l'axe des y vers le bord gauche, l'axe des z étant perpendiculaire



Probl. 20.7 et 20.8

au pont; le système de coordonnées $C\xi\eta\zeta$ est orienté par rapport au cap du bateau; l'axe $C\zeta$ est vertical, l'axe horizontal $C\xi$ est dirigé suivant le cap, l'axe horizontal $C\eta$ vers la gauche du cap (les systèmes d'axes indiqués sur la figure sont introduits par A. Krylov).

Déterminer l'orientation du bateau (des axes de coordonnées $Cxyz$) par rapport au trièdre $C\xi\eta\zeta$.

Rép.

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$
y	$-\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\theta$	$-\sin\vartheta$	$\cos\psi\cos\theta$

20.8. Connaissant les vitesses de variation des angles du bateau déterminer les projections de sa vitesse angulaire sur les axes des systèmes de référence $Cxyz$ et $C\xi\eta\zeta$ (cf. figure du problème précédent).

Rép. $\omega_x = \dot\psi\cos\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,$

$\omega_y = \dot\psi\cos\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,$

$\omega_z = -\dot\psi\sin\theta+\dot\varphi;$

$\omega_\xi = \dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\psi\cos\theta,$

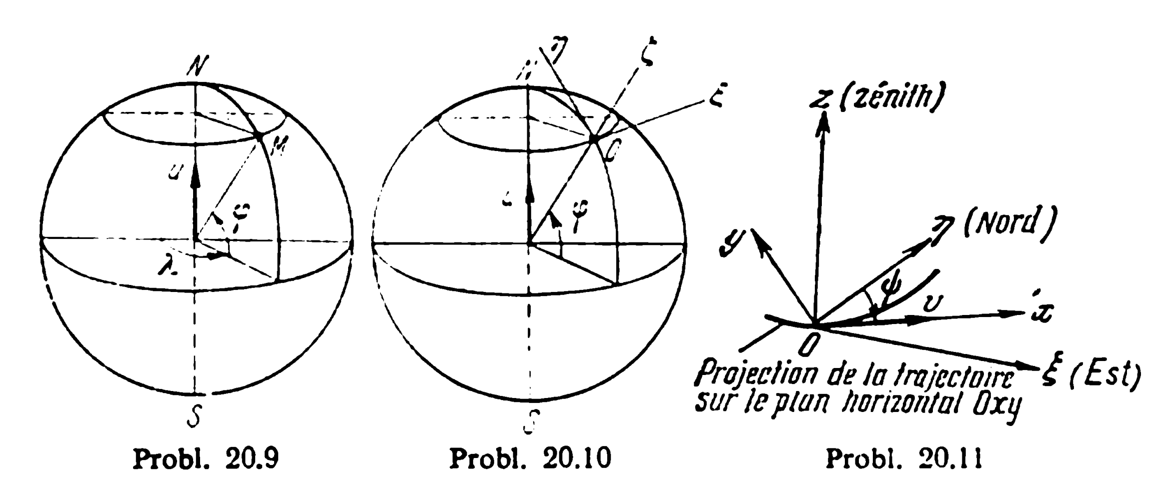
$\omega_\eta = \dot\psi-\dot\varphi\sin\theta,$

$\omega_\zeta = -\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\cos\psi\cos\theta.$

20.9. Le point M (centre de gravité d'un avion ou d'un bateau) se déplace sur la surface de la Terre considérée comme une sphère de rayon R* ; la composante est de la vitesse du point vaut v_E, la composante nord v_N. Calculer la vitesse de variation de la latitude φ et de la longitude λ de la position courante du point M.

Rép. $\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R}$, $\dot{\lambda} = \frac{v_E}{R\cos\varphi}$; pour v_E et v_N positives la composante $\dot{\varphi}$ est dirigée vers l'ouest et la composante $\dot{\lambda}$ suivant l'axe SN de rotation de la Terre du pôle Sud au pôle Nord.

20.10. Pour étudier le mouvement des corps près de la surface de la Terre (avions, fusées, bateaux) et des instruments qui y sont installés, on introduit un système de coordonnées mobile dit trièdre de Darboux. Lorsque le trièdre de Darboux $O\xi\eta\zeta$ est orienté géographiquement, l'axe



Probl. 20.9 Probl. 20.10 Probl. 20.11

horizontal $O\xi$ est dirigé vers l'est, l'axe horizontal $O\eta$ vers le nord et l'axe $O\zeta$ verticalement vers le haut. Calculer les projections sur les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ de la vitesse angulaire du trièdre $O\xi\eta\zeta$, si les projections de la vitesse de son origine (point O) par rapport à la Terre sont $v_\xi = v_E$, $v_\eta = v_N$, $v_\zeta = 0$; la vitesse angulaire de rotation de la Terre est U, le rayon de la Terre R.

Rép. $\omega_\xi = -\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R}$;

$$\omega_\eta = (U + \dot{\lambda})\cos\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi;$$

$$\omega_\zeta = (U + \dot{\lambda})\sin\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\sin\varphi.$$

20.11. Le trièdre de Darboux $Oxyz$ sur la surface de la Terre n'est pas orienté géographiquement, comme dans le problème précédent, mais

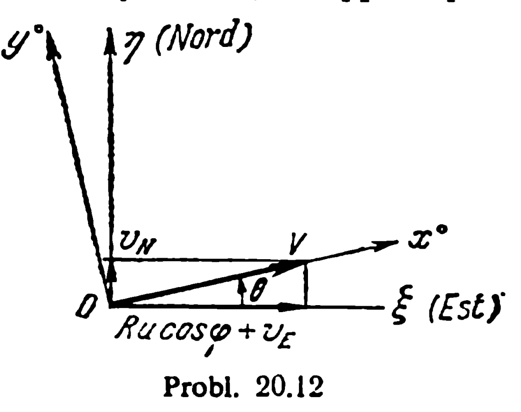
* Ici et dans ce qui suit nous faisons abstraction de l'aplatissement de la Terre.

suivant la trajectoire de la base du trièdre par rapport à la Terre: l'axe Ox est dirigé horizontalement suivant la vitesse $\boldsymbol{v}$ du sommet O (centre de gravité de l'avion, du bateau) du trièdre par rapport à la Terre, l'axe Oy est dirigé horizontalement vers la gauche de l'axe Ox, l'axe Oz verticalement vers le haut.

Calculer les projections de la vitesse angulaire du trièdre $Oxyz$, si la vitesse du point O est v, son cap étant déterminé par l'angle ψ (l'angle formé entre la direction du nord et la vitesse relative du point O).

Rép. $\omega_x = U \cos\varphi \cos\psi$; $\omega_y = U \cos\varphi \sin\psi + \frac{v}{R}$; $\omega_z = (U+\dot{\lambda}) \sin\varphi + \dot{\psi} = U \sin\varphi + \frac{v}{\rho}$. Ici, R, U, φ et λ désignent les quantités indiquées dans les problèmes 20.9. et 20.10, ρ est le rayon de courbure géodésique de la trajectoire ($\rho > 0$ pour $\dot{\psi} < 0$, $\rho < 0$ pour $\dot{\psi} > 0$).

20.12. Le trièdre de Darboux $Ox^0y^0z^0$ sur la surface de la Terre est orienté de la manière suivante: l'axe Ox^0 est dirigé suivant la vitesse absolue V du point O (on suppose qu'il se déplace sur la surface de la Terre), l'axe horizontal Oy^0 est dirigé vers la gauche de l'axe Ox^0, l'axe Oz^0 est vertical.



Probl. 20.12

Déterminer les projections de la vitesse angulaire du trièdre $Ox^0y^0z^0$, si les composantes de la vitesse du point O par rapport à la Terre sont v_E et v_N.

Rép. $\omega_{x^0} = 0$, $\omega_{y^0} = \frac{V}{R}$,

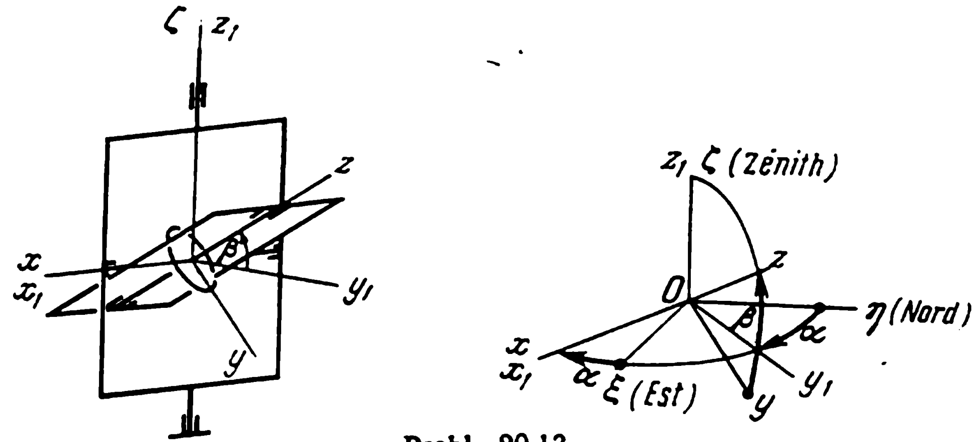
$$\omega_{z^0} = (U+\dot{\lambda}) \sin\varphi + \dot{\theta},$$

où R, U, φ et λ désignent les quantités introduites dans les problèmes 20.9. et 20.10,

$$V = \sqrt{(v_E + RU\cos\varphi)^2 + v_N^2} \text{ et } \operatorname{tg}\theta = \frac{v_N}{v_E + RU\cos\varphi}.$$

20.13. Un gyroscope de direction est monté sur une suspension à cardan. Le système de coordonnées $x_1y_1z_1$ est fixé au cadre extérieur (son axe de rotation est vertical), le système xyz au cadre intérieur (son axe de rotation est horizontal). L'axe z du cadre intérieur est en même temps l'axe de rotation propre du gyroscope.

Déterminer: 1) l'orientation de l'axe z de rotation du gyroscope par rapport aux axes $\xi\eta\zeta$ orientés géographiquement (cf. problème 20.10), si la rotation du cadre extérieur (de l'axe y_1) est comptée à partir du plan méridien (le plan $\eta\zeta$) dans le sens des aiguilles d'une montre et est définie par l'angle α, l'angle formé par l'axe z avec l'horizontale étant β.



Probl. 20.13

2) les projections sur les axes x, y, z de la vitesse angulaire de rotation du trièdre xyz; le point O de suspension du gyroscope est fixe par rapport à la Terre.

Rép. 1)

	ξ	η	ζ
z	$\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$

2) $\omega_x=\dot\beta-U\cos\varphi\sin\alpha$, $\omega_y=\dot\alpha\cos\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-$ $-\sin\varphi\cos\beta)$, $\omega_z=\dot\alpha\sin\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta)$, où U est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, φ la latitude du lieu.

20.14. Déterminer, dans les hypothèses du problème précédent, les projections de la vitesse angulaire de rotation du trièdre xyz, si les composantes nord et est de la vitesse du point de suspension sont respectivement v_N et v_E.

Rép. $\omega_x=\dot\beta-\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi\sin\alpha-\frac{v_N}{R}\cos\alpha$,

$$\omega_y=\dot\alpha\cos\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-\sin\varphi\cos\beta)-$$
$$-\frac{v_N}{R}\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\omega_z=\dot\alpha\sin\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta),$$

où R est le rayon de la Terre.

20.15. Le mouvement d'un corps autour d'un point fixe est donné par les angles d'Euler:

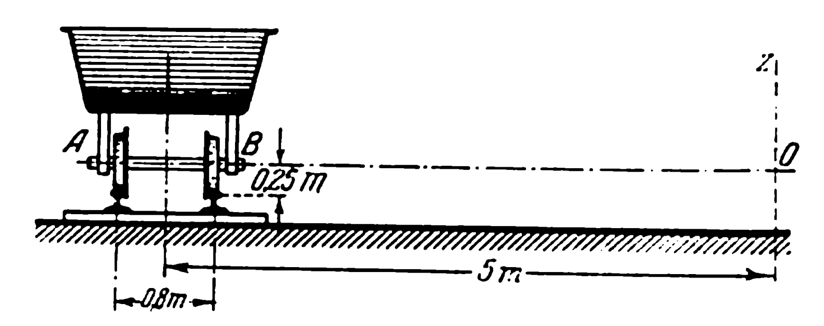
$$\varphi=4t;\quad \psi=\frac{\pi}{2}-2t,\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

Déterminer les coordonnées du point décrivant l'hodographe de la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération angulaires du corps par rapport aux axes fixes x, y, z.

Rép. $x=\omega_x=2\sqrt{3}\cos 2t$, $y=\omega_y=-2\sqrt{3}\sin 2t$,
$z=\omega_z=0$; $\omega=2\sqrt{3}\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon=4\sqrt{3}\ \mathrm{s}^{-2}$.

20.16. Trouver les axoïdes fixe et mobile de la roue extérieure d'un wagon roulant sur une voie horizontale dont le rayon de courbure moyen est de 5 m, le rayon de la roue 0,25 m et la largeur de la voie 0,80 m.

Remarque. La roue tourne avec le wagon autour de l'axe vertical Oz passant par le centre de courbure de la voie et par rapport au wagon, autour de l'axe AB, autrement dit, elle tourne autour du point fixe O.



Probl. 20.16

Rép. L'axoïde fixe est un cône dont l'axe est confondu avec l'axe Oz et dont l'angle au sommet $\alpha=2$ arc tg $21{,}6=174°42'$. L'axoïde mobile est un cône d'axe AB et d'angle au sommet $\beta=$ $=2$ arc tg $0{,}046\,3=5°18'$.

20.17. Le mouvement d'un corps autour d'un point fixe est donné par les angles d'Euler suivants: $\varphi=nt$, $\psi=\frac{\pi}{2}+ant$, $\vartheta=\frac{\pi}{3}$. Déterminer les projections de la vitesse et de l'accélération angulaires du corps sur les axes fixes, si a et n sont des constantes. Indiquer également la valeur du paramètre a pour laquelle l'axoïde fixe du corps est le plan Oxy.

Rép. $w_x=\frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\omega_y=\frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant$,

$\omega_z=n\left(a+\frac{1}{3}\right)$;

$\varepsilon_x=-\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\varepsilon_y=\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\varepsilon_z=0$;

$a=-\frac{1}{2}$.

20.18. Les angles d'Euler définissant la position d'un corps varient suivant la loi (précession régulière): $\psi=\psi_0+n_1t$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\varphi=\varphi_0+n_2t$, où ψ_0, ϑ_0, φ_0 sont les valeurs initiales des angles, n_1 et n_2 des nombres constants

exprimant les vitesses angulaires correspondantes. Déterminer la vitesse angulaire ω du corps et les axoïdes fixe et mobile.

Rép. 1) $\omega = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 \cos \vartheta_0}$;

2) l'axoïde fixe est le cône circulaire

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 \sin^2 \vartheta_0}{(n_2 \cos \vartheta_0 + n_1)^2} \zeta^2 = 0$$

d'axe ζ et d'angle au sommet $2 \arcsin \frac{n_2 \sin \vartheta_0}{\omega}$;

3) l'axoïde mobile est le cône circulaire

$$x^2 + y^2 - \frac{n_1^2 \sin^2 \vartheta_0}{(n_1 \cos \vartheta_0 + n_2)^2} z^2 = 0$$

d'axe z et d'angle au sommet $2 \arcsin \frac{n_1 \sin \vartheta_0}{\omega}$.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT COMPOSÉ DU POINT

§ 21. Equations du mouvement du point

21.1. Déterminer l'équation du mouvement rectiligne d'un point composé de deux oscillations harmoniques:

$$x_1 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 = 3\cos(\pi t + \pi).$$

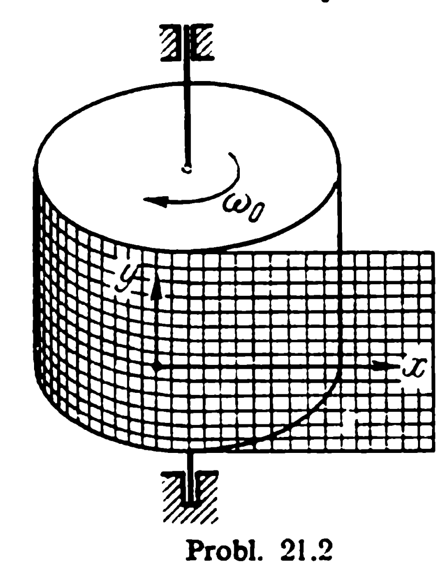
Rép. $x = \sqrt{13}\cos(\pi t + \alpha)$ ou $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{2}{3} = 33^\circ 40'$.

21.2. Le tambour d'un enregistreur tourne uniformément avec la vitesse $\omega_0\ \text{s}^{-1}$. Le rayon du tambour est r. Le stylo est monté sur un élément se déplaçant suivant la verticale d'après la loi

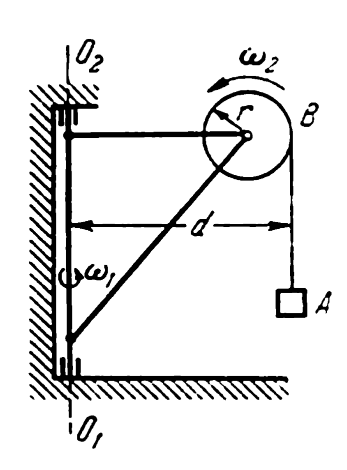
$$y = a\sin\omega_1 t.$$

Trouver l'équation de la courbe décrite par la plume sur la bande de papier.

Rép. $y = a\sin\frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}$.



Probl. 21.2



Probl. 21.3

21.3. Lors de la rotation d'une grue, pivotant autour de l'axe O_1O_2 avec une vitesse angulaire constante ω_1, la charge A monte à l'aide du câble enroulé sur le tambour B. Le tambour B de rayon r tourne avec la vitesse

angulaire constante ω_2. Déterminer la trajectoire absolue de la charge si la portée de la grue est d.

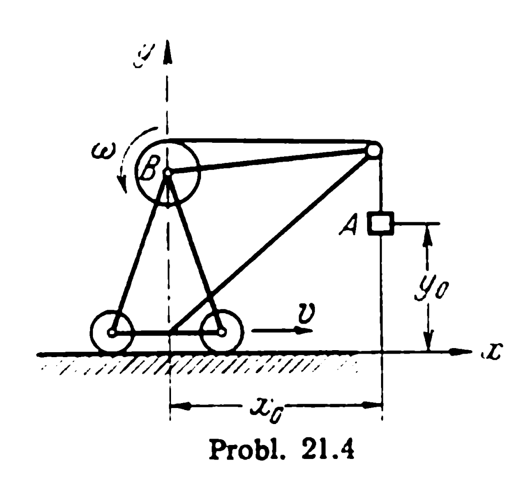
Rép. L'hélice d'équation

$$x = d\cos\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r}, \quad y = d\sin\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r};$$

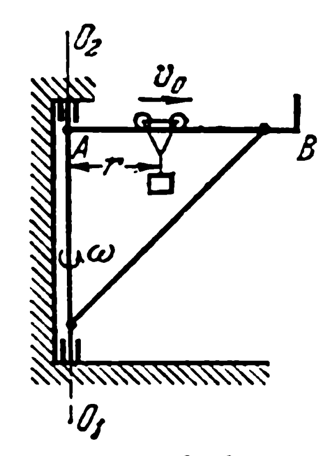
l'axe des x passe par l'axe O_1O_2 et par la position initiale de la charge, l'axe des z est dirigé vers le haut suivant l'axe de rotation de la grue.

21.4. Lors du fonctionnement simultané des mécanismes qui montent une charge et déplacent une grue, la charge A se déplace dans les directions horizontale et verticale. Le tambour B de rayon $r=50$ cm sur lequel est enroulé le câble portant la charge A, tourne, après démarrage, avec la vitesse angulaire $\omega=2\pi$ s^{-1}. La grue se déplace dans le sens horizontal avec une vitesse constante $v=0{,}5$ m/s. Déterminer la trajectoire absolue de la charge, si les coordonnées initiales de la charge sont $x_0=10$ m, $y_0=6$ m.

Rép. $y=\frac{x-x_0}{v}\omega r+y_0=6{,}28\,x-56{,}8$.



Probl. 21.4



Probl. 21.5

21.5. La flèche AB d'une grue pivotante tourne autour de l'axe O_1O_2 avec une vitesse angulaire constante ω. Un chariot se déplace sur cette flèche horizontale de A vers B avec une vitesse constante v_0.

Déterminer la trajectoire absolue du chariot, si à l'instant initial le chariot se trouvait sur l'axe O_1O_2.

Rép. La trajectoire est une spirale d'Archimède

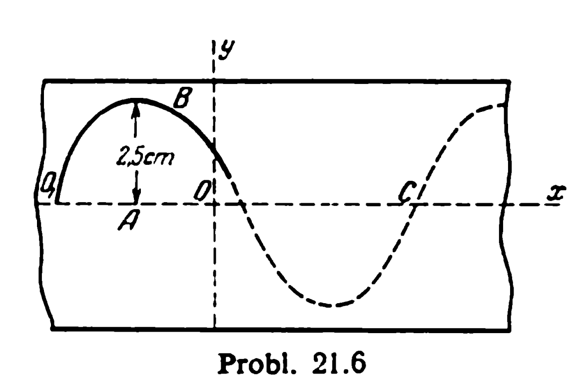
$$r=\frac{v_0}{\omega}\varphi,$$

où r est la distance du chariot à l'axe de rotation, φ l'angle de rotation de la grue autour de l'axe O_1O_2.

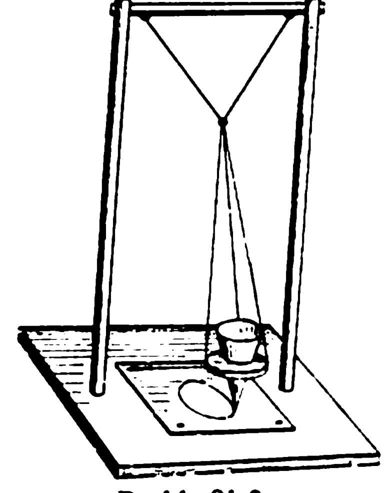
21.6. Le ruban d'un enregistreur de mouvements oscillatoires se déplace dans la direction Ox avec une vitesse de 2 m/s. Le corps oscillant suivant l'axe Oy décrit sur le ruban une sinusoïde dont la plus grande ordonnée $AB=2{,}5$ cm, la longueur $O_1C=8$ cm. Trouver l'équation du mouve-

ment oscillatoire du corps. Le point O de la sinusoïde correspond à la position du corps lorsque $t=0$.

Rép. $y=2{,}5 \sin (50\, \pi t)$ cm.



Probl. 21.6



Probl. 21.8

21.7. Un tramway se déplace uniformément sur une voie rectiligne horizontale avec la vitesse $v=18$ km/h; le wagon, qui repose sur des ressorts, effectue alors des oscillations harmoniques d'amplitude $a=0{,}8$ cm et de période $T=0{,}5$ s. Trouver l'équation de la trajectoire du centre de gravité du wagon, si sa distance moyenne de la voie $h=1{,}5$ m. Pour $t=0$ le centre de gravité se trouve à la position moyenne, la vitesse de l'oscillation étant dirigée vers le haut. L'axe Ox est dirigé horizontalement suivant la voie dans le sens du mouvement, l'axe Oy verticalement vers le haut et passe par le centre de gravité pour $t=0$.

Rép. $y=1{,}5+0{,}008 \sin 0{,}8\pi x$.

21.8. Trouver les équations de la trajectoire du mouvement composé de l'extrémité d'un pendule double effectuant simultanément deux oscillations harmoniques orthogonales de même fréquence mais d'amplitudes et de phases différentes, si les équations des oscillations indiquées sont:

$$x=a \sin (\omega t+\alpha), \quad y=b \sin (\omega t+\beta).$$

Rép. L'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab} \cos (\alpha-\beta)=\sin^2 (\alpha-\beta).$$

21.9. L'extrémité d'un pendule double décrit une figure de Lissajous représentant la somme de deux oscillations harmoniques orthogonales:

$$x=a \sin 2\omega t, \quad y=a \sin \omega t.$$

Trouver l'équation de la trajectoire.

Rép. $a^2x^2=4y^2 (a^2-y^2)$.

21.10. Un train se déplace uniformément à la vitesse de 30 km/h; la lanterne de signalisation accrochée au dernier wagon se décroche de son

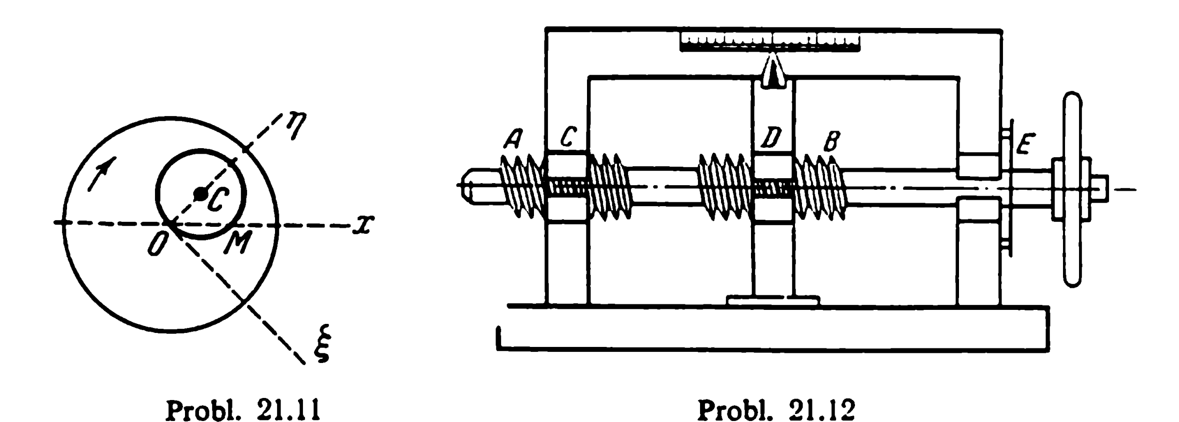
support. Déterminer la trajectoire du mouvement absolu de la lanterne et la longueur du chemin s parcouru par le train lors de la chute de la lanterne, si la hauteur de cette dernière au-dessus de la terre était 4,905 m. Les axes de coordonnées passent par la position initiale de la lanterne, l'axe Ox est dirigé horizontalement dans le sens du mouvement du train, l'axe Oy verticalement, vers le bas.

Rép. La parabole d'axe vertical $y=0{,}070\,6x^2$; $s=8\frac{1}{3}$ m (x et y sont évaluées en mètres, t en secondes).

21.11. Un outil M effectue un mouvement de translation alternatif dans le sens latéral suivant la loi $x=a\sin\omega t$. Trouver l'équation de la trajectoire de l'extrémité de l'outil M par rapport au disque tournant uniformément avec la vitesse angulaire ω autour de l'axe O coupant la trajectoire absolue de M.

Rép. La circonférence de rayon $a/2$ centrée en C

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}\text{ (cf. figure).}$$



Probl. 21.11 Probl. 21.12

21.12. Dans certains appareils de mesure et de division on utilise pour déplacer l'indicateur une vis différentielle constituée par l'axe AB comportant dans sa partie A un filet de vis de pas h_1 mm et en sa partie B un filet de vis de pas $h_2<h_1$. La partie A tourne dans un écrou fixe C, tandis que la partie B est saisie par l'élément D qui ne tourne pas et qui est lié à l'indicateur glissant le long de l'échelle fixe.

1) Déterminer le déplacement de l'indicateur lorsque le volant de l'axe fait $1/n^{\text{ième}}$ de tour (l'échelle correspondante est portée sur le disque E), si $n=200$, $h_1=0{,}5$ mm et $h_2=0{,}4$ mm. Les deux filets sont de sens directs, soit de sens indirects.

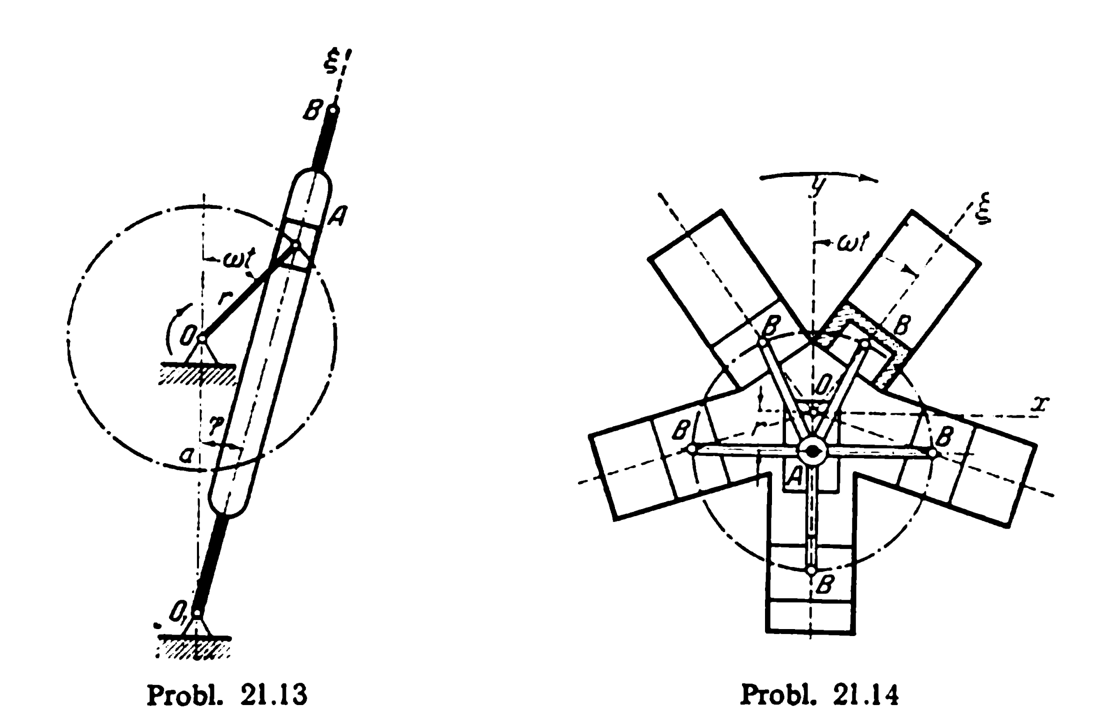
2) Comment varie l'indication de l'instrument, si le fillet de vis de la partie A est de sens indirect, celui de la partie B étant de sens direct.

Rép. 1) $s=\frac{1}{n}(h_1-h_2)=0{,}000\,5$ mm.

2) $s=\frac{1}{n}(h_1+h_2)=0{,}004\,5$ mm.

21.13. Le mécanisme d'accélération d'une raboteuse comporte deux arbres parallèles O et O_1, une manivelle OA et une coulisse O_1B. L'extrémité de la manivelle OA est articulée avec le coulisseau glissant le long de la fente pratiquée dans la coulisse O_1B. Trouver l'équation du mouvement relatif du coulisseau dans la fente de la coulisse et l'équation de rotation de la coulisse elle-même, étant donné que la manivelle OA de longueur r tourne avec une vitesse angulaire constante ω et la distance entre les axes des arbres $OO_1=a$.

Rép. $\xi=\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}$; $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{r\sin\omega t}{a+r\cos\omega t}$.



Probl. 21.13

Probl. 21.14

21.14. Dans le moteur rotatif, schématiquement indiqué sur la figure, les cylindres fixés au carter tournent avec celui-ci autour de l'axe fixe de l'arbre O, les bielles des pistons tournant autour de l'axe A de la manivelle fixe OA. Indiquer: 1) la trajectoire du mouvement absolu des points B des pistons et 2) l'équation approchée de leurs mouvements relatifs par rapport aux cylindres, si les cylindres tournent avec la vitesse angulaire ω. On a : $OA=r$ et $AB=l$. Les origines des axes Ox et Oy sont au centre de l'arbre. On suppose que $\lambda=r/l$ est petit.

Rép. 1) La circonférence $x^2+(y+r)^2=l^2$;

2) $\xi=l\left(1-\lambda\cos\omega t-\dfrac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right)$.

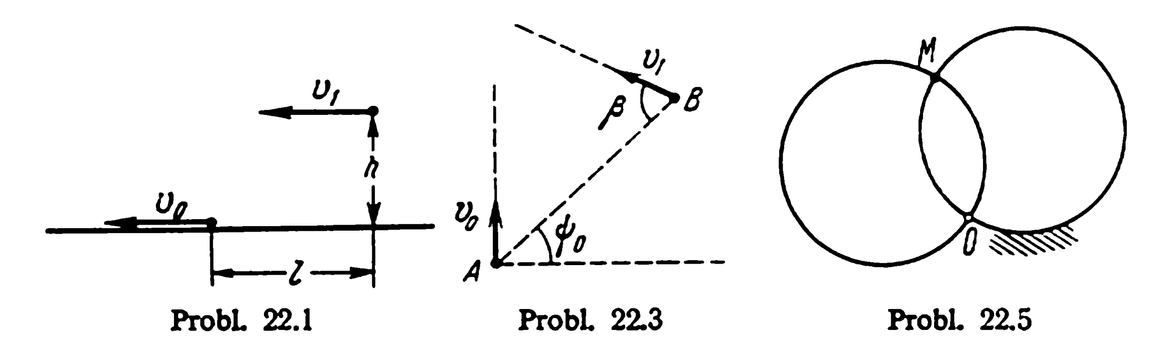
§ 22. Addition des vitesses du point

22.1. Un bateau se déplace en ligne droite avec la vitesse v_0. Un avion vole dans la même direction à l'altitude h et avec la vitesse v_1. Déterminer la distance l, comptée suivant l'horizontale, à laquelle on doit lâcher un fanion pour que celui-ci tombe sur le bateau. Négliger la résistance de l'air au mouvement du fanion.

Rép. $l=(v_1-v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

22.2. Résoudre le problème précédent, si l'avion vole avec la même vitesse à la rencontre du bateau en mouvement.

Rép. $l=(v_1+v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.



Probl. 22.1 Probl. 22.3 Probl. 22.5

22.3. Un bateau passant par le point A se déplace avec une vitesse v_0 constante en module et en direction. Déterminer l'angle β que doit faire avec la droite AB un canot partant du point B pour qu'il rencontre le bateau; la vitesse du canot est constante en module et en direction et vaut v_1. La ligne AB fait un angle ψ_0 avec la perpendiculaire au cap du bateau.

Rép. $\sin\beta=\frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0$.

22.4. Déterminer, dans le problème précédent, le temps T au bout duquel le canot rencontre le bateau, si la distance initiale entre eux était $AB=l$.

Rép. $T=\frac{l}{v_0\sin\psi_0+\sqrt{v_1^2-v_0^2\cos^2\psi_0}}=\frac{l}{v_0}\frac{\sin\beta}{\cos(\psi_0-\beta)}=\frac{l}{v_1}\frac{\cos\psi_0}{\cos(\psi_0-\beta)}$.

22.5. Un fil formant un cercle tourne dans son plan autour de l'articulation fixe O avec une vitesse angulaire constante ω. Etudier le déplacement du point M d'intersection de cette circonférence avec une circonférence fixe de même rayon R passant également par le point O.

Rép. Le point d'intersection contourne chacune des circonférences avec une vitesse constante ωR.

22.6. Le cap d'un bateau qui se déplace avec la vitesse de a nœuds est SE; la girouette sur le mât indique un vent E. Le bateau diminue sa

vitesse jusqu'à $a/2$ nœuds, la girouette indique un vent NE. Déterminer: 1) la direction et 2) la vitesse du vent.

Remarque. La notation du cap indique où va le bateau, celle du vent, d'où il souffle.

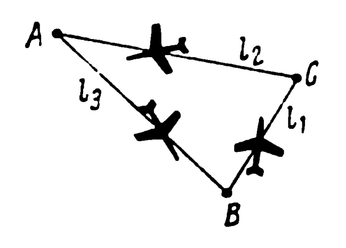
Rép. 1) Du nord; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nœuds.

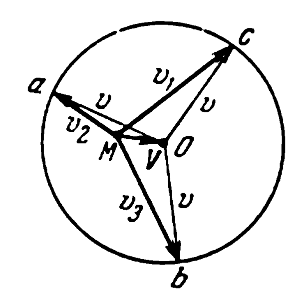
22.7. Pour déterminer la vitesse propre d'un avion dans le vent on trace sur la terre une droite de longueur connue l dont les extrémités soient visibles d'en haut. La direction de cette droite doit être confondue avec celle du vent. L'avion vole d'abord le long de cette droite dans la direction du vent en t_1 s, ensuite contre le vent en t_2 s. Déterminer la vitesse propre v de l'avion et la vitesse V du vent.

Rép. $v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ m/s $= 1{,}8l\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ km/h;

$V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$ m/s.

22.8. Pour déterminer la vitesse propre d'un avion dans le vent on trace sur la terre un triangle ABC de côtés $BC=l_1$, $CA=l_2$, $AB=l_3$ mètres.





Probl. 22.8

Pour chaque côté du triangle on détermine la durée de vol: t_1, t_2, t_3 s. Déterminer la vitesse propre v de l'avion, en supposant qu'elle est constante, et la vitesse V du vent. Résoudre le problème graphiquement.

Explication. On appelle vitesse propre de l'avion sa vitesse par rapport à l'air.

Rép. D'un point arbitraire M on porte trois vecteurs respectivement égaux à l_1/t_1, l_2/t_2, l_3/t_3 et parallèles aux côtés BC, CA et AB du triangle. La vitesse v de l'avion est donnée par le rayon de la circonférence passant par les extrémités de ces vecteurs. La vitesse du vent est donnée par le vecteur $\overrightarrow{MO}$.

22.9. Un passager se déplaçant sur une route horizontale à la vitesse de 72 km/h voit, à travers la vitre latérale de la voiture, les trajectoires des gouttes de pluie inclinées de 40° par rapport à la verticale. Déterminer la

vitesse absolue de chute des gouttes de pluie tombant verticalement, si l'on fait abstraction de la force d'adhérence des gouttes sur la vitre.

Rép. $v = \frac{v_e}{\text{tg } 40^\circ} = 23{,}8$ m/s.

22.10. Les bords d'un fleuve sont parallèles; une barque part du point A et se déplaçant perpendiculairement aux bords atteint le bord opposé, 10 mn après le départ, au point C qui est à 120 m en aval du point A.

Pour qu'elle puisse atteindre le point B situé sur la droite AB perpendiculaire aux bords du fleuve avec la même vitesse relative, la barque doit se déplacer contre le courant suivant une trajectoire faisant un certain angle avec la droite AB; dans ce cas elle atteint le bord opposé en 12,5 mn. Déterminer la largeur du fleuve l, la vitesse relative u de la barque par rapport à l'eau et la vitesse v du courant du fleuve.

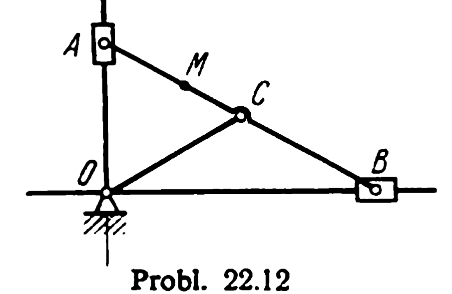
Rép. $l = 200$ m; $u = 20$ m/mn; $v = 12$ m/mn.

22.11. Un bateau tient le cap sud à la vitesse de $30\sqrt{2}$ km/h. Un second bateau tient le cap sud-est à la vitesse de 30 km/h. Trouver la valeur et la direction de la vitesse du second bateau déterminées par un observateur qui se trouve sur le pont du premier bateau.

Rép. $v_r = 30$ km/h et est dirigée vers le nord-est.

22.12. La règle AB d'un ellipsographe est entraînée par la tige OC tournant autour de l'axe O avec une vitesse angulaire constante ω_0. En outre, le mécanisme entier avec les guides tourne autour d'un axe perpendiculaire au dessin et passant par le point O, avec une vitesse angulaire constante égale elle aussi à ω_0.

Trouver la vitesse absolue d'un point arbitraire M de la règle en fonction de la distance $AM = l$. La tige OC et l'ensemble du mécanisme tournent en sens opposés.



Probl. 22.12

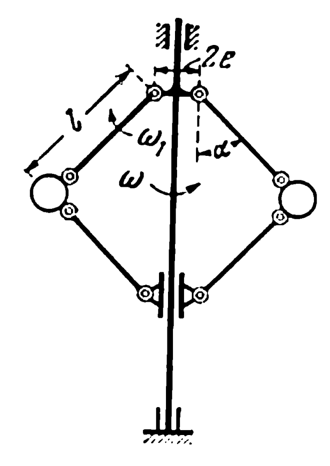
Rép. $v_M = (AB - 2l)\omega_0$.

22.13. Résoudre le problème précédent pour le cas où les rotations s'effectuent dans le même sens.

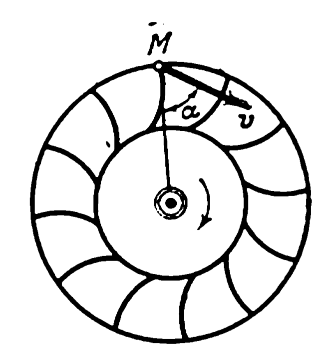
Rép. v_M ne dépend pas de la position du point M et vaut $AB \cdot \omega_0$.

22.14. Les boules d'un régulateur centrifuge de Watt tournant autour de l'axe vertical avec la vitesse angulaire $\omega = 10$ s^{-1}, s'écartent de cet axe sous l'effet de la variation de régime de travail de la machine; dans la position qu'elles occupent alors leurs leviers tournent avec la vitesse angulaire $\omega_1 = 1{,}2$ s^{-1}. Trouver la vitesse absolue des boules du régulateur à l'instant considéré, si la longueur des leviers $l = 50$ cm, la distance entre les axes de leurs articulations étant $2e = 10$ cm, les angles formés par ces leviers avec l'axe du régulateur étant $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^\circ$ (voir fig. p. 186).

Rép. $v = 306$ cm/s.



Probl. 22.14



Probl. 22.15

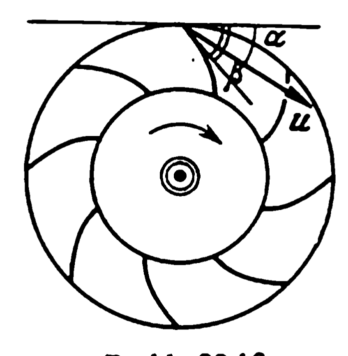
22.15. Dans une turbine hydraulique l'eau venant des aubes directrices entre dans la roue motrice tournante dont les aubes, afin d'éviter le choc de l'eau à l'entrée, sont installées de manière à ce que la vitesse relative v_r soit tangente à l'aube. Trouver la vitesse relative d'une particule d'eau située sur la jante extérieure de la roue (à l'instant de son entrée dans la roue), si sa vitesse absolue à l'entrée $v=15$ m/s, l'angle entre la vitesse absolue et le rayon $\alpha=60°$, le rayon d'entrée $R=2$ m; la vitesse angulaire de la roue correspond à $n=30$ tr/mn.

Rép. $v_r=10{,}06$ m/s; $(\widehat{v_r, R})=41°50'$.

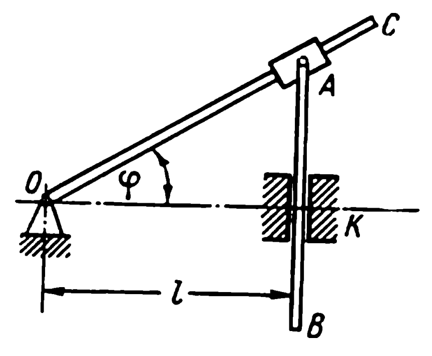
22.16. Des particules d'eau entrent dans une turbine avec la vitesse u. L'angle entre la vitesse u et la tangente au rotor menée au point d'entrée de la particule vaut α. Le diamètre extérieur du rotor est D, le nombre de tours par minute est n.

Déterminer l'angle entre l'aube du rotor et la tangente au point d'entrée de l'eau pour lequel l'eau pénétrera sans choc (dans ce cas la vitesse relative des particules est dirigée le long des aubes).

Rép. $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{60u \sin \alpha}{60u \cos \alpha - \pi D n}$.



Probl. 22.16



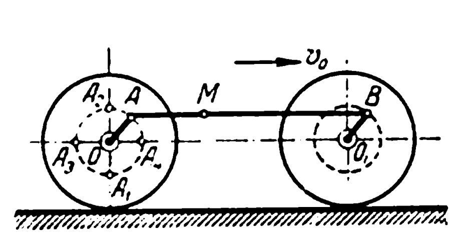
Probl. 22.17

22.17. Dans un mécanisme à coulisse le coulisseau A se déplace le long de la manivelle OC lorsque celle-ci pivote autour de l'axe O, perpendiculaire au plan de la figure, et entraîne la tige AB qui glisse dans un galet de guide vertical K. La distance $OK=l$. Déterminer la vitesse du coulisseau A par rapport à la manivelle OC en fonction de la vitesse angulaire ω et de l'angle de rotation φ de la manivelle.

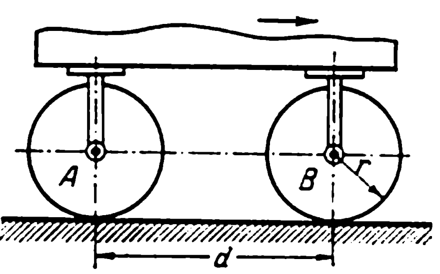
Rép. $v_r = \dfrac{l\omega \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}$.

22.18. Trouver la vitesse absolue d'un point quelconque M de la tige AB liant les manivelles OA et O_1B des axes O et O_1, si les rayons des roues sont égaux: $R=1$ m; les longueurs des manivelles $OA=O_1B=0{,}5$ m. La vitesse de l'équipage est $v_0=20$ m/s. Déterminer la vitesse du point M pour les quatre instants où les manivelles OA et O_1B sont verticales et horizontales. Les roues tournent sur les rails sans glisser.

Rép. $v_1=10$ m/s; $v_2=30$ m/s; $v_3=v_4=22{,}36$ m/s.



Probl. 22.18

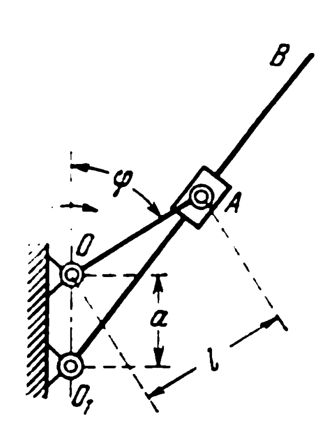


Probl. 22.19

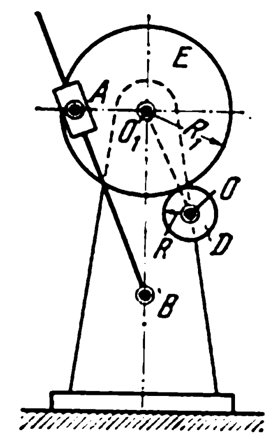
22.19. Les roues A et B d'un wagon se déplacent sans glisser avec la vitesse v sur un rail rectiligne. Les rayons des roues sont égaux à r, la distance entre les axes est d. Déterminer la vitesse du centre de la roue A par rapport au système de coordonnées fixé à la roue B.

Rép. La vitesse vaut $\dfrac{vd}{r}$, elle est perpendiculaire à AB et est dirigée vers le bas.

22.20. Un mécanisme est constitué de deux arbres parallèles O et O_1, de la manivelle OA et de la coulisse O_1B; l'extrémité A de la manivelle



Probl. 22.20



Probl. 22.21

OA glisse le long d'une fente pratiquée dans la coulisse O_1B; la distance entre les axes des arbres OO_1 est égale à a; la longueur de la manivelle OA est l, $l>a$. L'arbre O tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Trouver: 1) la vitesse angulaire ω_1 de l'arbre O_1 et la vitesse relative du point A par rapport à la coulisse O_1B; les exprimer en fonction de la grandeur variable $O_1A=s$; 2) les plus grandes et les plus petites valeurs de ces grandeurs; 3) les positions de la manivelle pour lesquelles $\omega_1=\omega$.

Rép. 1) $\omega_1=\frac{\omega}{2}\left(1+\frac{l^2-a^2}{s^2}\right)$;

$v_r=\frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)}$;

2) $\omega_{1\,max}=\omega\frac{l}{l-a}$; $\omega_{1\,min}=\omega\frac{l}{l+a}$; $v_{r\,max}=a\omega$; $v_{r\,min}=0$;

3) $\omega_1=\omega$ lorsque $O_1B\perp O_1O$.

22.21. L'élément A de la coulisse pivotante du mécanisme d'une raboteuse est entraîné par un engrenage formé par la roue dentée D et la roue dentée E portant l'axe de l'élément A sous forme de pivot. Les rayons des roues dentées sont $R=100$ mm, $R_1=350$ mm, $O_1A=300$ mm, la distance entre l'axe O_1 de la roue dentée E et le centre B d'oscillation de la coulisse $O_1B=700$ mm. Déterminer la vitesse angulaire de la coulisse aux instants où le segment O_1A est soit vertical (positions supérieure et inférieure), soit perpendiculaire à la coulisse AB (positions droite et gauche), si la vitesse angulaire de la roue dentée est $\omega=7$ s^{-1}; les points O_1 et B sont situés sur la même verticale. (voir fig. p. 187).

Rép. $\omega_I=0{,}6$ s^{-1}; $\omega_{II}=\omega_{IV}=0$; $\omega_{III}=1{,}5$ s^{-1}.

22.22. Déterminer la vitesse angulaire de la coulisse d'un mécanisme coulisse-manivelle pour quatre positions de la manivelle, deux verticales et deux horizontales, si $a=60$ cm, $l=80$ cm, la vitesse angulaire de la manivelle correspondant à $n=30$ tr/mn (cf. figure du problème 22.20).

Rép. $\omega_I=\frac{4}{7}\pi$ s^{-1}; $\omega_{II}=\omega_{IV}=0{,}64\pi$ s^{-1}; $\omega_{III}=4\pi$ s^{-1}.

22.23. Déterminer la vitesse absolue du piston d'un moteur rotatif pour les deux positions verticales et les deux positions horizontales de la bielle AB, si la longueur de la manivelle $OA=r=80$ mm, celle de la bielle $AB=l=240$ mm, le cylindre avec le carter tournant à une vitesse $n=$ $=1\,200$ tr/mn (cf. figure du problème 21.14).

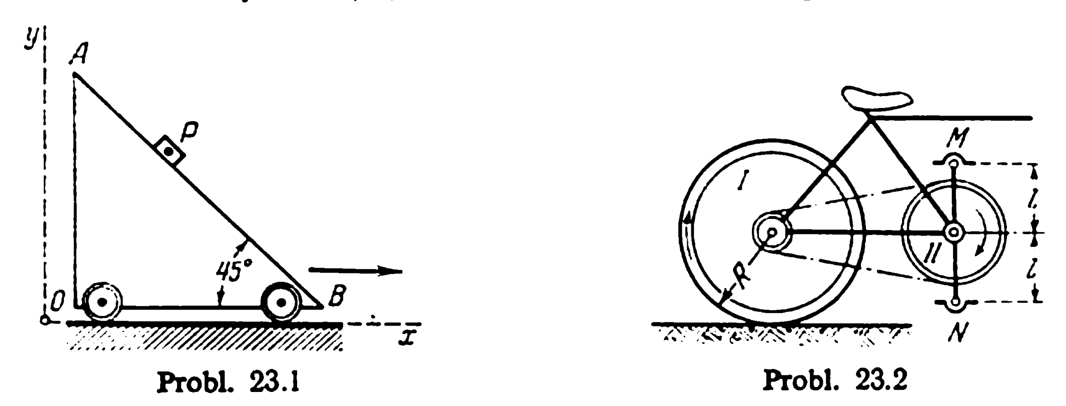
Rép. $v_I=20{,}11$ m/s; $v_{III}=40{,}21$ m/s; $v_{II}=v_{IV}=31{,}8$ m/s.

22.24. Les composantes est, nord et verticale de la vitesse d'un point M par rapport à la Terre sont respectivement v_E, v_N, v_h. A l'instant considéré la hauteur du point au-dessus de la surface de la Terre est h, la latitude du lieu φ. Le rayon de la Terre est R, sa vitesse angulaire ω. Déterminer les composantes de la vitesse absolue du point.

Rép. $v_x=v_E+(R+h)\,\omega\cos\varphi$; $v_y=v_N$;
$v_z=v_h$ (l'axe des x est dirigé vers l'est, l'axe des y vers le nord et l'axe des z verticalement vers le haut).

§ 23. Addition des accélérations d'un point

23.1. Un plan incliné AB formant avec l'horizontale un angle de 45° est animé d'un mouvement rectiligne parallèle à l'axe Ox, d'accélération constante 1 dm/s². Le corps P glisse le long de ce plan avec une accélération constante $\sqrt{2}$ dm/s², les vitesses initiales du corps et du plan sont



Probl. 23.1 Probl. 23.2

nulles, la position initiale du corps est déterminée par les coordonnées $x=0$, $y=h$. Calculer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mouvement absolu du corps.

Rép. $y=h-\frac{x}{2}$; $v=\sqrt{5}t$ dm/s; $w=\sqrt{5}$ dm/s².

23.2. Sur un tronçon de route horizontale rectiligne un cycliste se déplace suivant la loi $s=0{,}1\ t^2$ (s est évalué en mètres, t en secondes). On a: $R=350$ mm, $l=180$ mm, $z_1=18$ dents, $z_2=48$ dents.

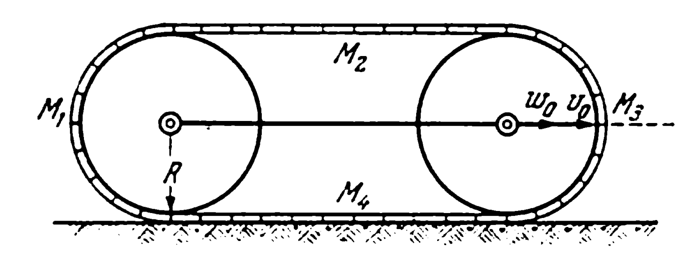
Déterminer l'accélération absolue des axes M et N des pédales du vélo (on suppose que les roues tournent sans glisser) pour $t=10$ s, si à cet instant la manivelle MN est verticale.

Rép. $w_M=0{,}860$ m/s²; $w_N=0{,}841$ m/s².

23.3. Déterminer l'accélération absolue d'un point M quelconque de la tige AB reliant les manivelles d'axes O et O_1, si l'équipage se déplace uniformément sur un chemin rectiligne avec la vitesse $v_0=36$ km/h. Les rayons des roues $R=1$ m, les longueurs des manivelles $r=0{,}75$ m (cf. figure du problème 22.18).

Rép. $w=75$ m/s².

23.4. Trouver les vitesses et les accélérations des points M_1, M_2, M_3 et M_4 de la chenille d'un tracteur qui se déplace sans glisser sur un chemin



Probl. 23.4

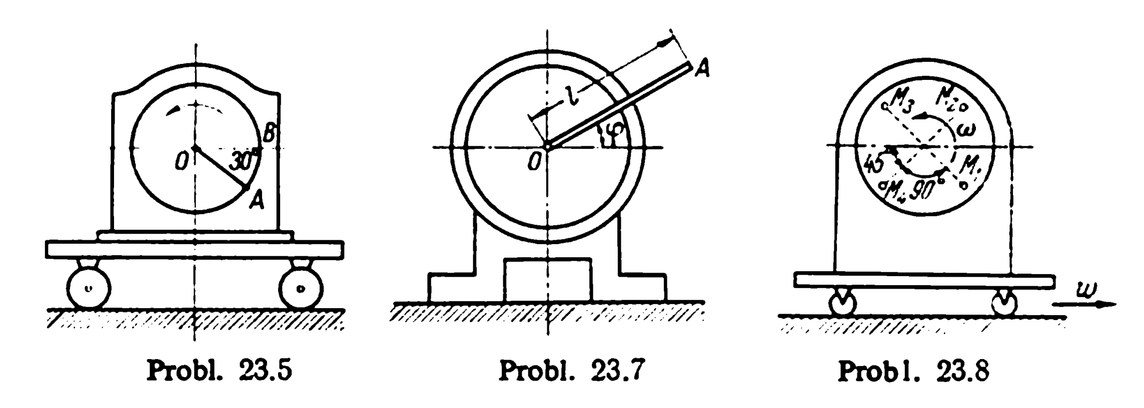
rectiligne avec la vitesse v_0 et l'accélération w_0; les rayons des roues du tracteur sont égaux à R; négliger le glissement de la chenille sur les jantes des roues.

Rép. $v_1 = v_3 = v_0 \sqrt{2}$; $v_2 = 2v_0$; $v_4 = 0$;

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_2 = 2w_0;$$

$$w_3 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 - \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_4 = 0.$$

23.5. Un chariot se déplaçant horizontalement vers la droite avec une accélération $w = 49{,}2$ cm/s², supporte un moteur électrique dont le rotor tourne au démarrage d'après la loi $\varphi = t^2$, l'angle φ étant évalué en radians.



Probl. 23.5 Probl. 23.7 Probl. 23.8

Le rayon du rotor est de 20 cm. Déterminer l'accélération absolue du point A de la périphérie du rotor pour $t = 1$ s, si à cet instant le point A se trouve dans la position indiquée sur la figure.

Rép. $w_A = 74{,}6$ cm/s² et est dirigée verticalement vers le haut.

23.6. Déterminer dans le problème précédent la vitesse angulaire de rotation uniforme du rotor pour que l'accélération absolue du point A dans la position B soit nulle.

Rép. $\omega = 1{,}57$ s⁻¹.

23.7. Une barre OA de longueur l est fixée sous un angle droit à l'arbre d'un moteur électrique tournant suivant la loi $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const}$); le moteur électrique, n'étant pas fixé au bâti, effectue alors des oscillations horizontales harmoniques sur celui-ci suivant la loi $x = a \sin \omega t$. Déterminer l'accélération absolue du point A à l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$ s.

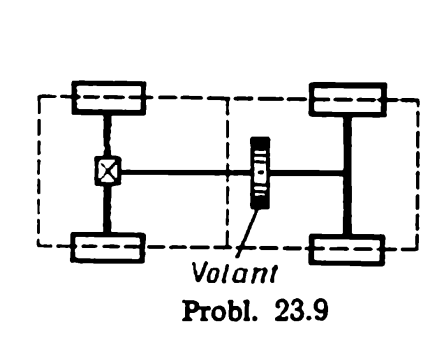
Rép. $w_A = \omega^2 \sqrt{a^2 + l^2}$.

23.8. Un moteur est installé sur un chariot se déplaçant horizontalement vers la droite avec une accélération constante $w = 4$ cm/s². Le moteur tourne suivant la loi $\varphi = \frac{1}{2} t^2$. Déterminer l'accélération absolue à l'instant $t = 1$ s des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 du rotor situés à une distance

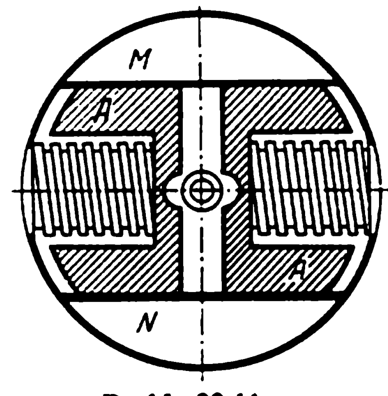
$l=2\sqrt{2}$ cm de l'axe du rotor et occupant à cet instant la position indiquée sur la figure.

Rép. $w_1=4\sqrt{2}$ cm/s², $w_2=0$, $w_3=4\sqrt{2}$ cm/s², $w_4=8$ cm/s².

23.9. Une automobile se déplace sur une route rectiligne avec l'accélération $w_0=2$ m/s². Un volant de rayon $R=0{,}25$ m monté sur l'arbre longitudinal tourne à l'instant considéré, avec la vitesse et l'accélération angulaires respectivement $\omega=4$ s^{-1} et $\varepsilon=4$ s^{-2}. Trouver l'accélération absolue des points périphériques du volant à l'instant considéré.



Probl. 23.9



Probl. 23.11

Rép. $w=4{,}58$ m/s².

23.10. Un avion vole suivant une trajectoire rectiligne avec une accélération $w_0=\text{const}=4$ m/s²; l'hélice, de diamètre $d=1{,}8$ m, tourne uniformément avec une vitesse angulaire correspondant à $n=1\,800$ tr/mn.

Trouver les équations du mouvement, la vitesse et l'accélération de l'extrémité de l'hélice dans un système de coordonnées fixe par rapport à la Terre, l'axe Ox de ce système étant confondu avec l'axe de l'hélice. La vitesse initiale de l'avion $v_0=0$.

Rép. $x=2t^2$ m, $y=0{,}9\cos 60\pi t$ m, $z=0{,}9\sin 60\pi t$ m;

$v=\sqrt{16t^2+2\,916\pi^2}$ m/s; $w=31\,945$ m/s².

23.11. Dans un régulateur tournant autour de son axe vertical avec une vitesse angulaire constante $n=180$ tr/mn, les poids A attachés aux extrémités d'un ressort effectuent des oscillations harmoniques le long de la rainure MN de sorte que la distance de leurs centres de gravité à l'axe de rotation varie suivant la loi $x=(10+5\sin 8\pi t)$ cm.

Déterminer l'accélération du centre de gravité du poids à l'instant où l'accélération de Coriolis atteint sa valeur maximale, et trouver les valeurs de l'accélération de Coriolis pour les positions extrêmes du poids.

Rép. $w_a=600\,\pi^2$ cm/s², $w_c=0$.

23.12. Un jet d'eau coule dans un tube horizontal OA tournant uniformément autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire $n=60$ tr/mn.

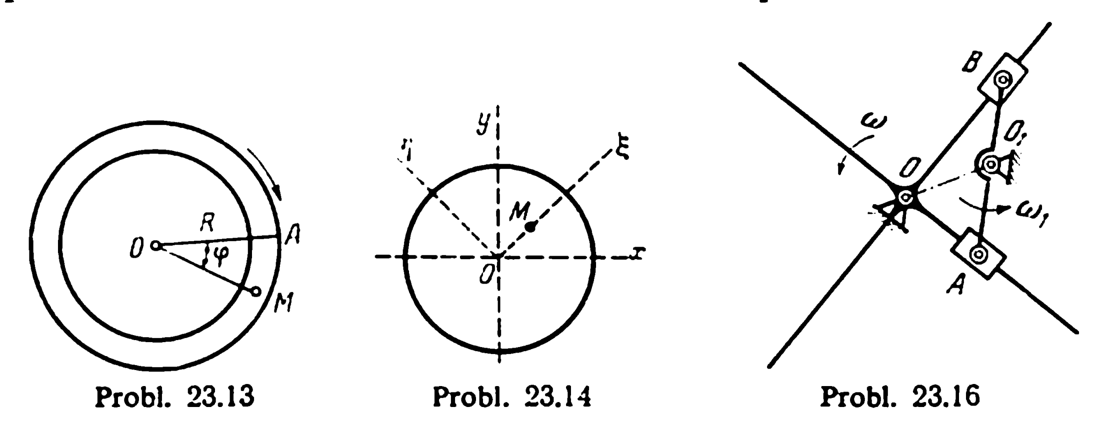
Déterminer l'accélération de Coriolis w_c au point du jet où la vitesse relative $v_r=\frac{21}{11}$ m/s et est dirigée suivant OA. Prendre pour π la valeur approchée $\pi=22/7$.

Rép. $w_c=24$ m/s².

23.13. Un tube circulaire de rayon $R=1$ m tourne autour d'un axe horizontal O dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante $\omega=1$ s^{-1}. Une bille M oscille dans le tube au voisinage du point A du tube suivant la loi $\varphi=\sin \pi t$. Déterminer les accélérations absolues de la bille: tangentielle w_τ et normale w_n à l'instant $t=2\,^1/_6$ s.

Rép. $w_\tau=-4{,}93$ m/s²; $w_n=13{,}84$ m/s².

23.14. Un disque tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan dans le sens des aiguilles d'une montre avec une accélération angulaire uniforme 1 s^{-2}; à l'instant initial $t=0$ sa vitesse angulaire est nulle. Un point M oscille suivant un certain diamètre du disque et sa coordonnée est



Probl. 23.13 Probl. 23.14 Probl. 23.16

donnée par la relation $\xi=\sin \pi t$ dm, t étant évalué en secondes. Déterminer à l'instant $t=1\,^2/_3$ s les projections de l'accélération absolue du point M sur les axes ξ, η fixés au disque.

Rép. $w_\xi=10{,}95$ dm/s²; $w_\eta=-4{,}37$ dm/s².

23.15. Un point se déplace uniformément avec la vitesse relative v_r suivant la corde d'un disque qui tourne autour de son axe O, perpendiculaire à son plan, avec la vitesse angulaire constante ω. Déterminer la vitesse et l'accélération absolues du point à l'instant où il se trouve à la plus courte distance h de l'axe; on suppose que le mouvement relatif du point s'effectue dans le sens de rotation du disque.

Rép. $v=v_r+h\omega$; $w=\omega^2 h+2\omega v_r$.

23.16. Pour transmettre la rotation d'un arbre à un autre arbre parallèle au premier, on utilise un manchon qui représente un compas elliptique inversé dont la manivelle OO_1 est fixe. La manivelle AB tourne avec la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe O_1 et met les tiges croisées et le second arbre en rotation, autour de l'axe O. Déterminer la vitesse angulaire des tiges croisées ainsi que la vitesse d'entraînement et la vitesse rela-

tive (par rapport aux tiges croisées); calculer les accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis du point A du coulisseau si $\omega_1=\text{const}$ et $OO_1=OA_1=O_1B=a$.

Rép. $\omega=\frac{\omega_1}{2}$; $v_e=a\omega_1\sin\frac{\omega_1}{2}t$; $v_r=a\omega_1\cos\frac{\omega_1}{2}t$;

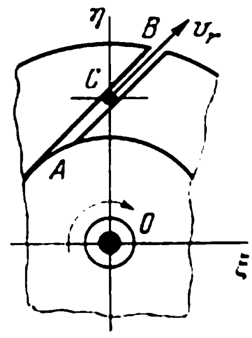
$$w_e=w_r=\frac{a\omega_1^2}{2}\sin\frac{\omega_1}{2}t;\quad w_c=aw_1^2\cos\frac{\omega_1}{2}t.$$

23.17. Un cycliste se déplace sur une plate-forme horizontale tournant autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante $\omega=\frac{1}{2}\text{ s}^{-1}$; la distance du cycliste à l'axe de rotation de la plate-forme est constante et vaut $r=4$ m. La vitesse relative du cycliste $v_r=4$ m/s est dirigée dans le sens contraire à la vitesse d'entraînement du point correspondant de la plate-forme. Déterminer l'accélération absolue du cycliste et avec quelle vitesse relative il doit se déplacer pour que son accélération absolue soit nulle.

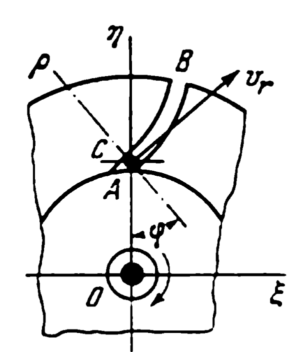
Rép. 1) $w=1$ m/s² et est dirigée suivant le rayon vers le centre du disque; 2) $v_r=2$ m/s.

23.18. Un compresseur avec des canaux rectilignes tourne uniformément avec la vitesse angulaire ω autour de l'axe O perpendiculaire au plan de la figure. L'air circule dans les canaux avec une vitesse relative constante v_r. Trouver les projections de la vitesse et de l'accélération absolues sur les axes de coordonnées d'une particule d'air située au point C du canal AB, si l'on sait que le canal AB fait un angle de 45° avec le rayon OC, $OC=0{,}5$ m, $\omega=4\pi\text{ s}^{-1}$, $v_r=2$ m/s.

Rép. $v_\xi=7{,}7$ m/s; $v_\eta=1{,}414$ m/s; $w_\xi=35{,}54$ m/s²; $w_\eta=-114{,}5$ m/s².



Probl. 23.18



Probl. 23.19

23.19. Résoudre le problème précédent pour un canal curviligne, si son rayon de courbure au point C est ρ, l'angle entre la normale à la courbe AB au point C et le rayon OC étant φ. Le rayon $OC=r$.

Rép. $v_\xi=v_r\cos\varphi+r\omega$; $v_\eta=v_r\sin\varphi$;

$$w_\xi=\left(2v_r\omega-\frac{v_r^2}{\rho}\right)\sin\varphi;\qquad w_\eta=-\left[r\omega^2+\left(2v_r\omega-\frac{v_r^2}{\rho}\right)\cos\varphi\right].$$

23.20. Exprimer en fonction du temps l'accélération angulaire ε de la coulisse pivotante d'une raboteuse, si la manivelle de longueur r tourne uniformément avec la vitesse angulaire ω; les distances entre les axes de rotation de la manivelle et de la coulisse étant $a>r$ (cf. la figure du problème 21.13).

Rép. $\varepsilon = \dfrac{(r^2-a^2)\,ar\omega^2 \sin \omega t}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^2}$.

23.21. L'élément A de la manivelle OA effectue un mouvement d'entraînement avec la coulisse tournant avec la vitesse et l'accélération angulaires ω et ε autour de l'axe O_1 perpendiculaire au plan de la coulisse et un mouvement relatif rectiligne le long de la fente de la coulisse avec la vitesse v_r et l'accélération w_r.

Déterminer les projections de l'accélération absolue du point A sur les axes mobiles de coordonnées fixés à la coulisse en les exprimant en fonction de la distance variable $O_1A=s$ (cf. figure du problème 22.20).

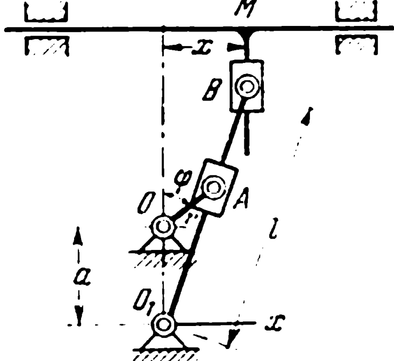
Rép. $w_\xi=w_r-s\omega^2$; $w_\eta=s\varepsilon+2v_r\omega$, les axes ξ et η étant dirigés respectivement le long de la fente et perpendiculairement à celle-ci.

23.22. Déterminer l'accélération angulaire de la coulisse tournante du mécanisme coulisse-manivelle d'une raboteuse pour les deux positions verticales et les deux positions horizontales de la manivelle, si la longueur de la manivelle $l=40$ cm, la distance entre les axes de la manivelle et de la coulisse $a=30$ cm, la vitesse angulaire de rotation uniforme de la manivelle $\omega=3$ s^{-1} (cf. figure du problème 22.20).

Rép. $\varphi=0$ et $\varphi=180°$, $\varepsilon=0$; $\varphi=90°$, $\varepsilon=1{,}21$ s^{-2};
$\varphi=270°$, $\varepsilon=1{,}21$ s^{-2} (la rotation est retardée).

23.23. Trouver, dans le problème précédent, l'accélération du mouvement relatif du point A le long de la fente pour les quatre positions de la manivelle mentionnées.

Rép. $\varphi=0$, $w_r=154{,}3$ cm/s^2;
$\varphi=90°$ et $\varphi=270°$, $w_r=103{,}7$ cm/s^2;
$\varphi=180°$, $w_r=1\,080$ cm/s^2.



Probl. 23.24

23.24. Trouver l'équation du mouvement, la vitesse et l'accélération du support M d'une raboteuse, entraîné par un mécanisme coulisse-manivelle à coulissse pivotante O_1B (cf. schéma). La coulisse est reliée au support M à l'aide du coulisseau B, glissant par rapport au support le long d'un guide perpendiculaire à l'axe de son mouvement. On a : $O_1B=l$, $OA=r$, $O_1O=a$, $r<a$; la manivelle OA tourne avec une vitesse angulaire constante

ω; l'angle de rotation de la manivelle est compté à partir de l'axe vertical.

Rép. $x = l \dfrac{r \sin \omega t}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}}$;

$$v = rl\omega \frac{(a+r\cos\omega t)(a\cos\omega t+r)}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{3/2}};$$

$$w = rl\omega^2 \frac{a(r^2-a^2)(a+r\cos\omega t)-r^2(a\cos\omega t+r)^2}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{5/2}} \sin\omega t.$$

Remarque. La coordonnée est comptée à partir de la verticale passant par le point O.

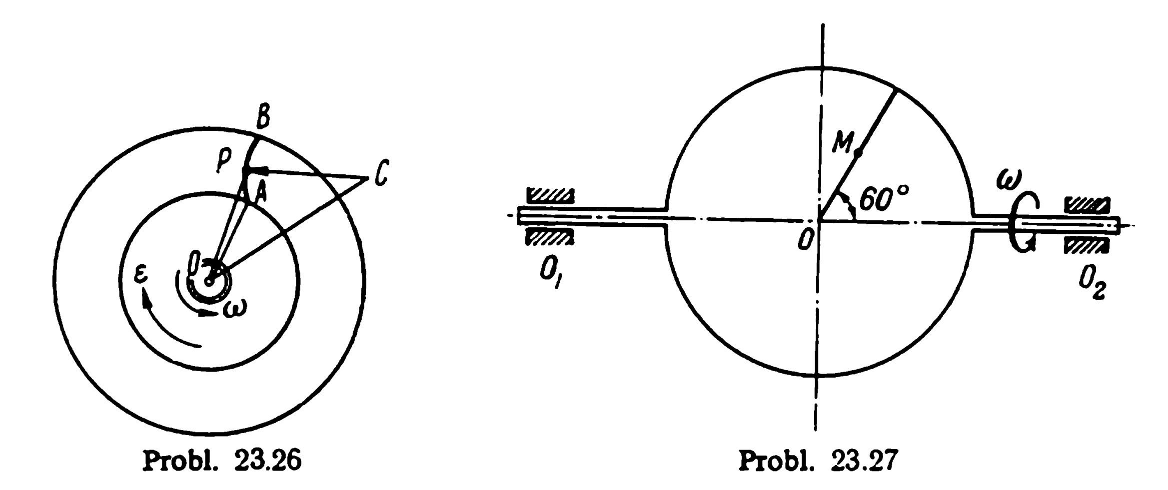
23.25. Trouver l'accélération de l'outil d'une raboteuse à coulisse pivotante pour les deux positions verticales et les deux positions horizontales de la manivelle, si la longueur de la manivelle $r=10$ cm, la distance entre les centres de rotation de la manivelle et de la coulisse étant $a=30$ cm, la longueur de la coulisse $l=60$ cm, la vitesse angulaire de la manivelle $\omega=4\ s^{-1}=\text{const}$ (cf. figure du problème 23.24).

Rép. Pour $\varphi=0$ et $\varphi=180°$, $w_x=0$;
Pour $\varphi=90°$ et $\varphi=270°$, $w_x=\mp 221$ cm/s².

23.26. Le rayon de courbure de l'aube AB d'une turbine tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre avec une décélération angulaire $3\ s^{-2}$ est de 20 cm, le centre de courbure étant un point C ($OC = 10\sqrt{10}$ cm). Une particule d'eau P à une distance $OP=20$ cm de l'axe O de la turbine se déplace sur l'aube vers l'extérieur avec une vitesse de 25 cm/s et une accélération tangentielle de 50 cm/s² par rapport à l'aube.

Déterminer l'accélération absolue de la particule P à l'instant où la vitesse angulaire de la turbine est $2\ s^{-1}$.

Rép. $w_a=52$ cm/s².



Probl. 23.26 Probl. 23.27

23.27. Le point M se déplace suivant le rayon d'un disque de son centre vers sa périphérie selon la loi $OM=4t^2$ cm. Le disque tourne autour

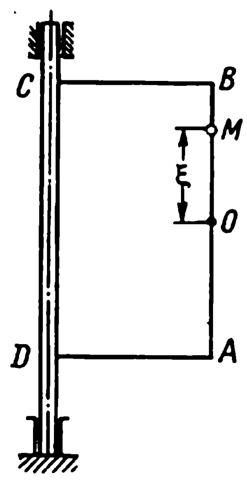
de l'axe O_1O_2 avec une vitesse angulaire $\omega = 2t\ \ s^{-1}$. Le rayon OM forme avec l'axe O_1O_2 un angle de 60°.

Déterminer la valeur de l'accélération absolue du point M à l'instant $t=1$ s.

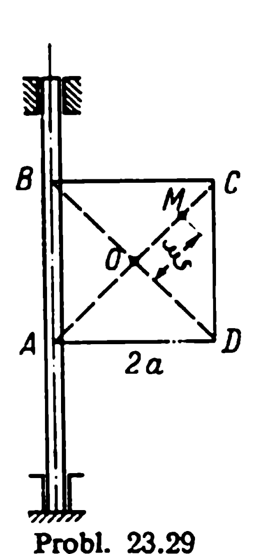
Rép. $w_M = 35{,}56$ cm/s².

23.28. Un rectangle $ABCD$ tourne autour de son côté CD avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{\pi}{2}\ s^{-1} = \text{const}$. Le point M se déplace le long du côté AB suivant la loi $\xi = a \sin \frac{\pi}{2} t$ cm. Etant données les dimensions : $DA = CB = a$ cm, déterminer la valeur de l'accélération absolue du point à l'instant $t = 1$ s.

Rép. $w_a = \frac{a\pi^2}{4} \sqrt{2}$ cm/s².




Probl. 23.28



Probl. 23.29

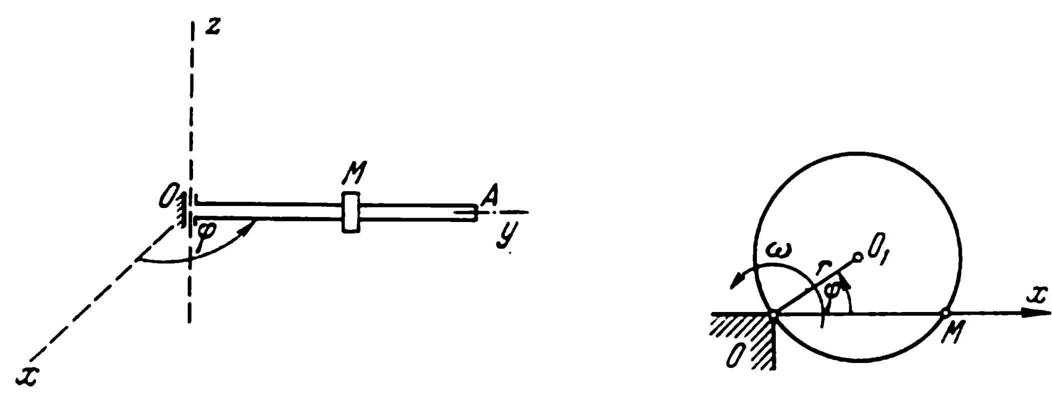
23.29. Un carré $ABCD$ dont le côté mesure $2a$ cm tourne autour de son côté AB avec une vitesse angulaire constante $\omega = \pi\sqrt{2}\ s^{-1}$. Le point M effectue, le long de la diagonale AC, une oscillation harmonique suivant la loi $\xi = a \cos \frac{\pi}{2} t$ cm.

Déterminer la valeur de l'accélération absolue du point pour $t = 1$ s et $t = 2$ s.

Rép. $w_{a1} = a\pi^2 \sqrt{5}$ cm/s²; $w_{a2} = 0{,}44\ a\pi^2$ cm/s².

23.30. Une barre OA tourne autour de l'axe z passant par le point O avec une décélération angulaire 10 s^{-2}. Une rondelle M glisse le long de cette barre à partir du point O. Déterminer l'accélération absolue de la rondelle à l'instant où sa distance du point O est de 60 cm, sa vitesse et son accélération étant respectivement 120 cm/s et 90 cm/s², si à cet instant la vitesse angulaire de la barre est de 5 s^{-1}.

Rép. $w_a = 1\,533$ cm/s² et forme avec la direction MO un angle de 23°.



Probl. 23.30 et 23.31 Probl. 23.32

23.31. La rondelle M se déplace le long d'une barre horizontale OA de sorte que $OM=0{,}5t^2$ cm. Simultanément la barre tourne autour de l'axe vertical passant par le point O d'après la loi $\varphi=t^2+t$. Déterminer les composantes radiale et transversale de la vitesse absolue et de l'accélération absolue de la rondelle à l'instant $t=2$ s.

Rép. $v_r=2$ cm/s; $v_\varphi=10$ cm/s; $w_r=-49$ cm/s^2; $w_\varphi=24$ cm/s^2.

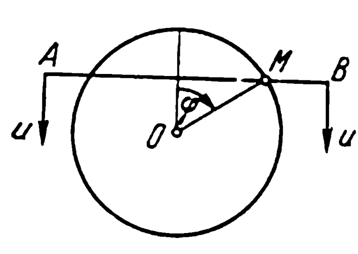
23.32. Un cercle de rayon r tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du point fixe O situé sur sa circonférence. Lors de la rotation, le cercle coupe une droite fixe horizontale, l'axe Ox passant par le point O. Trouver la vitesse et l'accélération du point d'intersection M du cercle avec l'axe Ox en considérant le mouvement de ce point par rapport au cercle et par rapport à l'axe Ox. Exprimer les grandeurs recherchées en fonction de la distance $OM=x$.

Rép. Par rapport à la droite Ox le point M se déplace avec la vitesse $-\omega\sqrt{4r^2-x^2}$ et l'accélération $-\omega^2x$. Par rapport au cercle le point se déplace dans le sens contraire à la rotation du cercle avec la vitesse constante $2\omega r$ et l'accélération $4\omega^2 r$.

23.33. Une droite horizontale AB se déplace parallèlement à elle-même dans le sens vertical avec une vitesse constante u et coupe un cercle fixe de rayon r. Trouver la vitesse et l'accélération du point d'intersection M de la droite et de la circonférence, en fonction de l'angle φ, en considérant le mouvement de ce point par rapport au cercle et par rapport à la droite AB (voir fig. p. 198).

Rép. 1) La vitesse du point M, lors de son mouvement suivant la circonférence, est $\frac{u}{\sin\varphi}$, son accélération tangentielle étant $-\frac{u^2\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}$ et son accélération normale $\frac{u^2}{r\sin^2\varphi}$.

2) Par rapport à la droite AB le point M se déplace avec la vitesse $\frac{u\cos\varphi}{\sin\varphi}$ et l'accélération $-\frac{u^2}{r\sin^3\varphi}$.



Probl. 23.33

Probl. 23.34

23.34. La demi-droite OA tourne dans le plan de la figure autour du point fixe O avec une vitesse angulaire constante ω. Le point M se déplace le long de OA. A l'instant où la demi-droite était confondue avec l'axe des x, le point M se trouvait à l'origine des coordonnées.

Déterminer le mouvement du point M par rapport à la demi-droite OA, la vitesse absolue v du point M étant constante.

Déterminer aussi la trajectoire absolue et l'accélération absolue du point M.

Rép. Le point M se déplace suivant OA avec la vitesse $v_r = v \cos \omega t$.

La trajectoire absolue du point M est une circonférence dont l'équation en coordonnées polaires est $r = \frac{v}{\omega} \sin \varphi$, et en coordonnées rectangulaires $x^2 + \left(y - \frac{v}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{v}{2\omega}\right)^2$. L'accélération absolue du point M vaut $w_a = 2\omega v$.



23.35. Un point se déplace avec une vitesse constante v suivant le rayon d'un disque tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre. Déterminer l'accélération absolue du point à l'instant où sa distance au centre du disque est r.

Rép. $w_a = \omega \sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$.

23.36. Une bille P se déplace avec une vitesse constante de 120 cm/s suivant la corde AB d'un disque tournant autour d'un axe passant par son centre perpendiculairement à son plan. Trouver l'accélération absolue de la bille à l'instant où sa distance au centre du disque est la plus courte et mesure 30 cm. A cet instant la vitesse angulaire du disque est de 3 s^{-1}, sa décélération angulaire de 8 s^{-2}. (Voir fig. p. 199.)

Rép. $w_a = 1\,018$ cm/s².

23.37. Résoudre le problème précédent en supposant que le disque tourne autour du diamètre parallèle à la corde.

Rép. $w_a = 361{,}2$ cm/s².

23.38. Résoudre le problème 23.36 dans l'hypothèse où l'axe de rotation du disque serait le diamètre perpendiculaire à la corde.

Rép. $w_a = 720$ cm/s².

23.39. Un bateau se trouvant sur l'équateur tient le cap nord-est. La vitesse du bateau est de 20 nœuds. Trouver la vitesse absolue et l'accélération de Coriolis du bateau en tenant compte de la rotation de la Terre; le rayon de la Terre $R=6\ 378$ km (l'appellation du cap indique où va le bateau; 1 nœud $=1\ \frac{\text{mille marin}}{\text{heure}}=1\ 852$ m/h).

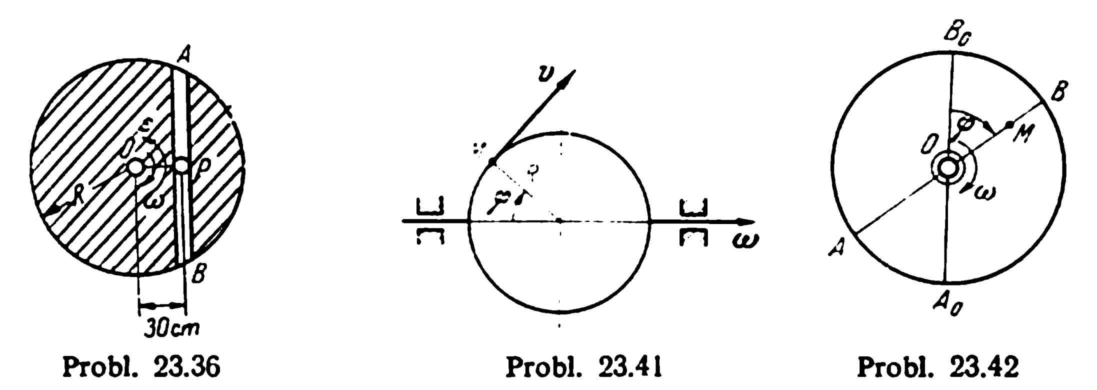
Rép. $v_a=470{,}4$ m/s; $w_c=1{,}06\cdot10^{-3}$ m/s².

23.40. Trouver dans les hypothèses du problème précédent, l'accélération absolue du bateau en supposant sa vitesse constante.

Rép. $w_a=347{,}766\cdot10^{-4}$ m/s².

23.41. Le point M se déplace sur la périphérie d'un disque de rayon R avec une vitesse v de module constant. Le disque tourne autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω. Trouver l'accélération absolue du point M en fonction de l'angle φ que forme le rayon vecteur du point avec l'axe de rotation du disque.

Rép. $w_a=\sqrt{\frac{v^4}{R^2}+\omega^4R^2\sin^2\varphi+2\omega^2v^2(1+\cos^2\varphi)}$.



Probl. 23.36 Probl. 23.41 Probl. 23.42

23.42. Un disque de rayon R tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe passant par son centre perpendiculairement au plan du disque. Un point M se déplace suivant un diamètre du disque de manière que sa distance au centre du disque varie d'après la loi

$$OM=R\sin\omega t.$$

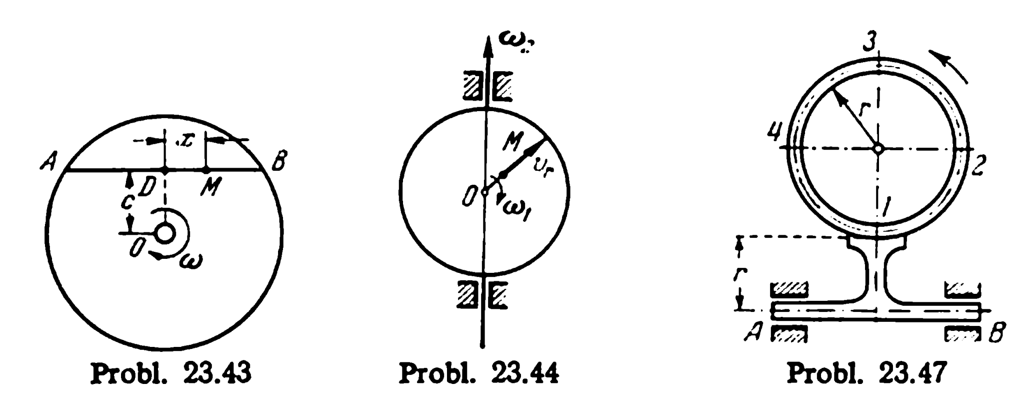
Trouver la trajectoire, la vitesse et l'accélération absolues du point M.

Rép. Si l'on prend la position initiale du point M en tant qu'origine des coordonnées, et si l'on dirige l'axe des y suivant la position initiale du diamètre suivant lequel se déplace le point M, l'équation de la trajectoire sera

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$$

(une circonférence de demi-rayon centrée au point médian du rayon). La vitesse absolue $v_a=\omega R$, l'accélération absolue $w_a=2\omega^2R$.

23.43. Un disque tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire au plan du disque. Un point M se déplace suivant la corde AB à partir du point médian D de cette corde avec une vitesse relative constante u. La distance de la corde au centre du disque est c.



Probl. 23.43 Probl. 23.44 Probl. 23.47

Trouver la vitesse et l'accélération absolues du point M en fonction de la distance $DM=x$.

Rép. $v_a=\sqrt{\omega^2 x^2+(u+\omega c)^2}$; $w_a=\omega\sqrt{\omega^2 x^2+(2u+\omega c)^2}$.

23.44. Un point M se déplace suivant le rayon mobile d'un disque à partir de son centre vers la périphérie avec une vitesse constante v_r. Le rayon mobile tourne dans le plan du disque avec une vitesse angulaire constante ω_1. Le plan du disque tourne autour de son diamètre avec une vitesse angulaire constante ω_2.

Trouver la vitesse absolue du point M; supposer que pour $t=0$ le point M était au centre du disque avec le rayon mobile dirigé suivant l'axe de rotation du disque.

Rép. $v_a=v_r\sqrt{1+t^2(\omega_1^2+\omega_2^2\sin^2\omega_1 t)}$.

23.45. Un point se déplace avec la vitesse de 2 m/s suivant la périphérie d'un disque dont le diamètre est de 4 m. Le disque tourne dans le sens contraire, sa vitesse et son accélération angulaires à l'instant donné sont respectivement de 2 s^{-1} et de 4 s^{-2}. Déterminer l'accélération absolue du point.

Rép. $w_a=8{,}24$ m/s^2 et est dirigée sous un angle de 76° par rapport au rayon.

23.46. Un disque tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre d'après la loi $\varphi=\frac{2}{3}t^3$. Un point se déplace suivant le rayon du disque d'après la loi $s=4t^2-10t+8$ (cm), la distance s étant mesurée à partir du centre du disque. Déterminer la vitesse et l'accélération absolues du point à l'instant $t=1$ s.

Rép. $v_a=4{,}47$ cm/s; $w_a=0$.

23.47. Un anneau creux de rayon r est solidaire d'un arbre AB, l'axe de l'arbre étant situé dans le plan de l'axe de l'anneau. L'anneau est rempli

de liquide qui y circule dans le sens de la flèche avec une vitesse relative constante u. L'arbre AB tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, si l'on regarde de A vers B selon l'axe de rotation. La vitesse angulaire ω de l'arbre est constante. Déterminer les valeurs des accélérations absolues des particules du liquide situées aux points *1*, *2*, *3* et *4*.

Rép. $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$;

$$w_2 = w_4 = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r}.$$

23.48. Dans les hypothèses du problème précédent à l'exception du fait qu'à présent le plan de l'anneau est perpendiculaire à l'axe de l'arbre AB déterminer les mêmes grandeurs dans les deux cas suivants:

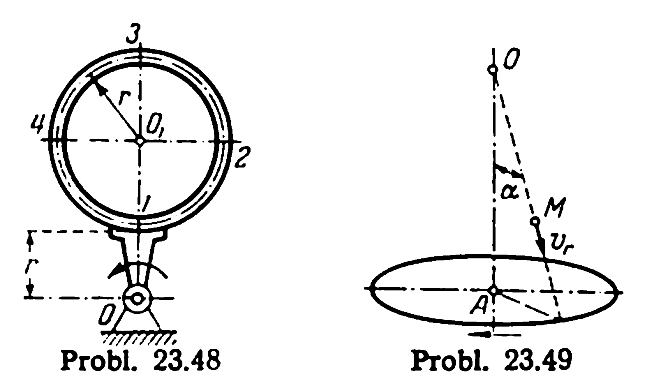
1) les mouvements relatif et d'entraînement étant de même sens;
2) les mouvements composants étant de sens contraires.

Rép. 1) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} - 2u\omega$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} + 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2};$$

2) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} + 2u\omega$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} - 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2\omega u\right)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$



Probl. 23.48 Probl. 23.49

23.49. Le point M se déplace uniformément suivant la génératrice d'un cône circulaire d'axe OA à partir du sommet vers sa base avec la vitesse relative v_r, $MOA = \alpha$. A l'instant $t = 0$ la distance $OM_0 = a$. Le cône tourne uniformément autour de son axe avec la vitesse angulaire ω. Trouver l'accélération absolue du point M.

Rép. L'accélération est située dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et représente l'hypoténuse du triangle de côtés $w_{en} = \omega^2 (a + v_r t) \sin \alpha$ et $w_c = 2v_r \omega \sin \alpha$.

23.50. Déterminer dans les hypothèses du problème précédent la valeur de l'accélération absolue du point M à l'instant $t = 1$ s dans le cas où le

point se déplace suivant la génératrice du cône avec une accélération relative constante w_r dirigée du sommet du cône vers sa base, sachant que: $\alpha=30°$, $a=15$ cm, $w_r=10$ cm/s², $\omega=1$ s⁻¹; à l'instant $t=0$ la vitesse relative v_r du point est nulle.

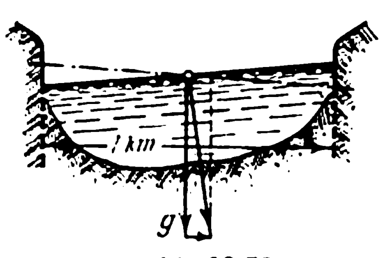
Rép. $w=14{,}14$ cm/s².

23.51. En admettant que, dans le problème 23.49, la rotation du cône autour de son axe soit uniformément accélérée avec une accélération ε, déterminer la valeur de l'accélération absolue w du point M à l'instant $t=2$ s sachant que: $\alpha=30°$, $a=18$ cm, $v_r=3$ cm/s, $\varepsilon=0{,}5$ s⁻²; à l'instant $t=0$ la vitesse angulaire ω est nulle.

Rép. $w=15$ cm/s².

23.52. Un fleuve large de 1 km coule du sud au nord avec la vitesse de 5 km/h. Déterminer l'accélération de Coriolis w_c des particules d'eau situées à 60° de latitude nord. Déterminer ensuite la rive où le niveau de l'eau est le plus élevé et de combien? On connaît que la surface de l'eau doit être perpendiculaire à la direction du vecteur composé par l'accélération de la pesanteur $\boldsymbol{g}$ et par un vecteur égal et opposé à l'accélération de Coriolis.

Rép. L'accélération de Coriolis $w_c=0{,}017\,5$ cm/s² et est dirigée vers l'ouest. Le niveau de l'eau sur la rive droite est plus élevé de 1,782 cm.



Probl. 23.52

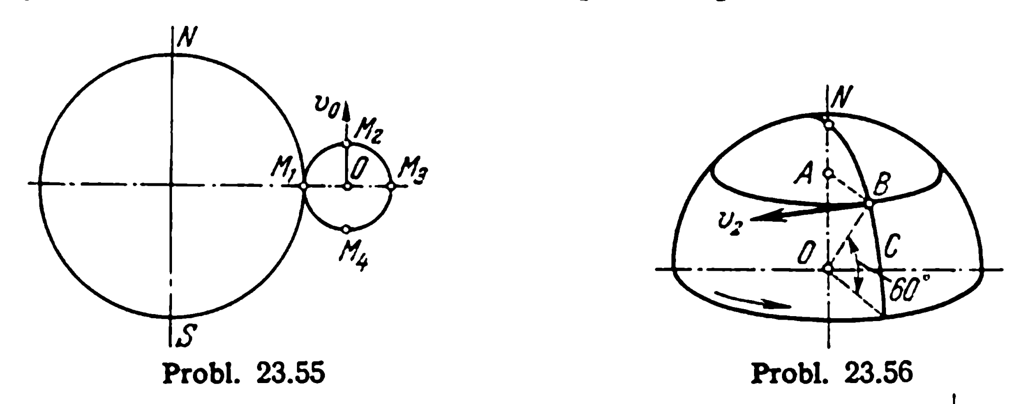
23.53. La voie ferrée allant du sud au nord suit exactement le méridien. Une locomotive se déplace vers le nord avec la vitesse $v=90$ km/h; la latitude du lieu est $\varphi=47°$. Trouver l'accélération de Coriolis de la locomotive.

Rép. $w_c=0{,}266$ cm/s².

23.54. Une locomotive se déplace suivant un parallèle de latitude nord avec la vitesse $v_r=20$ m/s de l'ouest à l'est. Trouver l'accélération de Coriolis w_c de la locomotive.

Rép. $w_c=0{,}291$ cm/s².

23.55. Déterminer l'accélération de Coriolis des points M_1, M_2, M_3, M_4 de la roue d'une locomotive éléctrique se déplaçant suivant un méridien à l'instant où celle-ci coupe l'équateur. La vitesse du centre de la roue de la locomotive $v_0=144$ km/h.



Probl. 23.55 Probl. 23.56

Rép. Pour les points M_1 et M_3, $w_c=0$;
pour les points M_2 et M_4, $w_c=0{,}581$ cm/s².

23.56. Le fleuve Néva coule de l'est à l'ouest suivant le 60ᵉ parallèle de latitude nord avec la vitesse $v_r=4$ km/h. Déterminer sur la tangente BC au méridien correspondant la somme des projections des composantes des accélérations des particules d'eau qui dépendent de la vitesse d'écoulement. Le rayon de la Terre $R=64\cdot10^5$ m.

Rép. $w_{BC}=1\,396\cdot10^{-5}$ cm/s².

23.57. Dans les hypothèses du problème précédent trouver les composantes de l'accélération absolue d'une particule d'eau.

Rép. $w_e=1\,692\cdot10^{-3}$ cm/s²; $w_r=386\cdot10^{-7}$ cm/s²;
$w_c=1\,616\cdot10^{-5}$ cm/s².

23.58. Trouver l'accélération absolue des boules d'un régulateur centrifuge de Watt tournant autour de son axe vertical, si à l'instant donné sa vitesse et son accélération angulaires sont $\omega=\frac{\pi}{2}$ s^{-1} et $\varepsilon=1$ s^{-2}, la vitesse angulaire de divergence des boules étant $\omega_1=\frac{\pi}{2}$ s^{-1} et l'accélération $\varepsilon_1=0{,}4$ s^{-2}. La longueur des leviers des boules est $l=50$ cm, la distance entre les axes de leurs articulations $2e=10$ cm, l'angle d'ouverture du régulateur à l'instant considéré $\alpha=45°$. Négliger les dimensions des boules, en les considérant comme des points (cf. figure du problème 22.14).

Rép. $w=293{,}7$ cm/s².

23.59. Trouver l'accélération absolue des boules d'un régulateur centrifuge de Watt, si après un changement du régime de fonctionnement de la machine, le régulateur commence à tourner avec la vitesse angulaire $\omega=\pi$ s^{-1}, les boules continuant à s'abaisser à l'instant donné avec la vi-

tesse $v_r=100$ cm/s et avec l'accélération tangentielle $w_{r\tau}=10$ cm/s². L'angle d'ouverture du régulateur est $2\alpha=60°$; la longueur des leviers des boules $l=50$ cm; négliger la distance $2e$ entre leurs axes d'articulation. Considérer les boules comme des points (cf. figure du problème 22.14).

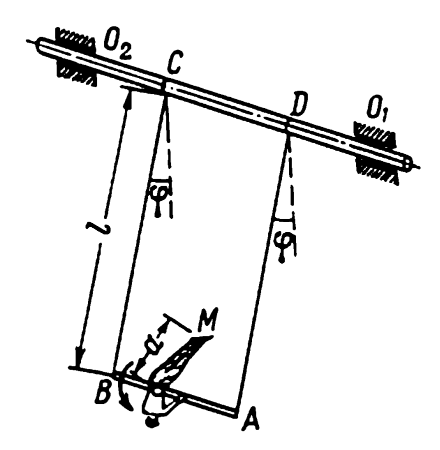
Rép. $w=671$ cm/s².

23.60. Le trapèze $ABCD$ effectue des oscillations autour de l'axe horizontal O_1O_2 d'après la loi $\varphi=\varphi_0 \sin \omega t$. Un trapéziste travaillant sur la barre AB tourne autour de celle-ci avec une vitesse angulaire relative $\omega=$const; $BC=AD=l$. Déterminer l'accélération absolue du point M situé sur la semelle du trapéziste dont la distance de la barre AB est a à l'instant $t=\frac{\pi}{\omega}$ s.

A l'instant initial la position du trapéziste était verticale, la tête en haut; le trapèze $ABCD$ occupait également la position verticale basse.

Rép. $w_M=\omega^2[\varphi_0^2(l-a)-a(2\varphi_0+1)]$,

dirigée verticalement vers le haut, si l'expression entre crochets est positive.



Probl. 23.60

23.61. Un point se déplace suivant le rayon d'un disque d'après la loi $r=ae^{kt}$, où a, k sont des constantes. Le disque tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre, d'après la loi $\varphi=kt$. Déterminer la vitesse absolue, l'accélération absolue et les accélérations tangentielle et normale du point.

Rép. $v=ake^{kt}\sqrt{2}$; $w=2ak^2e^{kt}$;
$w_\tau=ak^2e^{kt}\sqrt{2}$; $w_n=ak^2e^{kt}\sqrt{2}$.

23.62. Le point M se déplace sur la surface de la Terre; l'angle formé par la direction du nord et la vitesse $\mathbf{v}$ du point par rapport à la Terre (le cap) est k, la latitude du lieu à l'instant donné est φ.
Déterminer les composantes est w_{cx}, nord w_{cy} et verticale w_{cz} de l'accélération de Coriolis du point.

Rép. $w_{cx} = -2v\omega \cos k \sin\varphi$; $w_{cy} = 2v\omega \sin k \sin\varphi$; $w_{cz} = -2v\omega \sin k \cos\varphi$, où ω est la vitesse angulaire de la Terre.

23.63. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, la valeur et la direction de la composante horizontale de l'accélération de Coriolis du point *M*.

Rép. $w_{cH} = 2v\omega \sin\varphi$; la composante horizontale est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$ du point *M* par rapport à la Terre et est dirigée à gauche de celle-ci dans l'hémisphère nord et à droite dans l'hémisphère sud.

· **23.64.** La hauteur d'un point *M* au-dessus de la surface de la Terre est h, la latitude du lieu est φ. Déterminer les composantes est w_{ex}, nord w_{ey} et verticale w_{ez} de l'accélération d'entraînement du point due à la rotation de la Terre (le rayon de la Terre est R, sa vitesse angulaire ω).

Rép. $w_{ex} = 0$; $w_{ey} = (R+h)\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$; $w_{ez} = -(R+h)\omega^2 \cos^2\varphi$.

23.65. Les projections est, nord et verticale de la vitesse du point *M* par rapport à la Terre sont respectivement v_{E}, v_{N} et v_h. Déterminer les projections de l'accélération relative du point sur les axes de coordonnées x, y, z (l'axe des x est dirigé vers l'est, l'axe des y vers le nord et l'axe des z suivant la verticale), si sa hauteur au-dessus de la surface de la Terre à l'instant donné est h, la latitude du lieu φ (R et ω sont le rayon et la vitesse angulaire de la Terre).

Rép. $$w_{rx} = \dot{v}_{\mathrm{E}} - \frac{v_{\mathrm{E}} v_{\mathrm{N}}}{R+h} \operatorname{tg}\varphi + \frac{v_{\mathrm{E}} v_h}{R+h};$$
$$w_{ry} = \dot{v}_{\mathrm{N}} + \frac{v_{\mathrm{E}}^2}{R+h} \operatorname{tg}\varphi + \frac{v_{\mathrm{N}} v_h}{R+h}; \quad w_{rz} = \dot{v}_h - \frac{v_{\mathrm{E}}^2 + v_{\mathrm{N}}^2}{R+h}.$$

23.66. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, les composantes de l'accélération absolue du point *M* se déplaçant à proximité de la Terre.

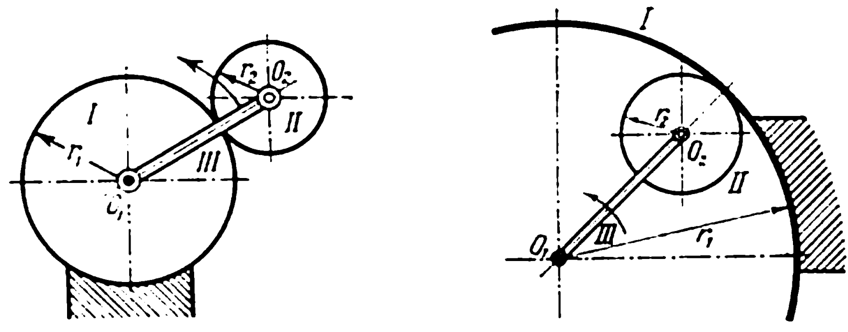
Rép. $$w_x = \dot{v}_{\mathrm{E}} - \frac{v_{\mathrm{E}} v_{\mathrm{N}}}{R+h} \operatorname{tg}\varphi + \frac{v_{\mathrm{E}} v_h}{R+h} - 2(v_{\mathrm{N}} \sin\varphi - v_h \cos\varphi)\,\omega;$$
$$w_y = \dot{v}_{\mathrm{N}} + \frac{v_{\mathrm{E}}^2}{R+h} \operatorname{tg}\varphi + \frac{v_{\mathrm{N}} v_h}{R+h} + (R+h)\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi +$$
$$+ 2v_{\mathrm{E}}\,\omega \sin\varphi;$$
$$w_z = \dot{v}_h - \frac{v_{\mathrm{E}}^2 + v_{\mathrm{N}}^2}{R+h} - (R+h)\,\omega^2 \cos^2\varphi - 2v_{\mathrm{E}}\,\omega \cos\varphi.$$

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT COMPOSÉ DU CORPS SOLIDE

§ 24. Composition des mouvements plans d'un corps

24.1. La manivelle *III* relie les axes O_1 et O_2 de deux roues dentées *I* et *II* engrenées soit extérieurement soit intérieurement, comme cela est indiqué sur la figure; la roue *I* est fixe, la manivelle *III* tourne autour de l'axe O_1 avec la vitesse angulaire ω_3.



Probl. 24.1

Connaissant les rayons des roues r_1 et r_2, calculer la vitesse angulaire absolue ω_2 de la roue *II* et sa vitesse angulaire relative ω_{23} par rapport à la manivelle.

Rép. Engrenage extérieur:

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_2}{r_2}; \quad \omega_{23} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$

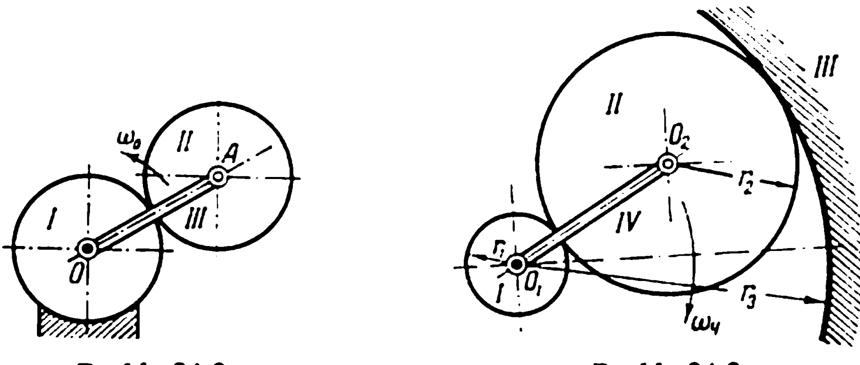
Engrenage intérieur:

$$\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}; \quad \omega_{23} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$

Le signe moins indique que les corps correspondants tournent en sens contraires.

24.2. Trouver les vitesses angulaires absolue et relative de la roue dentée *II* de rayon *r* roulant sur une roue dentée fixe *I* de même rayon; la roue *II* est animée par la manivelle *III* qui tourne autour de l'axe *O* de la roue dentée fixe avec la vitesse angulaire ω_0; la manivelle *OA* effectue un mouvement d'entraînement.

Rép. $\omega_{23} = \omega_0$; $\omega_2 = 2\omega_0$.



Probl. 24.2 Probl. 24.3

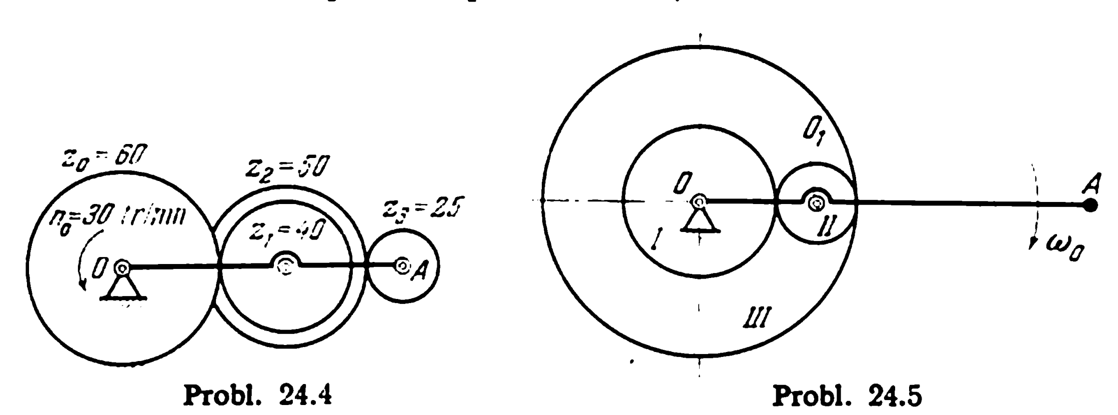
24.3. L'engrenage imprimant à une meule une rotation rapide est construit de la manière suivante : à l'aide d'une manivelle spéciale on fait tourner la barre *IV* autour de l'axe O_1 avec une vitesse angulaire ω_1; l'extrémité O_2 de la barre comporte un axe sur lequel est montée librement une roue *II* de rayon r_2. Lorsqu'on tourne la manivelle l'axe fait rouler la roue *II*, sans glissement, sur la circonférence extérieure fixe *III* de rayon r_3. Alors, grâce au frottement, la roue *II* fait tourner, sans glissement, la roue *I* de rayon r_1 montée librement sur l'axe O_1 et solidaire de l'axe de la meule.

Etant donné le rayon r_3 de la circonférence fixe extérieure trouver la valeur de r_1 pour que $\omega_1/\omega_4=12$, autrement dit pour que la meule tourne 12 fois plus vite que la manivelle.

Rép. $r_1=\frac{1}{11}r_3$.

24.4. Trouver le nombre de tr/mn que fait un pignon dont le nombre de dents $z_3=25$, si la manivelle OA tourne autour de l'axe O du pignon fixe (dont le nombre de dents $z_0=60$) avec une vitesse angulaire correspondant à $n_0=30$ tr/mn et porte l'axe d'un pignon double dont le nombre de dents $z_1=40$, $z_2=50$.

Rép. $n_3=n_0\left(1-\frac{z_0 z_2}{z_1 z_3}\right)=-60$ tr/mn (en ce qui concerne le signe moins, cf. réponse du problème 24.1).



Probl. 24.4 Probl. 24.5

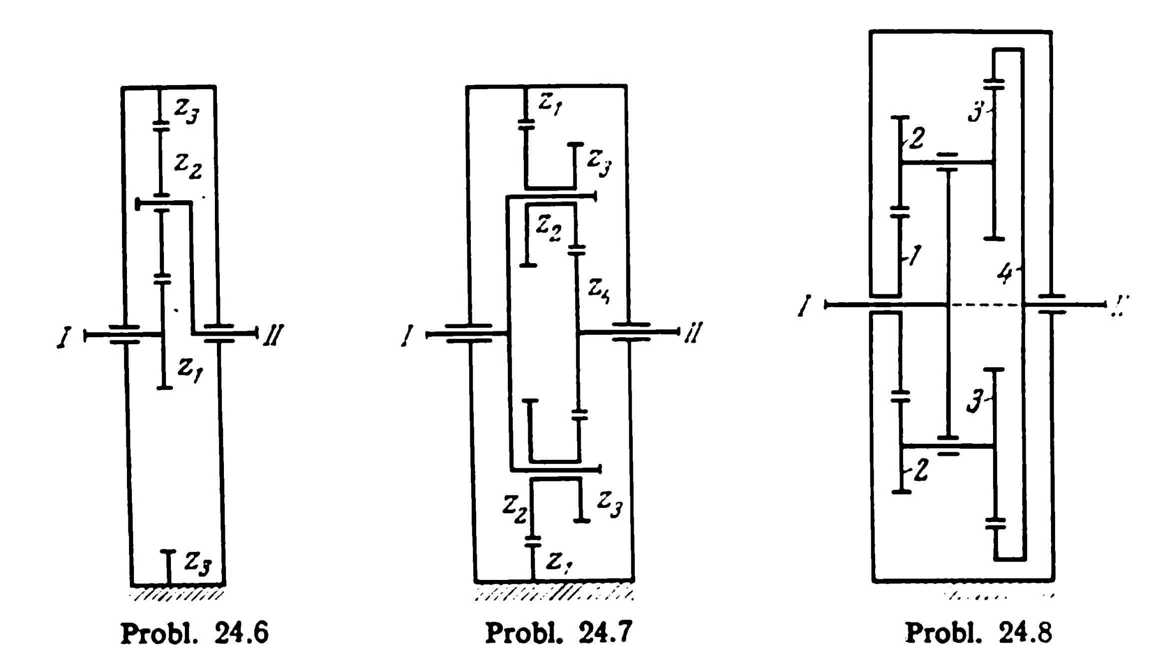
24.5. Dans un mécanisme épicyclique la manivelle OA et la roue *I* de rayon r_1 sont librement montées sur l'arbre O; l'axe O_1 de la roue *II*

est solidaire de la manivelle, la roue *III* de rayon r_3 peut tourner librement autour de l'axe *O*.

Déterminer la vitesse angulaire ω_1 de la roue *I*, si la vitesse angulaire de la manivelle *OA* est ω_0; la roue *III* est entraînée par un autre moteur et tourne avec une vitesse angulaire ω_3 de sens opposé à celui de la manivelle.

Rép. $\omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_3}{r_1} \left|\omega_3\right|$.

24.6. Un réducteur de vitesses est composé de trois pignons. Le premier (nombre de dents $z_1=20$) est monté sur l'arbre moteur *I* faisant $n_1=$ $=4\,500$ tr/mn, le second ($z_2=25$) est monté librement sur un axe qui est



Probl. 24.6 Probl. 24.7 Probl. 24.8

solidaire de l'arbre entraîné *II*, le troisième ($z_3=70$), engrené intérieurement, est fixe.

Trouver le nombre de tr/mn de l'arbre entraîné et du pignon mobile.

Rép. $n_{II}=1\,000$ tr/mn; $n_2=-1\,800$ tr/mn.

24.7. L'arbre moteur *I* d'un réducteur de vitesses fait $n_1=1\,200$ tr/mn. Trouver le nombre de tr/mn de l'arbre entraîné *II*, si le pignon fixe engrené intérieurement possède $z_1=180$ dents, les pignons mobiles jumelés possèdent $z_2=60$ et $z_3=40$ dents, le pignon solidaire de l'arbre entraîné possède $z_4=80$ dents.

Rép. $n_{II}=3\,000$ tr/mn.

24.8. Un réducteur de vitesses est composé d'un pignon fixe de rayon $r_1=40$ cm, de deux pignons mobiles jumelés de rayons $r_2=20$ cm et $r_3=$ $=30$ cm, et d'un pignon engrené intérieurement de rayon $r_4=90$ cm monté sur l'arbre entraîné. L'arbre moteur et la manivelle portant les axes des pignons mobiles font $n_I=1\,800$ tr/mn.

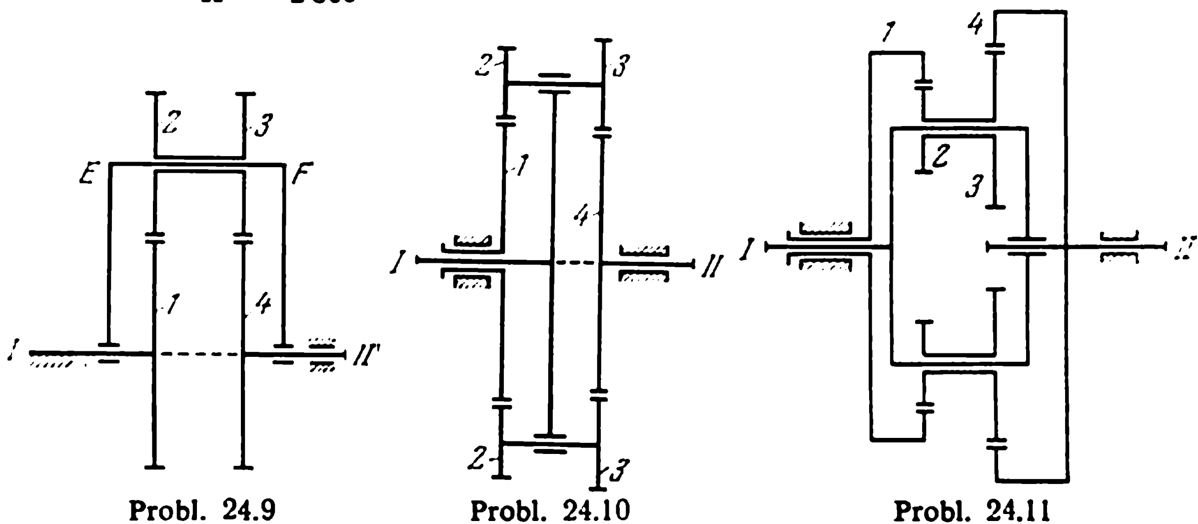
Trouver le nombre de tr/mn de l'arbre entraîné.

Rép. $n_{II}=3\,000$ tr/mn.

24.9. Un réducteur de vitesses à transmission planétaire est composé d'un pignon solaire fixe *1* solidaire de l'arbre *I*, d'un cadre tournant librement autour des axes *I* et *II* avec la vitesse angulaire Ω, de deux pignons *2* et *3* solidaires l'un de l'autre et montés librement sur l'axe *EF* tournant avec le cadre, et d'un pignon entraîné *4* solidaire de l'arbre *II*.

Déterminer le rapport de la vitesse angulaire de l'arbre *II* à la vitesse angulaire du cadre, si les nombres de dents des pignons sont: $z_1=49$; $z_2=50$; $z_3=51$; $z_4=50$.

Rép. $\frac{\omega_{II}}{\Omega}=\frac{1}{2\,500}$.



Probl. 24.9 Probl. 24.10 Probl. 24.11

24.10. Trouver la vitesse angulaire ω_{II} de l'arbre entraîné d'un réducteur à transmission différentielle, si l'arbre moteur et la manivelle, portant les pignons de transmission jumelés, tournent avec la vitesse angulaire $\omega_I = 120\ s^{-1}$. La roue *1* tourne avec la vitesse angulaire $\omega_1 = 180\ s^{-1}$ et possède $z_1=80$ dents; les nombres de dents des pignons mobiles sont: $z_2=20$, $z_3=40$, le pignon monté sur l'arbre entraîné ayant $z_4=60$ dents. Le pignon *1* et l'arbre moteur tournent dans le même sens.

Rép. $\omega_{II}=280\ s^{-1}$.

24.11. Un réducteur de vitesses à transmission différentielle est composé de quatre pignons dont le premier, en grené intérieurement, fait 160 tr/mn et possède $z_1=70$ dents; le deuxième et le troisième sont jumelés et se trouvent montés sur un axe qui tourne autour de l'axe de l'arbre moteur *I* avec ce dernier et fait $n_I=1\,200$ tr/mn; les nombres de dents sont $z_2=20$, $z_3=30$; le quatrième pignon, engrené intérieurement, possède $z_4=80$ dents et est solidaire de l'arbre entraîné.

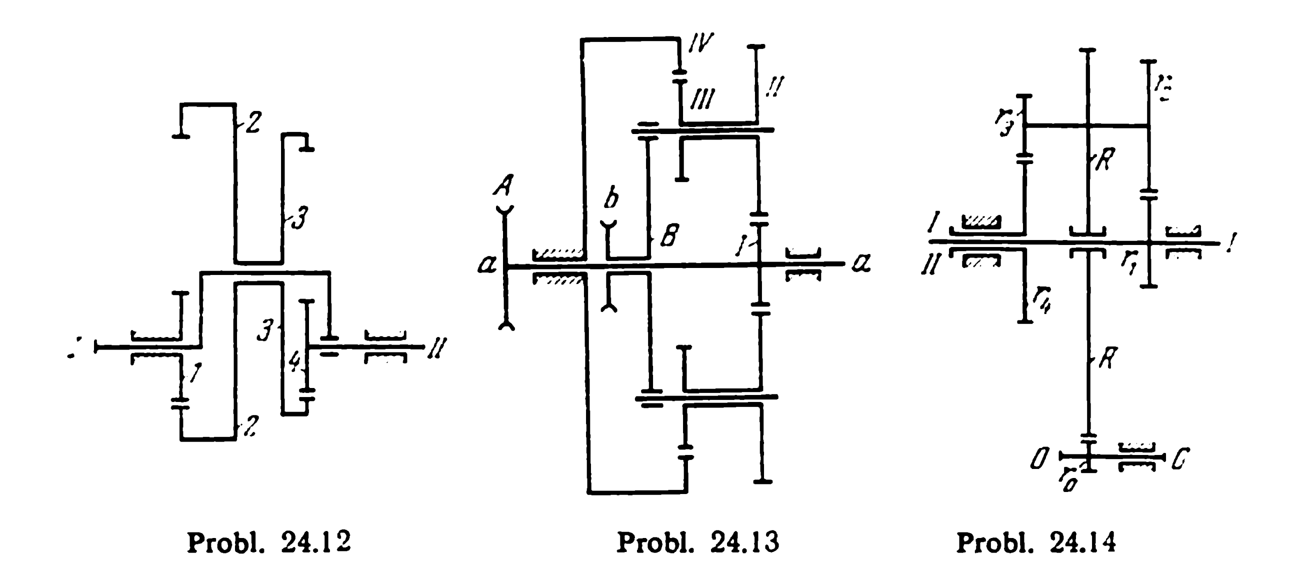
Trouver le nombre de tr/mn de l'arbre entraîné, si l'arbre *I* et le pignon *1* tournent en sens contraires.

Rép. $n_{II}=585$ tr/mn.

24.12. Un réducteur de vitesses est composé d'un pignon fixe *1*, de deux pignons mobiles jumelés *2* et *3*, engrenés intérieurement, et d'un pignon *4* solidaire de l'arbre entraîné.

Trouver le nombre de tr/mn de l'arbre entraîné, si les nombres de dents sont: $z_1=30$, $z_2=80$, $z_3=70$, $z_4=20$; l'arbre moteur tourne avec une vitesse angulaire $n_1=1\ 200$ tr/mn.

Rép. $n_{II}=-375$ tr/mn.



Probl. 24.12   Probl. 24.13   Probl. 24.14

24.13. Dans le bloc du système «Triplex» un bloc à chaîne *A* est monté rigidement sur l'arbre *a-a*; un moyeu *b* avec la chaîne de charge, solidaire de la manivelle *B*, est monté librement sur le même arbre. Deux pignons jumelés *II* et *III* sont montés librement sur chaque axe de la manivelle, le pignon *II* étant engrené avec le pignon *I* solidaire de l'arbre *a-a*, et le pignon *III* avec le pignon fixe *IV*.

Déterminer le rapport des vitesses angulaires de l'arbre *a-a* et du moyeu *b*, si les nombres de dents des pignons *I*, *II*, *III* et *IV* sont respectivement: $z_1=12$, $z_2=28$, $z_3=14$, $z_4=54$.

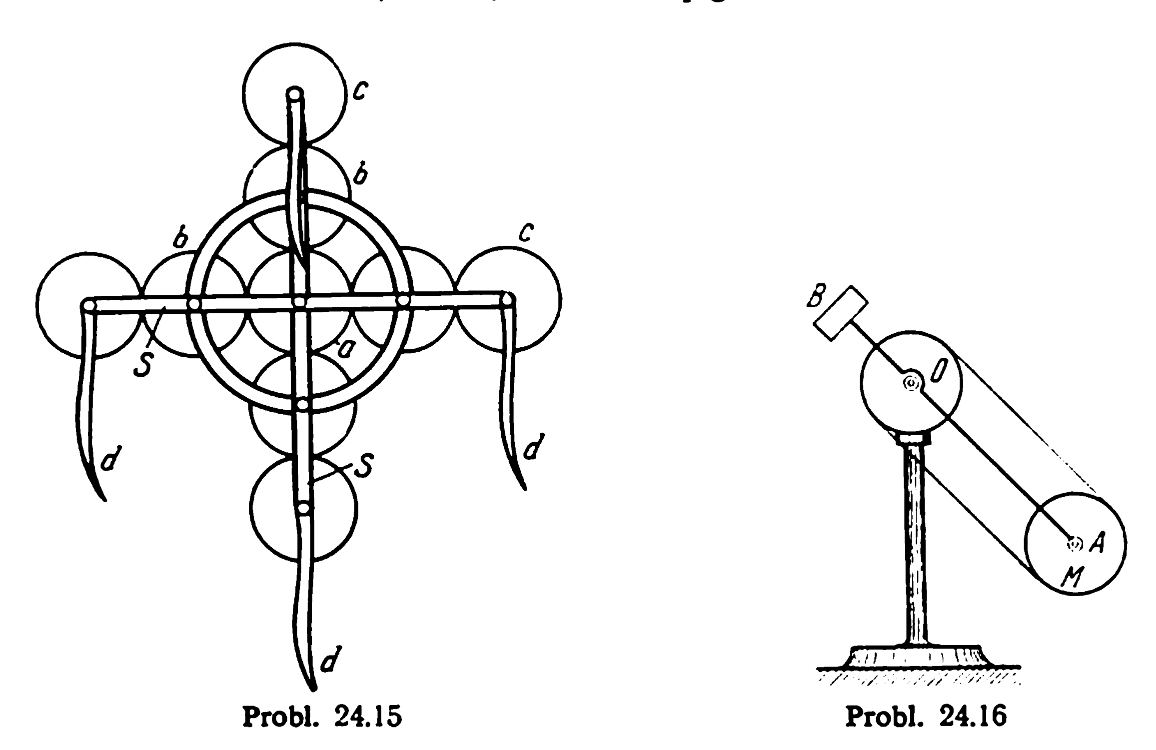
Rép. $\frac{\omega_a}{\omega_b}=10$.

24.14. Dans un différentiel à roues droites le pignon de rayon R est monté librement sur l'arbre *I-I* et porte les pignons jumelés de rayons r_2 et r_3. La roue R est entraînée par un pignon de rayon r_0. Les pignons de rayons r_2 et r_3 sont engrenés avec les pignons de rayons r_1 et r_4 solidaires respectivement des arbres *I-I* et *II*, ce dernier formant un moyeu.

Trouver la vitesse angulaire de l'arbre *II*, si l'on connaît les vitesses angulaires de rotation n_1 et n_0 des arbres *I-I* et *O-O*, ces arbres tournant dans le même sens.

Rép. $n_2=\left(n_1+n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}-n_0\frac{r_0}{R}$.

24.15. Dans la transmission planétaire d'une arracheuse de pommes de terre le pignon central *a*, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme avec son axe, est lié, à l'aide de pignons auxiliaires *b*, avec des



Probl. 24.15 Probl. 24.16

pignons mobiles *c* dont les moyeux supportent les ailettes *d*; les axes des pignons *b* et *c* sont fixés sur les barres *S* tournant autour de l'axe du pignon central avec la vitesse angulaire ω_0.

Déterminer la vitesse angulaire absolue des pignons, ainsi que la nature du mouvement des ailettes, si les rayons de tous les pignons sont identiques.

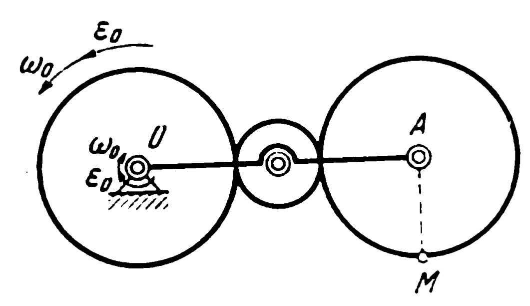
Rép. $\omega=0$; les ailettes sont animées d'un mouvement de translation cycloïdal avec les centres des pignons *c*.

24.16. La manivelle *OA* avec un contrepoids *B* tourne avec la vitesse angulaire $\omega_0=\text{const}$ autour de l'axe *O* d'un pignon fixe et porte à l'extrémité *A* l'axe d'un autre pignon de même dimension relié au premier par une chaîne.

Déterminer la vitesse et l'accélération angulaires du pignon mobile, ainsi que la vitesse et l'accélération de son point arbitraire *M*, si la longueur de la manivelle $OA=l$.

Rép. $\omega=0$; $\varepsilon=0$, le pignon effectue un mouvement de translation circulaire avec le centre *A*; $v_M=v_A=l\omega$; $w_M=w_A=l\omega_0^2$.

24.17. Dans une transmission épicyclique le pignon moteur de rayon R tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre avec la vitesse angulaire ω_0 et l'accélération angulaire ε_0; une manivelle de longueur $3R$ tourne autour de son centre dans le sens des aiguilles d'une montre avec la même vitesse et la même accélération angulaires.



Probl. 24.17

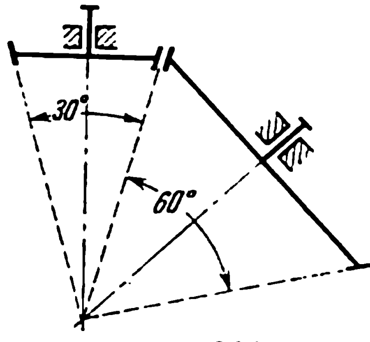
Trouver la vitesse et l'accélération d'un point M du pignon entraîné de rayon R situé à l'extrémité du diamètre perpendiculaire à la manivelle à l'instant considéré.

Rép. $v = R\omega_0\sqrt{10}$; $w = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2+\omega_0^4-12\omega_0^2\varepsilon_0}$.

§ 25. Composition des mouvements d'un corps dans l'espace

25.1. Etant donnés deux pignons coniques, dont les axes sont fixes et les angles correspondants α et β, déterminer la vitesse angulaire ω_2 du second pignon (le premier tourne avec la vitesse angulaire ω_1) et calculer cette vitesse pour $\alpha=30°$, $\beta=60°$, $\omega_1=10$ tr/mn.

Rép. $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 5{,}16$ tr/mn.



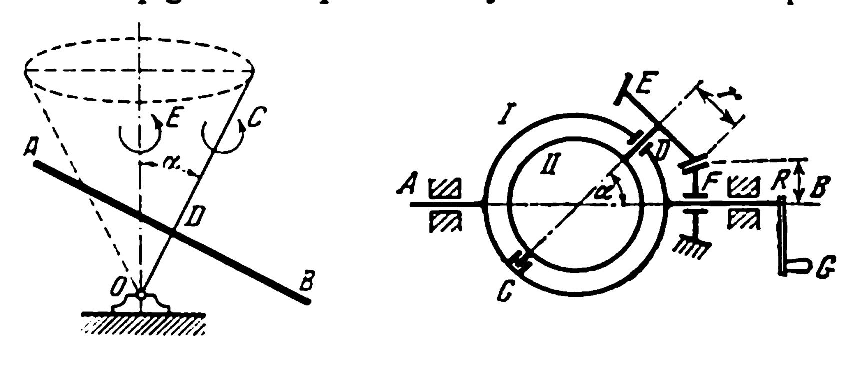
Probl. 25.1

25.2. Un manège formé par une aire circulaire AB, tournant autour de l'axe OC passant par son centre D, fait 6 tr/mn; l'axe OC tourne dans le même sens autour de la verticale OE et fait 10 tr/mn. L'angle entre les axes $\alpha=20°$, le diamètre de l'aire AB est de 10 m, la distance $OD=2$ m.

Déterminer la vitesse **v** du point B à l'instant où il occupe la plus basse position.

Rép. $v=8{,}77$ m/s.

25.3. Un concasseur sphérique est composé d'une sphère creuse II (contenant les billes et la matière à concasser) montée sur l'axe CD, auquel est fixé un pignon conique E de rayon r. L'axe CD repose sur des



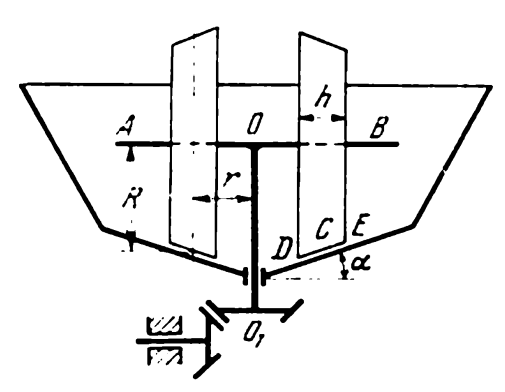
Probl. 25.2 Probl. 25.3

paliers dans le cadre I solidaire de l'axe AB et entraîné en rotation par la manivelle G. La roue E est engrenée avec le pignon fixe F de rayon R.

Déterminer la vitesse angulaire absolue du concasseur sphérique, si la manivelle tourne avec la vitesse angulaire ω_0; l'angle entre les axes AB et CD vaut α. Déterminer aussi l'accélération angulaire absolue du concasseur sphérique si la vitesse angulaire de la manivelle $\omega_0=\text{const}$.

Rép. $\omega_A=\frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}$; $\varepsilon=\omega_0^2\,\frac{R}{r}\sin\alpha$.

25.4. Pour broyer le minerai on utilise des molettes en fonte sous forme de roues dont les jantes en acier roulent sur le fond d'une cuve conique.



Probl. 25.4

Les molettes tournent autour de l'axe horizontal AOB, lequel, à son tour, tourne autour de l'axe vertical OO_1 solidaire de l'axe AOB.

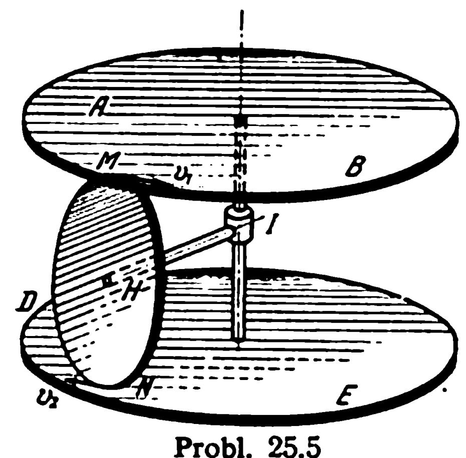
Trouver les vitesses absolues des points D et E de la jante d'une molette en admettant que son axe de rotation instantané passe par le milieu C de la ligne de tangence de la jante de la molette avec le fond de la cuve. La

vitesse de rotation autour de l'axe vertical $\omega_e = 1\ s^{-1}$, la largeur de la molette $h = 50$ cm. Le rayon moyen de la molette $R = 1$ m, le rayon moyen de rotation $r = 60$ cm, $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$.

Rép. $v_D = v_E = 28$ cm/s.

25.5. Une transmission différentielle comporte deux disques AB et DE dont les centres sont situés sur leur axe commun de rotation; ces disques enserrent la roue MN dont l'axe HI est perpendiculaire à l'axe des disques.

Déterminer la vitesse v du centre H de la roue MN ainsi que sa vitesse angulaire ω_r de rotation autour de l'axe HI, les vitesses des points de tangence de la roue avec les disques étant: $v_1 = 3$ m/s, $v_2 = 4$ m/s, le rayon de la roue $r = 5$ cm.



Probl. 25.5

Rép. $v = 0{,}5$ m/s; $\omega_r = 70\ s^{-1}$.

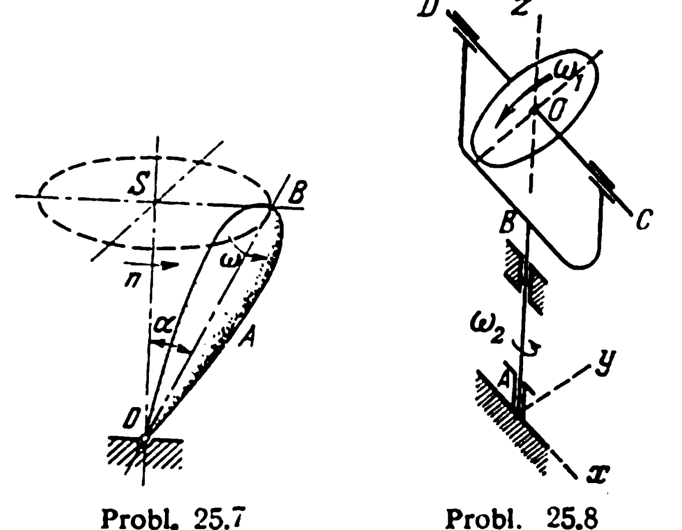
25.6. Déterminer, dans les conditions du problème précédent et connaissant la longueur $HI = \frac{1}{14}$ m, la vitesse et l'accélération angulaires absolues de la roue MN.

Rép. $\omega = \sqrt{4\,949}\ s^{-1}$; $\varepsilon = 490\ s^{-2}$.

25.7. Une toupie A tourne autour de l'axe OB avec une vitesse angulaire constante $\omega_1\ s^{-1}$. L'axe OB décrit uniformément un cône. Le sommet de la toupie B fait n tr/mn, $\widehat{BOS} = \alpha$.

Trouver la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε de la toupie.

Rép. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2\omega_1 \frac{\pi n}{30} \cos \alpha}$; $\varepsilon = \omega_1 \frac{\pi n}{30} \sin \alpha$.



Probl. 25.7 Probl. 25.8 Probl. 25.9

25.8. Un disque circulaire tourne avec la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe horizontal CD; cet axe tourne simultanément autour de l'axe vertical AB passant par le centre O du disque avec la vitesse angulaire ω_2.

Calculer la valeur et la direction de la vitesse angulaire instantanée ω et de l'accélération angulaire instantanée ε du disque si $\omega_1=5\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2=$ $=3\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rép. $\omega=5{,}82\ \mathrm{s}^{-1}$ et forme des angles $\alpha=30°57'$ et $\beta=59°3'$ avec les axes positifs des x et des z; $\varepsilon=15\ \mathrm{s}^{-2}$ et est dirigée suivant l'axe des y.

25.9. Un disque de rayon R tourne avec une vitesse angulaire constante ω_r autour de l'axe horizontal O_1O_2, lequel à son tour tourne avec une vitesse angulaire constante ω_e autour d'un axe vertical.

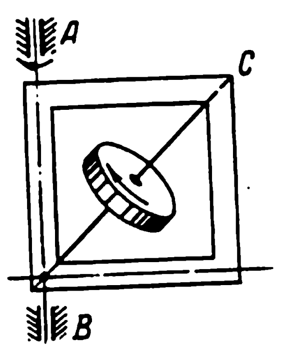
Trouver les vitesses et les accélérations des points A et B situés aux extrémités du diamètre vertical du disque.

Rép. $v_A=v_B=R\omega_r$; $w_A=w_B=R\omega_r\sqrt{4\omega_e^2+\omega_r^2}$.

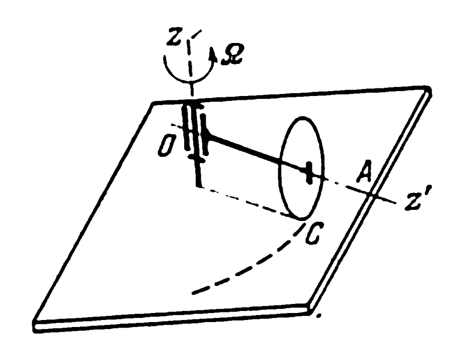
25.10. Un cadre carré tourne autour de l'axe AB et fait 2 tr/mn. Un disque tourne autour de l'axe BC confondu avec la diagonale du cadre et fait 2 tr/mn.

Déterminer la vitesse angulaire absolue et l'accélération angulaire du disque.

Rép. $\omega=0{,}39\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon=0{,}031\ \mathrm{s}^{-2}$.



Probl. 25.10



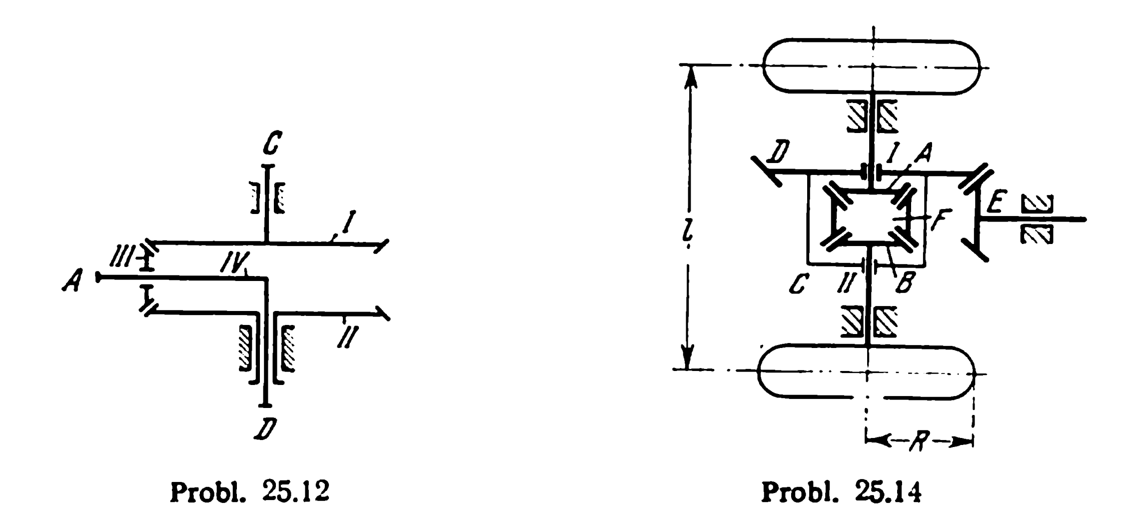
Probl. 25.11

25.11. L'axe d'une meule courante OA tourne uniformément autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire Ω. La longueur de l'axe $OA=R$, le rayon de la meule courante $AC=r$.

Admettant qu'à l'instant considéré le point C de la meule courante ait une vitesse nulle, déterminer la vitesse angulaire ω de la meule, la direction de l'axe instantané, les axoïdes mobile et fixe.

Rép. $\omega=\dfrac{\sqrt{R^2+r^2}}{r}\Omega$; l'axe instantané est la droite OC; les axoïdes sont les cônes de sommet au point O, l'axoïde mobile ayant l'angle au sommet $\widehat{z'OC}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{r}{R}$, l'axoïde fixe, l'angle au sommet $\widehat{zOC}=\pi-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{R}{r}$.

25.12. Une transmission différentielle est constituée d'un pignon conique *III* (le satellite) monté librement sur la manivelle *IV* qui peut tourner autour de l'axe fixe *CD*. Le satellite est engrené avec les pignons coniques *I* et *II* tournant dans le même sens autour du même axe *CD* avec des vitesses angulaires $\omega_1=5\ s^{-1}$ et $\omega_2=3\ s^{-1}$. Le rayon du satellite $r=2$ cm, les pignons *I* et *II* sont de même rayon $R=7$ cm.



Probl. 25.12 Probl. 25.14

Déterminer la vitesse angulaire ω_4 de la manivelle *IV*, la vitesse angulaire ω_{34} du satellite par rapport à la manivelle et la vitesse du point *A*.

Rép. $v_A=28$ cm/s; $\omega_4=4\ s^{-1}$; $\omega_{34}=3{,}5\ s^{-1}$.

25.13. Dans le mécanisme différentiel considéré dans le problème précédent les pignons coniques *I* et *II* tournent en sens contraires avec des vitesses angulaires $\omega_1=7\ s^{-1}$, $\omega_2=3\ s^{-1}$.

Déterminer v_A, ω_4 et ω_{34}, si $R=5$ cm, $r=2{,}5$ cm.

Rép. $v_A=10$ cm/s; $\omega_4=2\ s^{-1}$; $\omega_{34}=10\ s^{-1}$.

25.14. Lorsqu'une automobile se déplace suivant un chemin curviligne ses roues extérieures, parcourant un chemin plus long, doivent tourner plus vite que ses roues intérieures qui font un chemin moindre. Pour éviter la rupture de l'axe arrière de l'automobile on utilise une transmission à engrenage dite différentielle dont le mécanisme est le suivant.

L'axe arrière, sur lequel sont montées les deux roues, est formé de deux parties isolées *I* et *II*. Deux pignons identiques *A* et *B* sont rigidement fixés aux extrémités de ces parties. Sur ces parties de l'arbre une boîte *C* tourne sur des paliers avec un pignon conique *D* solidaire de cette boîte. Cette dernière est mise en rotation par l'arbre principal (longitudinal) qu'anime le moteur, par l'intermédiaire du pignon *E*.

La rotation de la boîte *C* est transmise aux pignons *A* et *B* à l'aide de deux pignons coniques *F* (satellites) tournant librement autour des axes fixés dans la boîte perpendiculairement à l'axe arrière *I-II* de l'automobile.

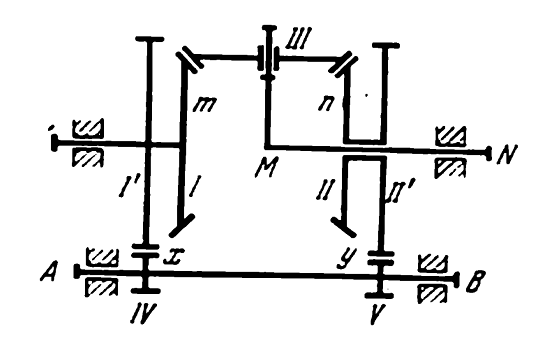
Trouver les vitesses angulaires des roues arrière de l'automobile en fonction de la vitesse angulaire de rotation de la boîte C et la vitesse angulaire ω_r des satellites par rapport à la boîte, si l'automobile effectue un virage de rayon moyen $\rho=5$ m, à la vitesse $v=36$ km/h; on sait que les rayons des roues de l'axe arrière $R=0{,}5$ m et que leur distance $l=2$ m; les rayons des pignons A et B sont le double de ceux des satellites: $R_0=2r$.

Rép. $\omega_1=24\ \text{s}^{-1}$; $\omega_2=16\ \text{s}^{-1}$; $\omega_r=8\ \text{s}^{-1}$.

25.15. Lorsqu'on utilise un système d'engrenage différentiel pour obtenir un rapport donné de nombres de tours des axes AB et MN aux pignons coniques I et II d'un engrenage différentiel on ajoute deux pignons cylindriques I' et II' qui s'engrènent avec les pignons IV et V fixés sur l'arbre AB.

Trouver le rapport entre les vitesses angulaires ω_0 et ω des arbres AB et MN, si les rayons des pignons I et II sont égaux, les nombres de dents des pignons I', II', IV et V étant respectivement m, n, x, y.

Rép. $\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}\right)$.



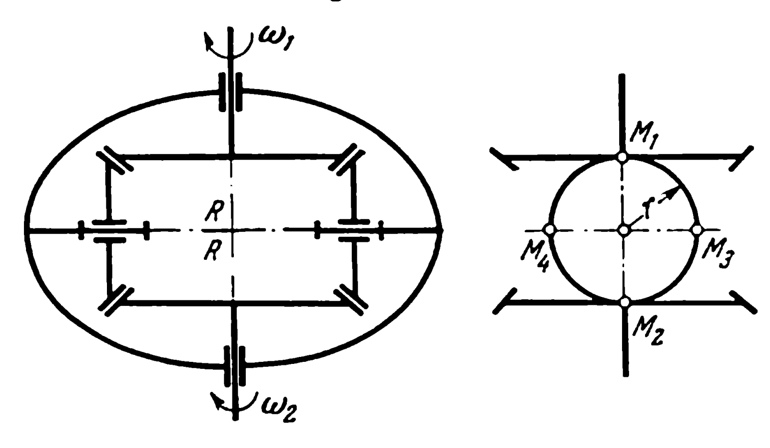
Probl. 25.15

25.16. Dans la transmission différentielle du problème précédent on introduit, entre les pignons I' et IV, un pignon parasite dont l'axe de rotation est fixe.

On demande de trouver, dans les hypothèses du problème précédent, le rapport entre les vitesses angulaires ω_0 et ω des axes AB et MN.

Rép. $\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m}-\dfrac{y}{n}\right)$.

25.17. La transmission différentielle, reliant les deux moitiés de l'axe arrière d'une automobile, est constituée de deux pignons de même rayon $R=6$ cm, montés sur des demi-axes qui tournent, lorsque l'automobile effectue un virage, avec des vitesses angulaires différentes mais constantes et



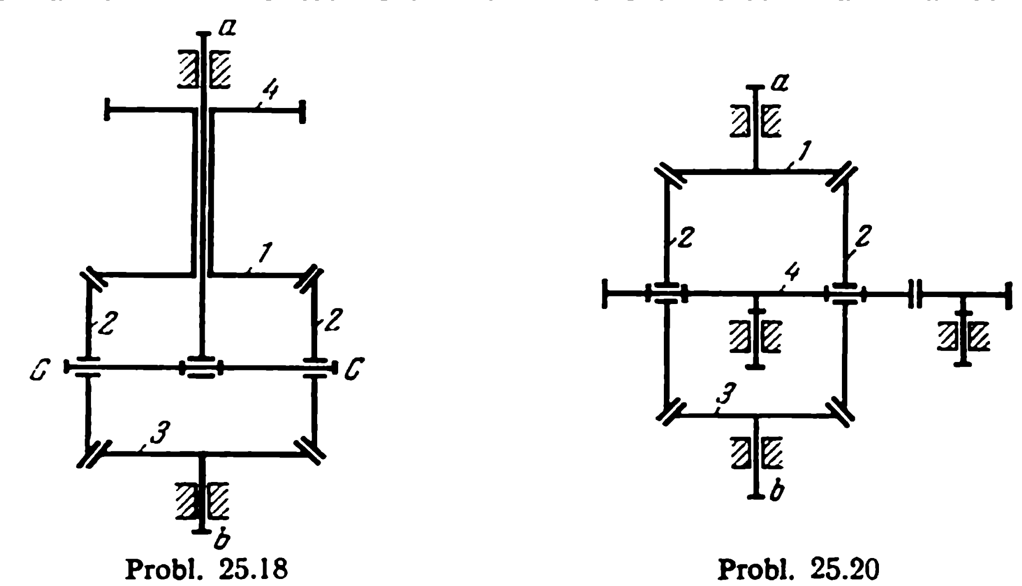
Probl. 25.17

de même sens, $\omega_1=6\ s^{-1}$ et $\omega_2=4\ s^{-1}$. Un satellite mobile de rayon $r=3$ cm monté librement sur un axe est inséré entre ces pignons. L'axe du satellite est solidaire de la boîte et peut tourner avec celle-ci autour de l'axe arrière de l'automobile.

Trouver, par rapport au châssis de l'automobile, les accélérations des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 du satellite situés aux extrémités de deux diamètres (cf. figure).

Rép. $w_1=210{,}4$ cm/s²; $w_2=90{,}8$ cm/s²; $w_3=w_4=173{,}4$ cm/s².

25.18. Dans le différentiel de la machine à tailler des engrenages la roue accélératrice *4* est montée librement sur l'arbre moteur *a* avec la roue *1*



Probl. 25.18 Probl. 25.20

dont elle est solidaire. L'arbre moteur *a* porte à son extrémité un moyeu par lequel passe l'axe *CC* des satellites *2-2*.

Déterminer la vitesse angulaire de l'arbre entraîné *b* solidaire de la roue *3*, dans les cinq cas suivants:

1) La vitesse angulaire de l'arbre moteur est ω_a, la vitesse angulaire de la roue accélératrice $\omega_4=0$.

2) La vitesse angulaire de l'arbre moteur est ω_a, la roue accélératrice tourne dans le même sens que l'arbre moteur avec la vitesse angulaire ω_4.

3) La roue accélératrice et l'arbre moteur tournent dans le même sens avec des vitesses angulaires identiques $\omega_4=\omega_a$.

4) La roue accélératrice et l'arbre moteur tournent dans le même sens, mais $\omega_4=2\omega_a$.

5) La vitesse angulaire de l'arbre moteur est ω_a, la roue accélératrice tourne dans le sens contraire avec la vitesse angulaire ω_4.

Rép. 1) $\omega_b=2\omega_a$; 2) $\omega_b=2\omega_a-\omega_4$; 3) $\omega_b=\omega_a$; 4) $\omega_b=0$;
5) $\omega_b=2\omega_a+\omega_4$.

25.19. Dans le différentiel de la machine à tailler les engrenages du problème précédent, la vitesse angulaire de l'arbre moteur $\omega_a=60$ tr/mn.

Déterminer l'accélération angulaire de la roue accélératrice pour laquelle l'arbre entraîné est immobile.

Rép. $\omega_4 = 120$ tr/mn.

25.20. Dans le différentiel de la machine à tailler les engrenages la roue accélératrice *4* porte l'axe des satellites. La vitesse angulaire de l'arbre moteur est ω_a. Déterminer la vitesse angulaire de l'arbre entraîné dans les trois cas suivants:

1) La roue accélératrice *4* et l'arbre moteur tournent dans le même sens et $\omega_4 = \omega_a$.

2) La roue accélératrice et l'arbre moteur tournent dans des sens opposés avec la même vitesse angulaire.

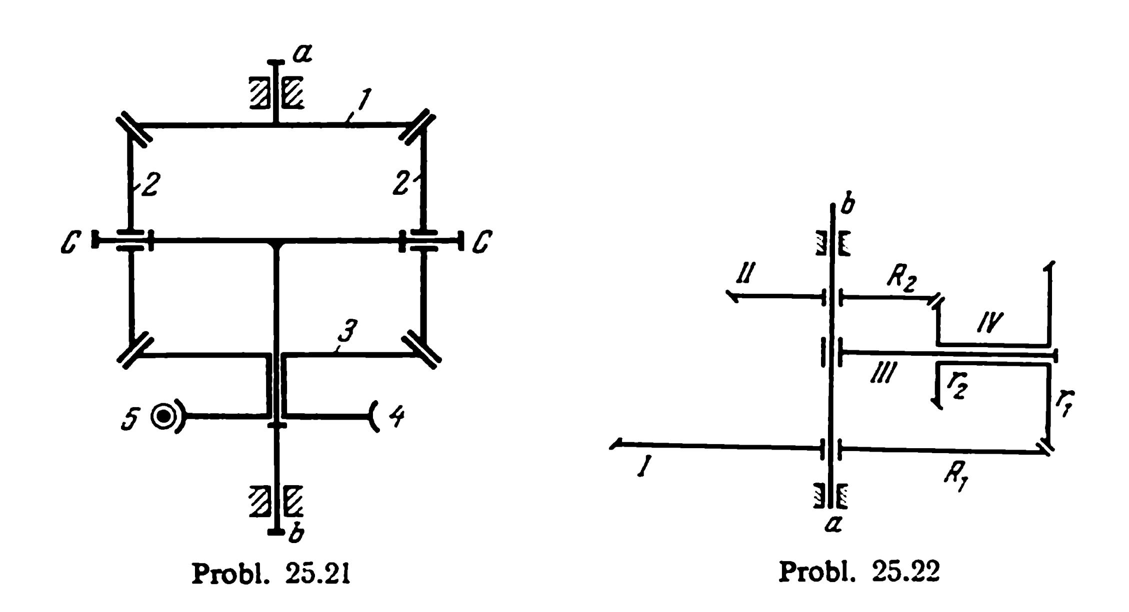
3) La roue accélératrice et l'axe des satellites sont immobiles.

Rép. 1) $\omega_b = \omega_a$; 2) $\omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_b = -\omega_a$.

25.21. Dans le différentiel d'une machine-outil le pignon conique *1* est fixé sur l'arbre moteur *a*; l'extrémité de l'arbre entraîné *b* porte un moyeu par lequel passe l'axe *CC* des satellites *2-2*. Le pignon conique *3* solidaire du pignon *4* de l'engrenage hélicoïdal *5* est monté librement sur ce même axe.

Déterminer le rapport de transmission lorsque l'engrenage hélicoïdal *5* et, par suite, les pignons *4* et *3* sont immobiles; les rayons des pignons coniques sont identiques.

Rép. $\frac{\omega_b}{\omega_a} = 0,5$.



Probl. 25.21 Probl. 25.22

25.22. Un différentiel double est composé de la manivelle *III* pouvant tourner autour de l'axe fixe *ab*. Le satellite *IV* constitué de deux pignons coniques solidaires l'un de l'autre, de rayons $r_1 = 5$ cm et $r_2 = 2$ cm, est monté librement sur cette manivelle. Ces pignons sont engrenés avec deux pignons coniques *I* et *II*, de rayons $R_1 = 10$ cm et $R_2 = 5$ cm, qui tournent autour

de l'axe *ab* et sont indépendants de la manivelle. Les vitesses angulaires des pignons *I* et *II* sont respectivement: $\omega_1=4{,}5\ s^{-1}$, $\omega_2=9\ s^{-1}$. Déterminer la vitesse angulaire de la manivelle ω_3 et la vitesse angulaire du satellite par rapport à la manivelle ω_{43}, les deux pignons tournant dans le même sens.

Rép. $\omega_3=7\ s^{-1}$; $\omega_{43}=5\ s^{-1}$.

25.23. Résoudre le problème précédent en supposant que les pignons *I* et *II* tournent en sens contraires.

Rép. $\omega_3=3\ s^{-1}$; $\omega_{43}=15\ s^{-1}$.

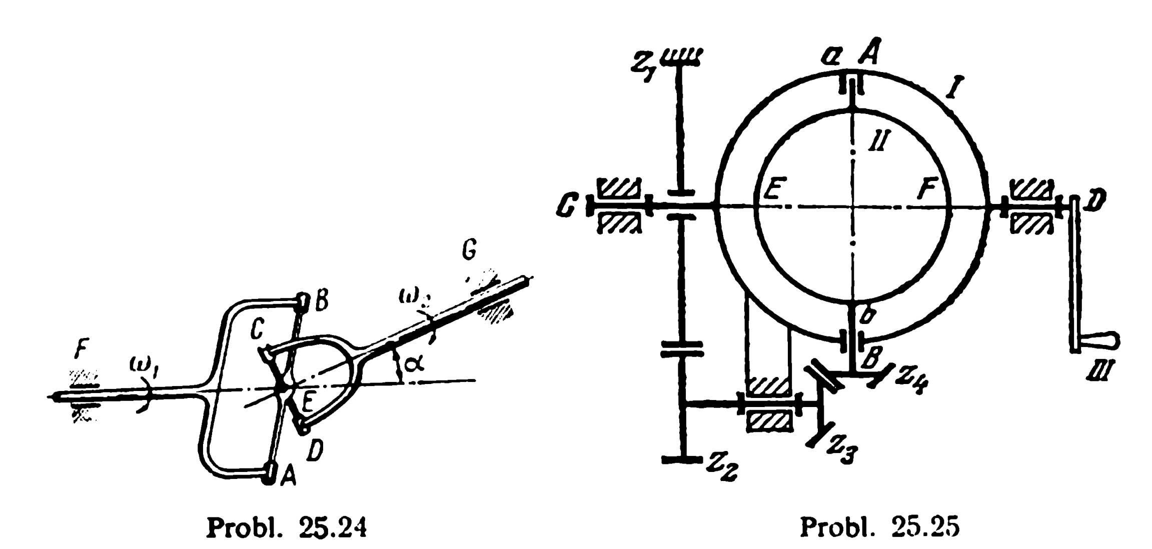
25.24. La croisée *ABCD* de l'articulation de Cardan-Hooke ($AB\perp$ $\perp CD$), utilisée pour transmettre la rotation entre deux axes qui se coupent, tourne autour du point fixe *E*.

Trouver le rapport ω_1/ω_2 pour les arbres reliés par la croisée dans les deux cas suivants:

1) lorsque le plan de la fourchette *ABF* est horizontal, et que celui de la fourchette *CDG* est vertical;

2) lorsque le plan de la fourchette *ABF* est vertical, celui de la fourchette *CDG* lui étant perpendiculaire. L'angle formé par les axes des arbres est constant et vaut $\alpha=60°$.

Rép. 1) $\omega_1/\omega_2=1/\cos\alpha=2$; 2) $\omega_1/\omega_2=\cos\alpha=0{,}5$.



Probl. 25.24

Probl. 25.25

25.25. Un concasseur sphérique est composé d'une sphère creuse de diamètre $d=10$ cm montée sur l'axe *AB* solidaire d'un pignon dont le nombre de dents est $z_4=28$. L'axe *AB* est fixé à un cadre tournant *I* dans les paliers *a* et *b*. Le cadre *I* est solidaire d'un axe *CD* entraîné par la manivelle *III*. La rotation du concasseur sphérique autour de l'axe *AB* s'effectue à l'aide de pignons dont le nombre des dents est respectivement $z_1=$ $=80$, $z_2=43$, $z_3=28$, le premier d'entre eux étant fixe.

Déterminer la vitesse angulaire absolue, l'accélération angulaire du concasseur, les vitesses et les accélérations de deux points *E* et *F* situés

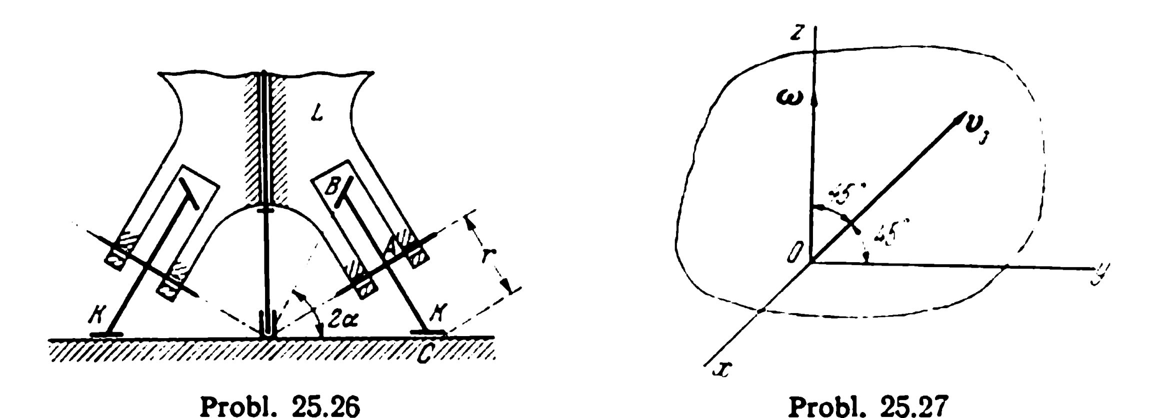
à l'instant considéré sur l'axe CD, si la manivelle tourne avec la vitesse angulaire constante $\omega=4{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rép. $\omega_B=9{,}08\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon=34{,}4\ \mathrm{s}^{-2}$; $v_E=v_F=40$ cm/s; $w_E=w_F=469{,}4$ cm/s².

25.26. La partie tournante d'un pont est posée sur des rouleaux en forme de pignons coniques K, dont les axes sont fixés obliquement dans un cadre annulaire L de sorte que leurs prolongements se coupent au centre géométrique du pignon de base sur lequel roulent les pignons K.

Trouver la vitesse et l'accélération angulaires du rouleau conique, les vitesses et les accélérations des points A, B, C (A étant le centre du pignon conique BAC), si le rayon de la base du rouleau $r=25$ cm, l'angle au sommet 2α, $\cos\alpha=84/85$. La vitesse angulaire de rotation du cadre annulaire autour de l'axe vertical $\omega_0=\mathrm{const}=0{,}1\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rép. $\omega=0{,}646\ \mathrm{s}^{-1}$; $\varepsilon=0{,}0646\ \mathrm{s}^{-2}$; $v_A=15{,}92$ cm/s; $v_B=31{,}84$ cm/s; $v_C=0$; $w_A=1{,}595$ cm/s²; $w_B=20{,}75$ cm/s²; $w_C=10{,}54$ cm/s².



Probl. 25.26 Probl. 25.27

25.27. Un corps se déplace dans l'espace, le vecteur de sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ étant dirigé, à l'instant considéré, suivant l'axe des z. La vitesse du point O du corps est $\mathbf{v}_0$ et se dirige suivant la bissectrice de l'angle formé par les axes Oz et Oy. Trouver le point du corps solide dont la vitesse est la plus petite et déterminer la valeur de cette vitesse.

Rép. $v_{\min}=v_0\cos 45°$. Telle est la vitesse des points de l'axe hélicoïdal instantané parallèle à l'axe des z et passant par le point de coordonnées

$$x=-\frac{v_0\cos 45°}{\omega},\quad y=0.$$

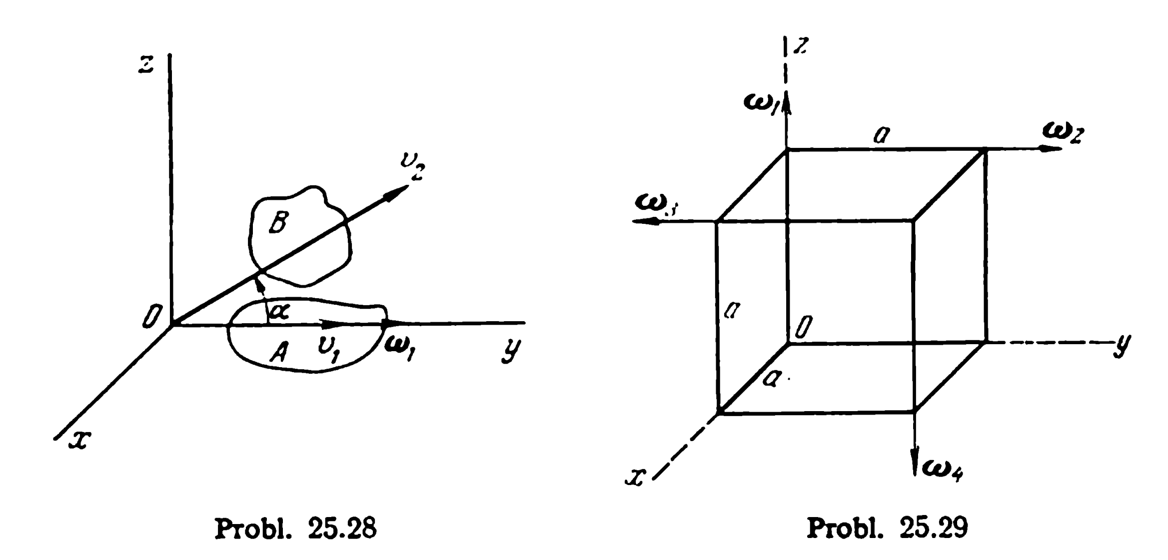
25.28. Un corps A tourne avec la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe Oy et est animé d'un mouvement de translation de vitesse $\mathbf{v}_1$ le long de ce même axe. Le corps B est animé d'un mouvement de translation dont la vitesse est $\mathbf{v}_2$ formant l'angle α avec l'axe Oy. Pour quelle valeur de v_1/v_2

le mouvement du corps A par rapport au corps B sera-t-il une rotation simple? Quelle sera alors la position de l'axe de rotation?

Rép. Pour $v_1/v_2 = \cos\alpha$ le mouvement relatif du corps A par rapport au corps B sera une rotation simple autour d'un axe parallèle à Oy distant de celui de

$$l = \frac{v_2 \sin\alpha}{\omega_1}$$

reportée suivant la perpendiculaire à l'axe Oy et à la composante de la vitesse relative $v_2 \sin\alpha$.



Probl. 25.28

Probl. 25.29

25.29. Un corps solide de forme cubique dont le côté $a = 2$ m, effectue simultanément quatre rotations de vitesses angulaires

$$\omega_1 = \omega_4 = 6\ \text{s}^{-1},\ \omega_2 = \omega_3 = 4\ \text{s}^{-1}.$$

Déterminer le mouvement résultant du corps.

Rép. Le corps est animé d'un mouvement de translation de vitesse v, dont les composantes sont $v_x = -12$ cm/s, $v_y = 12$ cm/s, $v_z = -8$ cm/s.

TROISIÈME PARTIE

Dynamique

CHAPITRE IX

DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

§ 26. Détermination des forces d'après le mouvement

26.1. Un ascenseur pesant 280 kgf descend dans un puits avec un mouvement uniformément accéléré; il parcourt 35 m dans les premières 10 s. Trouver la tension du câble auquel l'ascenseur se trouve suspendu.

Rép. 260 kgf.

26.2. Une plate-forme horizontale supportant une charge de 10 N descend verticalement avec une accélération 4 m/s^2.

Trouver la pression exercée par la charge sur la plate-forme durant la descente.

Rép. 5,92 N.

26.3. On attache une ficelle dont on tient l'autre extrémité à un corps de poids $P=3$ N qui repose sur une table.

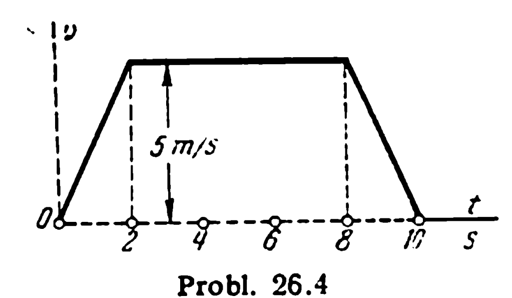
Quelle accélération doit-on communiquer à la main en soulevant le corps verticalement pour que la ficelle se rompe, si elle se rompt pour une tension de $T=4,2$ N?

Rép. $w=3,92$ m/s^2.

26.4. La courbe des vitesses de montée de la cabine d'un ascenseur a la forme indiquée sur la figure. Le poids de la cabine est de 480 kgf.

Déterminer les tensions T_1, T_2, T_3 du câble où est suspendue la cabine, dans les trois intervalles de temps: 1) de $t=0$ à $t=2$ s, 2) de $t=2$ s à $t=8$ s et 3) de $t=8$ s à $t=10$ s.

Rép. $T_1=602,4$ kgf, $T_2=480$ kgf, $T_3=357,6$ kgf.



Probl. 26.4

26.5. Une pierre pesant 3 N est attachée à une ficelle longue de 1 m et décrit une circonférence dans le plan vertical.

Déterminer la plus petite vitesse angulaire ω de la pierre pour laquelle la ficelle se rompt, si la résistance à la ruprute est de 9 N.

Rép. $\omega = 4{,}44\ s^{-1}$.

26.6. Sur les tronçons curvilignes d'une voie ferrée le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur afin que la pression exercée sur les rails par le train soit dirigée perpendiculairement à la voie.

Sachant que le rayon du tronçon curviligne est de 400 m, la vitesse du train de 10 m/s et la distance entre les rails de 1,6 m, déterminer la grandeur h de l'élévation du rail extérieur par rapport au rail intérieur.

Rép. $h = 4{,}1$ cm.

26.7. Dans le wagon d'un train qui suit une courbe à la vitesse de 75 km/h on pèse une charge avec un dynamomètre à ressort; le poids de la charge est 5 kgf, le dynamomètre indique 5,1 kgf.

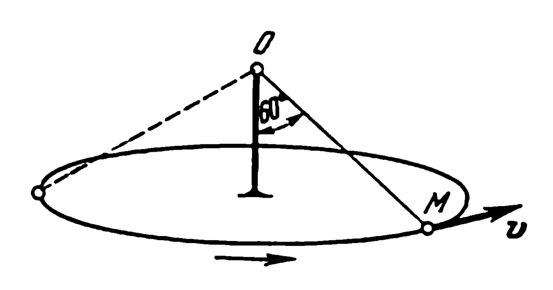
Déterminer le rayon de courbure de la voie en négligeant la masse du dynamomètre.

Rép. 202 m.

26.8. Un poids de 2 N est suspendu à l'extrémité d'un fil long de 1 m; par suite d'une secousse le poids acquiert une vitesse horizontale de 5 m/s.

Trouver la tension du fil immédiatement après la secousse.

Rép. 7,1 N.



Probl. 26.9

26.9. Une charge M pesant 1 N, suspendue à un fil long de 30 cm fixé au point immobile O, représente un pendule conique; autrement dit, elle décrit une circonférence dans le plan horizontal, le fil formant un angle de 60° avec la verticale.

Déterminer la vitesse v de la charge et la tension T du fil.

Rép. $v = 210$ cm/s; $T = 2$ N.

26.10. Une automobile pesant 1 000 kgf se déplace sur un pont concave à la vitesse $v = 10$ m/s; le rayon de courbure au milieu du pont $\rho = 50$ m.

Déterminer la pression qu'exerce l'automobile sur le pont à l'instant où elle passe le milieu du pont.

Rép. 796 kgf.

26.11. Pendant la montée d'un ascenseur on pèse un corps à l'aide d'un dynamomètre à ressort. Le corps pèse 5 kgf, la tension du dynamomètre est égale à 5,1 kgf.

Trouver l'accélération de la cabine.

Rép. 0,196 m/s².

26.12. La carrosserie d'un wagon de tramway avec sa charge pèsent 10 t, le bogie avec les roues pèse 1 t.

Déterminer la plus grande et la plus petite pression du wagon sur les rails d'un tronçon horizontal rectiligne de la voie, si le wagon, tout en se déplaçant, effectue des oscillations harmoniques verticales suivant la loi $x=2 \sin 10t$ cm.

Rép. $N_1=13{,}04$ t; $N_2=8{,}96$ t.

26.13. Le piston d'un moteur à combustion interne effectue des oscillations harmoniques suivant la loi $x=r\left(\cos \omega t+\frac{r}{4l} \cos 2\omega t\right)$ cm, où r est la longueur de la manivelle, l celle de la bielle, ω la vitesse angulaire constante (en grandeur) de l'arbre.

Déterminer la plus grande valeur de la force agissant sur le piston, si le poids de ce dernier est Q.

Rép. $P=\frac{Q}{g} r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right)$.

26.14. Le tamis d'un enrichisseur de minerai effectue des oscillations harmoniques verticales d'amplitude $a=5$ cm.

Trouver la plus petite fréquence k des oscillations du tamis pour laquelle les morceaux du minerai qui s'y trouvent se séparent et sont lancés vers le haut.

Rép. $k=14$ s^{-1}.

26.15. Un corps pesant 20 N effectue un mouvement oscillatoire suivant une droite horizontale. La distance du corps à un point fixe est définie par l'équation $s=10 \sin \frac{\pi}{2} t$ m.

Trouver la dépendance entre la force P agissant sur le corps et la distance s, ainsi que la plus grande valeur de cette force.

Rép. $P=-5{,}03s$ N; $P_{max}=50{,}3$ N.

26.16. Le mouvement d'un point matériel de poids 2 N est décrit par les équations $x=3 \cos 2\pi t$ cm, $y=4 \sin \pi t$ cm, où t est évalué en secondes. Déterminer les projections de la force agissant sur le point en fonction de ses cordonnées.

Rép. $X=-0{,}08x$ N; $Y=-0{,}02y$ N.

26.17. Une bille dont la masse est de 1 g tombe sous l'action de la pesanteur. Compte tenu de la résistance de l'air, son mouvement est décrit par l'équation $x=490t-245\left(1-e^{-2t}\right)$, où x est évaluée en centimètres et t en secondes, l'axe Ox étant dirigé vers le bas suivant la verticale. Déterminer en dynes la force R de résistance de l'air agissant sur la bille en fonction de sa vitesse v; $g=980$ cm/s^2.

Rép. $R=2\,mv=2v$ dyn.

26.18. La table d'une raboteuse pèse 700 kgf, le corps à raboter pèse 300 kgf, la vitesse de déplacement de la table $v=0{,}5$ m/s et le temps de lancement est $t=0{,}5$ s. Déterminer la force nécessaire au lancement de la table à la vitesse v (supposer le mouvement uniformément accéléré) et pour son déplacement ultérieur uniforme, si le coefficient de frottement pendant la période du lancement est $f_1=0{,}14$ et pendant le mouvement uniforme $f_2=$ $=0{,}07$.

Rép. $P_1=242$ kgf; $P_2=70$ kgf.

26.19. Un wagonnet chargé, pesant 700 kgf, descend par un téléférique dont l'inclinaison est $\alpha=15°$ à la vitesse $v=1{,}6$ m/s. Déterminer la tension du câble lors d'une descente uniforme et à l'arrêt du wagonnet, la période de freinage étant $t=4$ s et le coefficient global de résistance à l'avancement $f=0{,}015$. Lors du freinage le mouvement du wagonnet est uniformément retardé.

Rép. $S_1=171{,}5$ kgf; $S_2=200{,}1$ kgf.

26.20. Une charge de 10 t se déplace, suspendue à un chariot, le long de la ferme horizontale d'un pont roulant à la vitesse de 1 m/s; la distance du centre de gravité de la charge au point de suspension $l=5$ m. Lors de l'arrêt brusque du chariot la charge continue son mouvement par inertie et oscille autour du point de suspension. Déterminer la plus grande tension dans le câble.

Rép. $S=10{,}2$ t.

26.21. Déterminer la déviation α de la verticale et la pression N d'un wagon sur un rail de funiculaire lorsque le wagon se déplace suivant une courbe de rayon $R=30$ m à la vitesse $v=10$ m/s, le wagon pesant 1,5 t.

Rép. $\alpha=18°47'$; $N=1{,}585$ t.

26.22. Un train, sans sa locomotive, pèse 200 t. Il est animé d'un mouvement uniformément accéléré sur une voie horizontale et atteint la vitesse de 54 km/h 60 s après le départ. Déterminer la tension de la tige d'attelage entre la locomotive et le train lors du mouvement, si la force de frottement est égale à 0,05 du poids du train.

Rép. 6,1 t.

26.23. Un avion pesant 2 000 kgf effectue un vol horizontal avec une accélération de 5 m/s²; sa vitesse à l'instant considéré est de 200 m/s. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse et vaut 0,05 kgf pour une vitesse de 1 m/s. La force de résistance étant opposée à la vitesse, déterminer la traction de l'hélice, sachant qu'elle forme avec la direction du vol un angle de 10°.

Rép. $F=3\,080$ kgf.

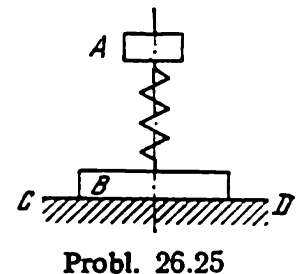
26.24. Un camion de 6 t monte sur un bac à la vitesse de 21,6 km/h. Freiné à l'instant de sa montée sur le bac, le camion s'arrête après avoir parcouru 10 m. Supposant le mouvement du camion uniformément retar-

dé, trouver la tension de chacun des deux câbles par lesquels le bac est attaché au quai. Négliger la masse et l'accélération du bac.

Rép. La tension de chaque câble est de 550 kgf.

26.25. Les charges *A* et *B* pesant respectivement 20 N et 40 N sont reliées par un ressort (cf. schéma). La charge *A* effectue des oscillations libres suivant la verticale dont l'amplitude est de 1 cm et la période de 0,25 s. Calculer la plus grande et la plus petite pression des charges *A* et *B* sur la surface d'appui *CD*.

Rép. $R_{max}=72{,}8$ N; $R_{min}=47{,}2$ N.



Probl. 26.25

26.26. Une charge $P=5$ kgf est suspendue à un ressort et effectue des oscillations harmoniques. En négligeant les résistances, déterminer la force *c* qu'il faut appliquer au ressort pour l'allonger de 1 cm, sachant que la force *P* a effectué six cycles complets en 2,1 s.

Rép. $c=1{,}65$ kgf/cm.

26.27. Un avion atteint la vitesse de 1 000 km/h en piqué vertical, le pilote sort ensuite l'avion du piqué en décrivant un arc de cercle de rayon $R=600$ m dans le plan vertical. Le pilote pèse 80 kgf. Déterminer la plus grande force de pression exercée par le pilote contre le siège.

Rép. 1 130 kgf.

26.28. Déterminer le poids de 1 kgf sur la Lune, sachant que l'accélération de la pesanteur lunaire est $j=1{,}7$ m/s^2.

Déterminer le poids de 1 kgf sur le Soleil sachant que l'accélération de la pesanteur sur celui-ci est $j=270$ m/s^2.

Rép. Un dynamomètre à ressort indique:
sur la Lune . . . . 0,173 5 kgf,
sur le Soleil . . . . 27,5 kgf.

26.29. Quelle est la vitesse d'une locomotive diesel à laquelle la graisse s'écoulerait du graisseur fixé à l'extrémité de la bielle pour lubrifier l'articulation bielle-manivelle, si le couvercle du graisseur était ouvert? Le diamètre de la roue de la locomotive est $D=1\,020$ mm; la longueur de la manivelle tournant avec la roue $r=250$ mm; le mouvement du diesel est rectiligne uniforme et s'effectue sur une voie horizontale. La bielle et le graisseur effectuent un mouvement de translation.

Rép. $v \geqslant 11{,}4$ km/h.

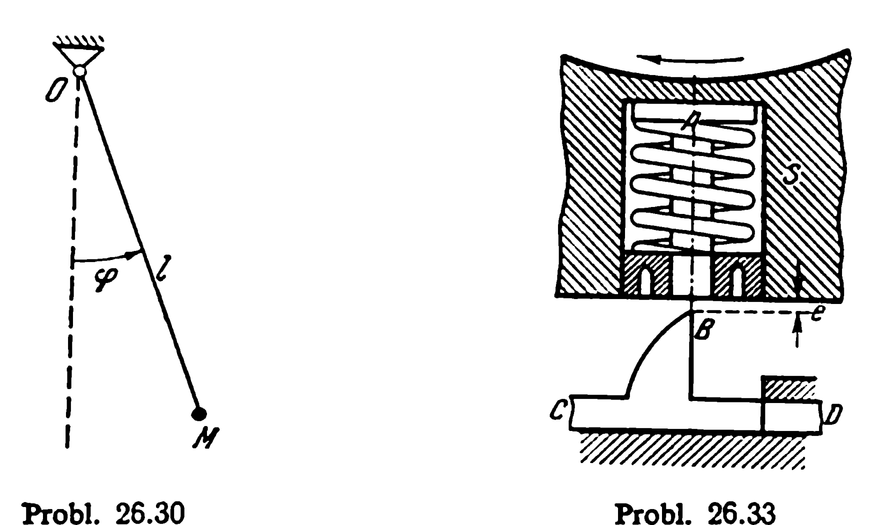
26.30. Une charge *M* pesant 10 N est suspendue à un câble de longueur $l=2$ m et effectue avec celui-ci des oscillations suivant l'équation

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin 2\pi t,$$

où φ est l'angle de déviation du câble par rapport à la verticale, en radians, *t* le temps, en secondes.

Déterminer les tensions T_1 et T_2 du câble dans les positions inférieure et supérieure de la charge.

Rép. $T_1=32{,}1$ N; $T_2=8{,}65$ N.



Probl. 26.30 Probl. 26.33

26.31. Un cycliste décrit une courbe d'un rayon de 10 m à la vitesse de 5 m/s. Trouver l'angle d'inclinaison du plan médian de la bicyclette par rapport à la verticale ainsi que le plus petit coefficient de frottement entre les pneus de la bicyclette et le sol qui assure la stabilité du cycliste.

Rép. 14°20′; 0,255.

26.32. Sur les tronçons curvilignes les virages d'un vélodrome représentent en profil une droite inclinée par rapport à l'horizontale, de sorte que sur ces tronçons le bord extérieur est plus haut que le bord intérieur. Déterminer la plus petite et la plus grande vitesse de déplacement au virage de rayon R et d'angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale, si le coefficient de frottement entre les pneus en caoutchouc et le sol du vélodrome est f.

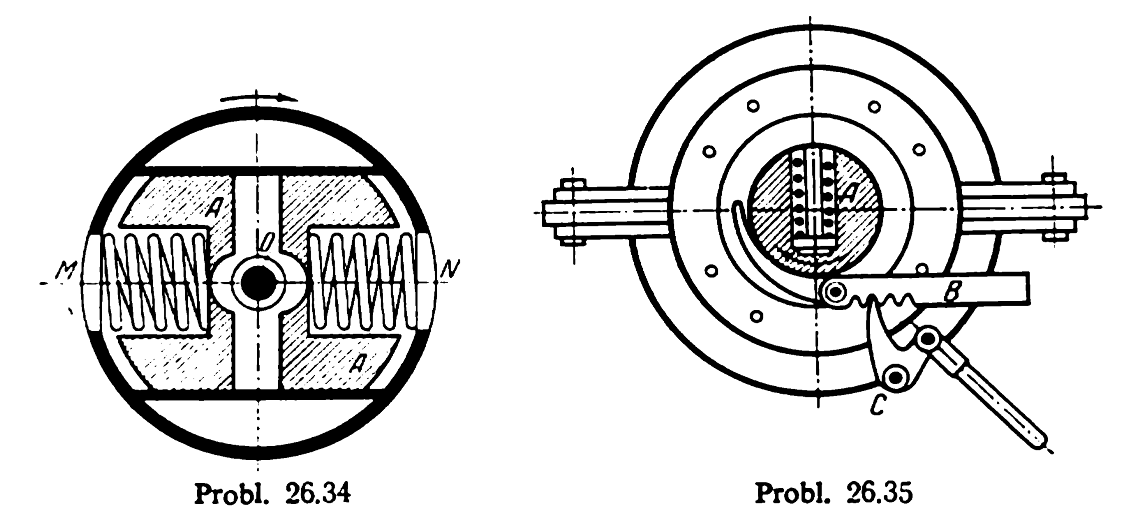
Rép. $v_{\min}=\sqrt{gR\,\frac{\operatorname{tg}\alpha-f}{1+f\operatorname{tg}\alpha}}$; $v_{\max}=\sqrt{gR\,\frac{\operatorname{tg}\alpha+f}{1-f\operatorname{tg}\alpha}}$.

26.33. Pour éviter les accidents dus à la rupture des volants, on utilise le dispositif suivant: un corps A est placé dans la jante du volant et y est retenu par le ressort S; lorsque la vitesse du volant atteint sa valeur limite, le corps A se heurte contre la saillie B de la soupape CD qui ferme l'accès de la vapeur à la machine. Le poids du corps A étant de 1,5 kgf, la distance e de la saillie B au volant de 2,5 cm, la vitesse limite du volant de 120 tr/mn, déterminer la rigidité c du ressort (c'est-à-dire, la force comprimant le ressort de 1 cm), en supposant que la masse du corps A est concentrée en un point dont la distance à l'axe de rotation du volant, dans la position indiquée sur le schéma, est de 147,5 cm.

Rép. 14,5 kgf/cm.

26.34. Un régulateur comporte deux poids A de 30 kgf chacun pouvant glisser le long d'une droite horizontale MN; ces poids sont reliés aux points M et N par des ressorts. En l'absence de pression, la distance de l'extrémité de chaque ressort à l'axe O, perpendiculaire au plan de la figure, est de 5 cm; la longueur du ressort varie de 1 cm sous l'action d'une force de 20 kgf. Déterminer la distance des centres de gravité des poids à l'axe O, lorsque le régulateur, tournant uniformément autour de l'axe O, effectue 120 tr/mn.

Rép. 6,58 cm.



Probl. 26.34 Probl. 26.35

26.35. L'interrupteur de sûreté des turbines à vapeur comprend un doigt A de poids $Q=0{,}225$ kgf, placé dans une ouverture située à l'avant de l'arbre de la turbine perpendiculairement à l'axe et comprimé à l'aide d'un ressort; le centre de gravité du doigt est à 8,5 mm de l'axe de rotation de l'arbre à la vitesse de rotation normale de la turbine qui est $n=$ $=1\,500$ tr/mn. Lorsqu'on augmente le nombre de tours de 10%, le doigt vainc la réaction du ressort et se déplace de 4,5 mm par rapport à sa position normale. Il vient heurter contre l'extrémité du levier B et libère le cliquet C, relié par un système de leviers au ressort fermant la soupape du mécanisme de distribution de la vapeur de la turbine. Calculer la rigidité du ressort retenant le corps A, c'est-à-dire la force nécessaire pour le comprimer de 1 cm la réaction du ressort étant proportionnelle à sa compression.

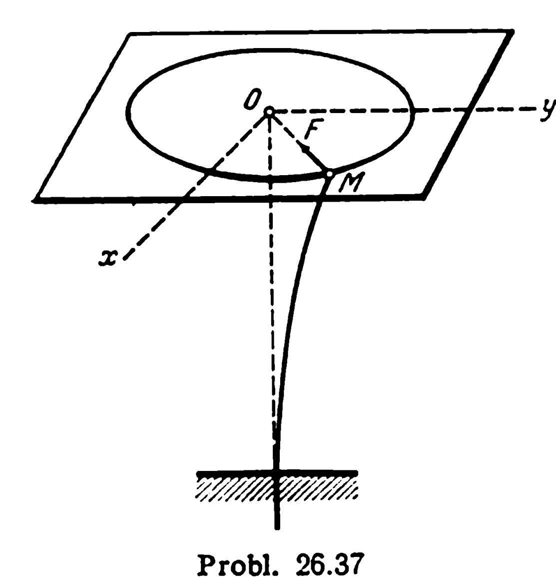
Rép. $c=9{,}08$ kgf/cm.

26.36. Un point de masse m se déplace suivant l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Son accélération est parallèle à l'axe y. Pour $t=0$ les coordonnées du point étaient $x=0$, $y=b$ et la vitesse initiale v_0.

Déterminer la force agissant sur le point mobile en chaque point de sa trajectoire.

Rép. $F_y=-m\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$.

26.37. Une bille de masse m est fixée à l'extrémité d'une barre verticale élastique encastrée à son extrémité inférieure dans un support fixe. Pour de petites déviations de la barre par rapport à sa position verticale d'équilibre, on peut admettre, d'une manière approchée, que le centre de la bille se déplace dans un plan horizontal Oxy passant par la position supérieure d'équilibre du centre de la bille. Déterminer la loi de variation de la force avec laquelle la barre élastique fléchie agit sur la bille sachant que, déviée de sa position initiale d'équilibre prise comme origine des coordonnées, la bille se déplace selon les équations



Probl. 26.37

$$x=a\cos kt,$$

$$y=b\sin kt,$$

où a, b, k sont des grandeurs constantes.

Rép. $F=mk^2r$,

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

§ 27. Equations différentielles du mouvement

a) Mouvement rectiligne

27.1. Une pierre tombe dans un puits sans vitesse initiale. Le son du choc de la pierre contre le fond du puits a été perçu 6,5 s après le début de sa chute. La vitesse du son est égale à 330 m/s.

Calculer la profondeur du puits.

Rép. 175 m.

27.2. Un corps pesant descend suivant un plan lisse incliné de 30° sur l'horizontale. Calculer le temps que met le corps pour parcourir 9,6 m, si sa vitesse initiale est de 2 m/s.

Rép. 1,61 s.

27.3. Un obus tiré par un canon quitte celui-ci avec une vitesse horizontale de 570 m/s; l'obus pèse 6 kgf. Calculer la pression moyenne P des gaz sachant que l'obus parcourt 2 m à l'intérieur du canon. Supposant la pression des gaz constante, calculer le temps que met l'obus pour parcourir le canon.

Rép. $P=49{,}7$ t; 0,007 s.

27.4. Un corps de poids P parcourt sous l'effet d'une impulsion une distance $s=24{,}5$ m en 5 s sur un plan horizontal rugueux et s'arrête. Déterminer le coefficient de frottement f.

Rép. $f=0{,}2$.

27.5. En combien de temps et à quelle distance peut-on arrêter un wagon de tramway se déplaçant sur une voie horizontale à la vitesse de 36 km/h, si la résistance à l'avancement développée par le freinage constitue 300 kgf par 1 t du poids du wagon?

Rép. 3,4 s; 16,9 m.

27.6. En supposant, en première approximation, que la résistance du frein hydraulique est constante, déterminer la durée du recul du canon, si la vitesse initiale du recul est de 10 m/s et sa longueur moyenne de 1 m.

Rép. 0,2 s.

27.7. Un point pesant M monte le long d'un plan incliné rugueux, formant un angle $\alpha=30°$ avec l'horizontale. A l'instant initial la vitesse du point était $v_0=15$ m/s. Le coefficient de frottement $f=0{,}1$.

Trouver le chemin parcouru par le point jusqu'à l'arrêt et le temps mis pour parcourir ce chemin.

Rép. $s=\dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha+\sin\alpha)}=19{,}55$ m;

$$T=\frac{v_0}{g(f\cos\alpha+\sin\alpha)}=2{,}61 \text{ s.}$$

27.8. Un wagon descend à une vitesse constante suivant une voie ferrée rectiligne inclinée de $\alpha=10°$ par rapport à l'horizontale.

En supposant la résistance de frottement proportionnelle à la pression normale, déterminer l'accélération et la vitesse du wagon 20 s après le début du mouvement, le wagon ayant commencé à descendre sans vitesse initiale, suivant une voie inclinée de $\beta=15°$. Déterminer aussi le chemin parcouru par le wagon dans ce laps de temps.

Rép. $w=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}g=0{,}87$ m/s²;

$$v=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}gt=17{,}4 \text{ m/s;}$$

$$s=\frac{g\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\,\frac{t^2}{2}=174 \text{ m.}$$

27.9. Trouver la plus grande vitesse de chute d'une boule de poids $P=10$ kgf et de rayon $r=8$ cm. La résistance de l'air est $R=k\sigma v^2$, où v est la vitesse de chute, σ l'aire de la projection du corps sur le plan perpendiculaire à la direction de sa chute, k un coefficient numérique (dépendant de la forme du corps; pour une boule $k=0{,}024$ kgf s²/m⁴).

Rép. $v=144$ m/s.

27.10. Deux boules homogènes géométriquement identiques sont faites de matériaux différents dont les poids spécifiques sont γ_1 et γ_2. Les deux boules tombent dans l'air. En supposant la résistance du milieu

proportionnelle au carré de la vitesse, déterminer le rapport des vitesses maximales des boules.

Rép. $\frac{v_{1\,max}}{v_{2\,max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$.

27.11. Un skieur descend une pente de 45° sans se pousser avec ses bâtons. Le coefficient de frottement entre les skis et la neige $f=0,1$. La résistance de l'air à l'avancement du skieur $F=\alpha v^2$, où $\alpha=\text{const}$, v étant la vitesse du skieur. Pour $v=1$ m/s la résistance de l'air vaut 0,063 5 kgf.

Calculer la vitesse maximale développée par le skieur, si son poids propre avec les skis est de 90 kgf. De combien croît la vitesse maximale, si en choisissant une meilleure graisse le skieur diminue la valeur du coefficient de frottement jusqu'à 0,05?

Rép. $v_{1\,max}=108$ km/h; $v_{2\,max}=111$ km/h.

27.12. Un bateau se déplace en surmontant la résistance de l'eau qui est proportionnelle au carré de la vitesse et vaut $\alpha=0,12$ t pour une vitesse de 1 m/s. La force propulsive des hélices est dirigée suivant la vitesse dans le sens du mouvement et varie suivant la loi $T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)$ t, où $T_0=120$ t est la force propulsive des hélices du bateau à l'arrêt, $v_s=\text{const}=33$ m/s. Déterminer la vitesse maximale développée par le bateau.

Rép. $v_{max}=20$ m/s$=72$ km/h.

27.13. Un avion vole horizontalement. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse et pour une vitesse de 1 m/s vaut 0,05 kgf. La traction est constante, elle vaut 3 080 kgf et forme un angle de 10° avec la direction du vol. Déterminer la vitesse maximale de l'avion.

Rép. $v_{max}=246$ m/s.

27.14. Un avion muni de skis atterrit sur un terrain horizontal; le pilote amène l'avion en contact avec la surface du sol sans vitesse ni accélération verticales à l'instant de l'atterrissage. Le coefficient de frottement des skis de l'avion sur la neige $f=0,1$. La résistance de l'air à l'avancement de l'avion est proportionnelle au carré de la vitesse. Pour une vitesse de 1 m/s la composante horizontale de la force de résistance $R_x=1$ kgf, la composante verticale, dirigée vers le haut, étant $R_y=3$ kgf. L'avion pèse 1 000 kgf. Déterminer la longueur et le temps de glissement de l'avion jusqu'à l'arrêt.

Rép. $s=87,6$ m; $T=12$ s.

27.15. Un avion commence à piquer sans vitesse verticale initiale. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse. Trouver, à l'instant donné, la relation entre la vitesse verticale, le chemin parcouru et la vitesse maximale de piqué.

Rép. $v=v_{max}\sqrt{1-e^{-2gs/v_{max}^2}}$.

27.16. A quelle hauteur H et en combien de temps T monte un corps de poids p lancé verticalement vers le haut avec la vitesse v_0, si la résistance de l'air peut être exprimée par la formule k^2pv^2, où v est la vitesse du corps?

Rép. $H = \frac{\text{Log}\,(v_0^2 k^2 + 1)}{2gk^2}$; $T = \frac{\text{arc tg}\, kv_0}{kg}$.

27.17. Un corps pesant 2 kgf est lancé verticalement vers le haut avec la vitesse de 20 m/s. La résistance de l'air pour une vitesse v m/s est $0{,}04v$ (évaluée en kgf); $g = 9{,}8$ m/s². Calculer le temps que met le corps pour atteindre sa plus haute position.

Rép. 1,7 s.

27.18. Un sous-marin immobile ayant une petite flottabilité négative p plonge animé d'un mouvement de translation. La résistance de l'eau, dans le cas d'une petite flottabilité négative, peut être considérée comme proportionnelle au premier degré de la vitesse de plongée et vaut kSv, k étant un coefficient de proportionnalité, S l'aire de la projection horizontale du sous-marin et v la vitesse de plongée. La masse du sous-marin est M. Déterminer la vitesse de plongée v, si pour $t = 0$ la vitesse $v_0 = 0$.

Rép. $v = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right)$.

27.19. Déterminer, dans les conditions du problème précédent le chemin z parcouru par le sous-marin en plongée au cours du temps T.

Rép. $z = \frac{p}{kS}\left[T - \frac{M}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right]$.

27.20. Pour de petites vitesses la résistance à l'avancement d'un train est définie par la formule empirique suivante:

$$R = (2{,}5 + 0{,}05v)\ Q \text{ kgf},$$

où Q est le poids du train évalué en tonnes, v sa vitesse évaluée en m/s. Déterminer en combien de temps et à quelle distance le train atteint la vitesse $v = 12$ km/h sur une voie horizontale, si le poids du train avec la locomotive électrique $Q = 40$ t et que la traction de la locomotive $F = 200$ kgf. Déterminer aussi la traction N lors du mouvement uniforme ultérieur.

Rép. $t = 141$ s; $s = 238$ m; $N = 106{,}6$ kgf.

27.21. Quelle doit être la traction de l'hélice T = const d'un avion en vol horizontal pour qu'ayant volé s m il change sa vitesse de v_0 à v_1 m/s? La traction de l'hélice est dirigée suivant la vitesse du vol. La traînée, dont le sens est opposé à celui de la vitesse, est proportionnelle au carré de la vitesse et vaut α kgf pour une vitesse de 1 m/s. L'avion pèse P kgf.

Rép. $T = \frac{\alpha\left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2\alpha g s}{P}}\right)}{1 - e^{\frac{2\alpha g s}{P}}}$ kgf.

27.22. Un navire jaugeant 10 000 t se déplace à la vitesse de 16 m/s. La résistance de l'eau, proportionnelle au carré de la vitesse du navire, est égale à 30 t pour une vitesse de 1 m/s.

Trouver la distance parcourue par le navire jusqu'à l'instant où sa vitesse atteint 4 m/s et le temps mis pour parcourir cette distance.

Rép. $s=47{,}1$ m; $T=6{,}38$ s.

27.23. Un corps tombe dans l'air sans vitesse initiale. La résistance de l'air $R=k^2pv^2$, où v représente la vitesse du corps et p son poids. Quelle est la vitesse du corps t secondes après le début du mouvement? Quelle est la valeur limite de sa vitesse?

Rép. $v=\frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$; $v_\infty=\frac{1}{k}$.

27.24. Un navire jaugeant 1 500 t surmonte la résistance de l'eau $R=\alpha v^2T$, où $\alpha=0{,}12$, v étant la vitesse du navire. La force propulsive des hélices est dirigée suivant la vitesse dans le sens du mouvement et varie suivant la loi $T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)$, où $T_0=120$ t est la force propulsive des hélices à l'arrêt, $v_s=\text{const}=33$ m/s. Trouver la relation entre la vitesse du navire et le temps, si la vitesse initiale est v_0.

Rép. $v=\frac{70\,v_0+20\,(v_0+50)\,(e^{0{,}056\,t}-1)}{70+(v_0+50)\,(e^{0{,}056\,t}-1)}$, où v_0 est évaluée en m/s.

27.25. Trouver, dans le problème précédent, la relation entre le chemin parcouru et la vitesse.

Rép. $x=\left\{\left(637{,}5\,\mathrm{Log}\,\frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000}\right)+\right.$

$\left.+273{,}9\,\mathrm{Log}\,\frac{(v-20)\,(v_0+50)}{(v_0-20)\,(v+50)}\right\}$ m, où v et v_0 sont évaluées en m/s.

27.26. Trouver, dans le problème 27.24, la relation entre le chemin parcouru et le temps pour une vitesse initiale $v_0=10$ m/s.

Rép. $S=\left(20\,t-1\,272{,}7\,\mathrm{Log}\frac{6e^{0{,}056\,t}}{1+6e^{0{,}056\,t}}-199{,}3\right)$ m.

27.27. Un wagon de poids $Q=9\,216$ kgf est mis en mouvement sur une voie horizontale sous l'action d'un vent soufflant dans la direction de la voie. La résistance à l'avancement du wagon est égale à 1/200 de son poids. La force de pression du vent $P=kSu^2$ kgf, où S est l'aire de la paroi arrière du wagon soumise à l'action du vent mesurant 6 m², u la vitesse du vent par rapport au wagon, $k=0{,}12$. La vitesse absolue du vent $v=12$ m/s. En supposant que la vitesse initiale du wagon soit nulle, déterminer:

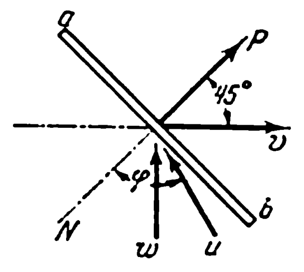
1) la vitesse maximale v_{max} du wagon;
2) le temps T nécessaire pour atteindre cette vitesse;
3) le chemin x_1 parcouru par le wagon pour atteindre la vitesse de 3 m/s.

Rép. 1) $v_{max}=4$ m/s; 2) $T=\infty$; 3) $x_1=187$ m.

27.28. Trouver l'équation du mouvement d'un point de masse m tombant sur la Terre sans vitesse initiale: la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse. Le coefficient de proportionnalité est k.

Rép. $x = \frac{m}{k} \operatorname{Log} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{gk}{m}}\, t.$

27.29. Un yacht à glace pesant 196,2 kgf avec ses passagers se déplace en ligne droite sur la surface lisse horizontale de la glace grâce à la pression du vent sur la voile dont le plan ab forme avec la direction du mouvement un angle de 45°. La vitesse absolue w du vent est perpendiculaire à la direction du mouvement. La grandeur de la pression du vent P est exprimée par la formule de Newton: $P = kSu^2 \cos^2\varphi$, où φ est l'angle formé par la vitesse relative du vent u et la perpendiculaire N au plan de la voile, $S = 5$ m^2 étant l'aire de la voile, $k = 0{,}113$, un coefficient expérimental. La pression P est dirigée perpendiculairement au plan ab. Négligeant le frottement, trouver : 1) la vitesse maximale v_{max} du traîneau; 2) l'angle α que forme à cette vitesse une girouette placée sur le mât avec le plan de la voile; 3) le chemin x_1 parcouru par le traîneau pour atteindre la vitesse $v = \frac{2}{3} w$, si sa vitesse initiale est nulle.



Probl. 27.29

Rép. 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0°$; 3) $x_1 = 90$ m.

27.30. Un wattman, en déplaçant graduellement le curseur du rhéostat, augmente la puissance de son moteur de manière que la traction croît de zéro proportionnellement au temps, à raison de 120 kgf pour chaque seconde. Trouver la courbe des distances s du mouvement du wagon sachant que le wagon pèse 10 t, que la résistance de frottement est constante et vaut 0,2 t et que la vitesse initiale est nulle.

Rép. Le mouvement commence 5/3 s après le branchement du courant; à partir de cet instant $s = 0{,}019\,62 \left(t - \frac{5}{3}\right)^3$ m.

27.31. Un corps pesant 10 N se déplace sous l'action de la force variable $F = 10\,(1 - t)$ N, où le temps t est évalué en secondes.

En combien de secondes le corps s'arrête-t-il si à l'instant initial sa vitesse $v_0 = 20$ cm/s et si la force coïncide en direction avec la vitesse du corps? Calculer le chemin parcouru par le corps jusqu'à l'arrêt.

Rép. $t = 2{,}02$ s; $s = 692$ cm.

27.32. Un point matériel de masse m est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force variant suivant la loi $F = F_0 \cos \omega t$ où F_0 et ω sont des grandeurs constantes. La vitesse initiale du corps $x_0 = v_0$.

Trouver l'équation du mouvement du point.

Rép. $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) + v_0 t.$

27.33. Une particule de masse m portant une charge électrique e est située dans un champ électrique homogène de tension variable $E = A \sin kt$ (A et k sont des constantes données). Déterminer le mouvement de la particule sachant que dans un champ électrique la particule est soumise à une force $F = eE$ dirigée dans le sens de la tension E. Faire abstraction de la pesanteur. La position initiale de la particule est prise comme origine des coordonnées; sa vitesse initiale est nulle.

Rép. $x = \frac{eA}{mk}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right)$.

27.34. Déterminer le mouvement d'une bille pesante le long d'un tunnel rectiligne fictif, passant par le centre de la Terre, sachant qu'à l'intérieur de la Terre la force d'attraction est proportionnelle à la distance du point mobile au centre et dirigée vers ce centre; la bille est placée dans le tunnel à la surface sans vitesse initiale. Indiquer également la vitesse de la bille lorsqu'elle passe par le centre de la Terre et le temps mis pour y parvenir. Le rayon de la Terre $R = 637 \cdot 10^6$ cm, l'accélération de la pesanteur à sa surface $g = 980$ cm/s^2.

Rép. La distance de la bille au centre de la Terre varie suivant la loi

$$x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t; \quad v = 7{,}9 \text{ km/s}; \quad T = 21{,}1 \text{ mn}.$$

27.35. Un corps tombe sur la Terre d'une hauteur h sans vitesse initiale. On néglige la résistance de l'air; la force de l'attraction terrestre est inversement proportionnelle au carré de la distance du corps au centre de la Terre. Trouver le temps T mis par le corps pour arriver à la surface de la Terre et sa vitesse v à cet instant. Le rayon de la Terre est R, l'accélération de la pesanteur à sa surface g.

Rép. $v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$; $T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2} \arccos \frac{R-h}{R+h}\right)$.

27.36. Une force centrale de répulsion proportionnelle à la distance (de coefficient de proportionnalité mk_2) agit sur un point matériel de masse m. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse du mouvement (de coefficient de proportionnalité $2\,mk_1$). A l'instant initial le point était situé à une distance a du centre et sa vitesse à cet instant était nulle. Trouver la loi du mouvement du point.

Rép. $x = \frac{a}{\alpha+\beta}(\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t})$, où $\alpha = \sqrt{k_1^2 + k_2} + k_1$,

$\beta = \sqrt{k_1^2 + k_2} - k_1$.

27.37. Un point matériel de masse m part de la position $x = \beta$, sans vitesse initiale, suivant une ligne droite (l'axe des x) sous l'action d'une force d'attraction à l'origine des coordonnées variant suivant la loi

$$R = \frac{\alpha}{x^2}.$$

Calculer l'instant où le point se trouve en $x_1=\beta/2$. Déterminer la vitesse du point en cette position.

Rép. $t_1=\frac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$; $v_1=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}$.

27.38. Un point matériel de masse m part de sa position de repos $x_0=a$ et se meut suivant une droite sous l'action d'une force d'attraction proportionnelle à la distance à l'origine des coordonnées $F_x=-c_1mx$ et d'une force de répulsion proportionnelle au cube de la distance $Q_x=c_2mx^3$. Pour quelle relation entre c_1, c_2 et a le point atteint-il l'origine des coordonnées et s'y arrête-t-il?

Rép. $c_1=\frac{1}{2}c_2a^2$.

27.39. Le mouvement d'un point matériel de masse m est rectiligne. La relation entre le chemin parcouru et la vitesse est donnée par la formule

$$x=a\sqrt{v}-b.$$

Trouver le temps au cours duquel la vitesse initiale du point est doublée.

Rép. $t=\frac{a^2}{b}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

27.40. La force de résistance d'un corps de poids de 9,8 N se déplaçant dans un milieu non homogène varie suivant la loi $F=-\frac{2v^2}{3+s}$ N, où v est la vitesse du corps en m/s, s le chemin parcouru en mètres. Déterminer le chemin parcouru en fonction du temps, si la vitesse initiale $v_0=5$ m/s.

Rép. $s=3\left[\sqrt[3]{5t+1}-1\right]$ m.

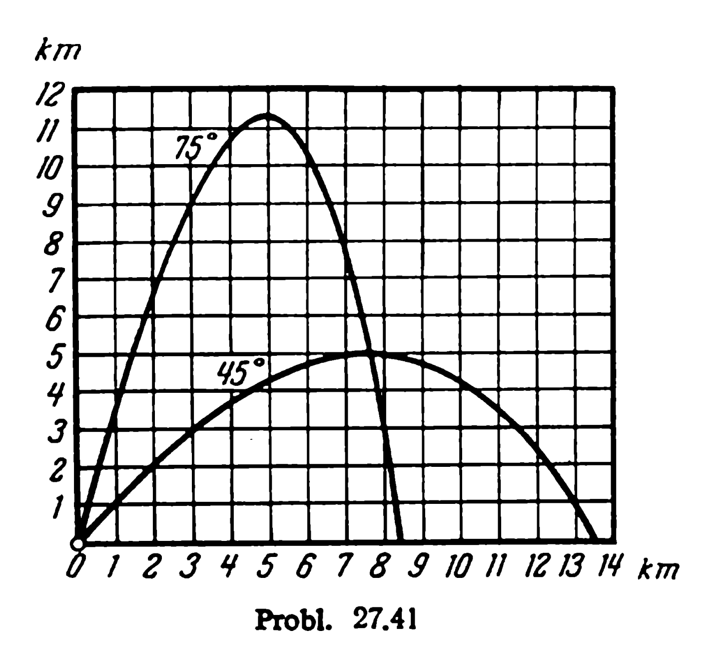
b) Mouvement curviligne

27.41. Un canon naval (105 mm, calibre 35) lance un obus de 18 kgf avec la vitesse $v_0=700$ m/s; la trajectoire réelle de l'obus dans l'air est indiquée sur le schéma pour deux cas: 1) lorsque l'angle formé par l'axe du canon avec l'horizon est de 45°; 2) lorsque cet angle est de 75°. Déterminer pour chacun des deux cas l'accroissement de la hauteur et de la portée du vol en négligeant la résistance de l'air. (Voir fig. p. 238.)

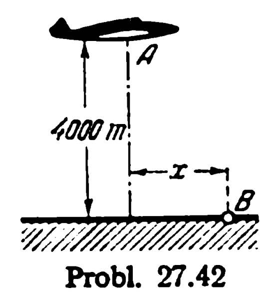
Rép. Accroissement de la hauteur: 1) 7,5 km; 2) 12 km.
Accroissement de la portée: 1) 36,5 km; 2) 16,7 km.

27.42. Un avion A vole à l'altitude de 4 000 m avec une vitesse horizontale de 500 km/h. A quelle distance x, mesurée à partir du point donné B suivant l'horizontale, doit-on larguer sans vitesse relative initiale une charge quelconque pour qu'elle tombe en ce point? Négliger la résistance de l'air. (Voir fig. p. 238.)

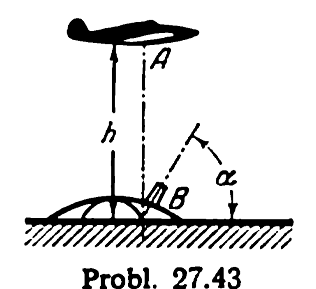
Rép. $x=3\,960$ m.



Probl. 27.41



Probl. 27.42



Probl. 27.43

27.43. Un avion A vole à l'altitude h avec la vitesse horizontale v_1. A l'instant où il se trouve sur la même verticale que le canon B, celui-ci tire sur l'avion. Trouver: 1) quelle condition doit remplir la vitesse initiale v_0 de l'obus pour faire mouche et 2) sous quel angle α par rapport à horizontale doit-on tirer? Négliger la résistance de l'air.

Rép. 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

27.44. La portée maximale horizontale d'un obus étant L, déterminer sa portée horizontale l lorsque l'angle de tir est $\alpha = 30°$ et la hauteur de sa trajectoire dans ce cas. Négliger la résistance de l'air.

Rép. $l = \frac{\sqrt{3}}{2} L$; $h = \frac{L}{8}$.

27.45. La portée horizontale d'un obus, pour un angle de tir α, est l_α. Déterminer sa portée horizontale lorsque l'angle de tir est $\frac{\alpha}{2}$. Négliger la résistance de l'air.

Rép. $l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

27.46. Trouver la portée du vol d'un obus, si le rayon de courbure de sa trajectoire à sa plus haute position est $\rho = 16$ km, l'angle de tir étant $\alpha = 30°$. Négliger la résistance de l'air.

Rép. $x_{max} = 2\rho \operatorname{tg} \alpha = 18\ 480$ m.

27.47. Déterminer l'angle de tir, si le but est à 32 km et si la vitesse initiale de l'obus $v_0 = 600$ m/s. Négliger la résistance de l'air.

Rép. $\alpha_1 = 30°18''$; $\alpha_2 = 59°42'$.

27.48. Résoudre le problème précédent dans le cas où le but est à 200 m au-dessus du niveau des positions de l'artillerie.

Rép. $\alpha_1 = 30°45'$; $\alpha_2 = 59°23'$.

27.49. On tire d'un canon situé au point O; l'angle de tir est α, la vitesse initiale de l'obus v_0. D'un point A situé à une distance l du point O suivant l'horizontale, on effectue simultanément un tir vertical. Déterminer la vitesse initiale v_1 avec laquelle on doit tirer le second obus pour qu'il rencontre le premier, si la vitesse v_0 et le point A sont situés dans un même plan vertical. Négliger la résistance de l'air.

Rép. $v_1 = v_0 \sin \alpha$ $\left(\text{indépendamment de la distance } l \text{ lorsque } l < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\right)$.

27.50. Trouver, à l'instant t, le lieu géométrique des positions de points matériels lancés simultanément dans le plan vertical à partir d'un même point, avec une même vitesse initiale v_0, sous tous les angles possibles par rapport à l'horizontale.

Rép. La circonférence de rayon $v_0 t$ centrée sur la verticale du point de lancement à une distance $gt^2/2$ au-dessous de ce point.

27.51. Trouver le lieu géométrique des foyers de toutes les trajectoires paraboliques correspondant à une même vitesse initiale v_0 et à tous les angles de tir possibles.

Rép. $x^2 + y^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$.

27.52. Un corps de poids P lancé avec la vitesse initiale v_0 sous un angle α par rapport à l'horizontale, se déplace sous l'action de la pesanteur et de la résistance R de l'air. Déterminer la hauteur maximale h du corps au-dessus du niveau de la position initiale, si la résistance est proportionnelle au premier degré de la vitesse: $R = kPv$.

Rép. $h = \frac{v_0 \cos \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \operatorname{Log}(1 + kv_0 \sin \alpha)$.

27.53. Trouver les équations du mouvement dans les conditions du problème précédent.

Rép. $x=\frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1-e^{-kgt})$;

$$y=\frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha+\frac{1}{k}\right)(1-e^{-kgt})-\frac{t}{k}.$$

27.54. Déterminer, dans les conditions du problème 27.52, à quelle distance s, suivant l'horizontale, le point atteint sa plus haute position.

Rép. $s=\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kv_0 \sin\alpha+1)}$.

27.55. Sur la surface latérale d'un tuyau vertical placé au centre d'un bassin rond et hermétiquement fermé à sa partie supérieure, on a pratiqué des trous à 1 m de hauteur d'où jaillissent des jets d'eau obliques sous des angles différents φ par rapport à l'horizontale $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$; la vitesse initiale du jet $v_0=\sqrt{4g/3 \cos\varphi}$ m/s, g étant l'accélération de la pesanteur, la hauteur du tuyau est de 1 m. Déterminer le plus petit rayon R du bassin pour lequel l'eau qui jaillit du tuyau tombe entièrement dans le bassin quelle que soit la hauteur de sa paroi.

Rép. $R=2{,}83$ m.

27.56. Déterminer le mouvement d'un point matériel pesant, de masse m grammes, attiré vers un centre fixe O sous l'action d'une force directement proportionnelle à la distance. Le mouvement a lieu dans le vide; la force d'attraction sur l'unité de distance est k^2m dynes; à l'instant $t=0$: $x=a$, $\dot{x}=0$, $y=0$, $\dot{y}=0$, l'axe Oy étant dirigé suivant la verticale vers le bas.

Rép. Une oscillation harmonique: $x=a \cos kt$, $y=\frac{g}{k^2}(1-\cos kt)$ suivant le segment de droite $y=\frac{g}{k^2}-\frac{g}{k^2 a}x$, $|x|\leqslant a$.

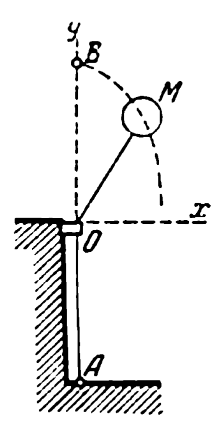
27.57. Un point matériel de masse m se déplace sous l'action d'une force de répulsion centrée en O et variant suivant la loi $F=k^2mr$, où r est le rayon vecteur du point. A l'instant initial le point se trouvait à $M_0(a, 0)$ et sa vitesse, dirigée parallèlement à l'axe des y, était v_0. Déterminer la trajectoire du point.

Rép. $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{ky}{v_0}\right)^2=1$ (hyperbole).

27.58. Un fil élastique attaché au point A passe par un anneau lisse fixe O; à l'extrémité libre du fil on fixe une bille M dont la masse est de m grammes. La longueur du fil non tendu $l=AO$; pour l'allonger de 1 cm il faut appliquer une force de k^2m dynes. On tend le fil suivant la droite AB, de manière à ce que sa longueur soit doublée et on communique ainsi à la bille une vitesse v_0, perpendiculaire à la droite AB. Déterminer la tra-

jectoire de la bille en négligeant la pesanteur et en supposant que la tension du fil est proportionnelle à son allongement.

Rép. L'ellipse $\frac{k^2 x^2}{v_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.



Probl. 27.58

27.59. Un point matériel M de masse m est attiré vers n centres fixes $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ par des forces proportionnelles aux distances; la force d'attraction du point M au centre C_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ $k_i m \cdot \overline{MC_i}$ est dyn; le point M et les centres d'attraction sont situés dans le plan Oxy. Déterminer la trajectoire du point M, si pour $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0$. Négliger la pesanteur.

Rép. L'ellipse $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2 + \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1$,

$$\text{où } a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i x_i, \quad b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n} k_i y_i, \quad k = \sum_{i=1}^{i=n} k_i.$$

27.60. Le point M est attiré vers deux centres C_1 et C_2 par des forces proportionnelles aux distances $km \cdot \overline{MC_1}$ et $km \cdot \overline{MC_2}$; le centre C_1 est fixe et se trouve à l'origine des coordonnées, le centre C_2 se déplace uniformément suivant l'axe Ox de sorte que $x_2 = 2(a+bt)$. Calculer la trajectoire du point M sachant qu'à l'instant $t=0$ le point M est dans le plan xy, ses coordonnées sont $x=y=a$ et les projections de sa vitesse sont

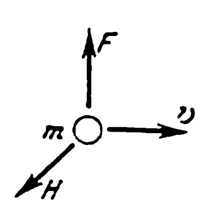
$$\dot{x} = \dot{z} = b, \ \dot{y} = 0.$$

Rép. Une hélice située sur un cylindre elliptique dont l'axe est Ox et l'équation $\frac{y^2}{a^2} + \frac{2kz^2}{b^2} = 1$; le pas de l'hélice est $\pi b \sqrt{\frac{2}{k}}$.

27.61. *Déviation des rayons cathodiques dans un champ électrique.* Une particule de masse m, portant une charge électrique négative e, pénètre dans un champ électrique homogène de tension E avec la vitesse v_0 perpendiculaire à la direction de la tension du champ. Déterminer la trajectoire du mouvement ultérieur de la particule sachant que dans le champ électrique elle est soumise à la force $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$ dirigée dans le sens contraire à celui de la tension E. Négliger la pesanteur.

Rép. Une parabole de paramètre mv_0^2/eE.

27.62. *Déviation des rayons cathodiques dans un champ magnétique.* Une particule de masse m, portant une charge électrique négative e, pénètre dans un champ magnétique de tension H avec la vitesse v_0 perpendiculaire à la direction de la tension du champ. Déterminer la trajectoire du mouvement ultérieur de la particule sachant qu'elle est soumise à la force $\boldsymbol{F} = -e(\mathbf{v} \times \boldsymbol{H})$.



Probl. 27.62

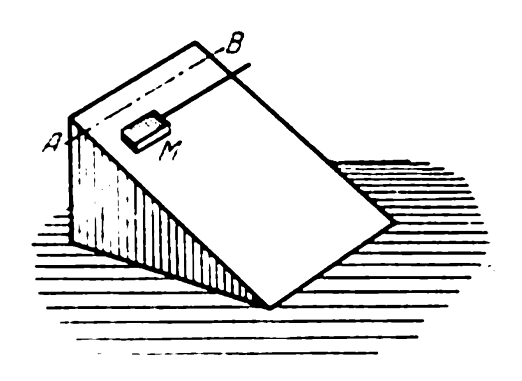
Il est commode de faire usage des équations du mouvement du point projetées sur la tangente et la normale principale à la trajectoire.

Rép. Une circonférence de rayon $\frac{mv_0}{eH}$.

27.63 Déterminer la trajectoire du mouvement d'une particule de masse m, portant la charge électrique e, si cette particule pénètre dans un champ électrique homogène de tension variable $E = A \cos kt$ (A et k sont des constantes données) avec la vitesse v_0, perpendiculaire à la direction de la tension du champ; faire abstraction de la pesanteur. Dans le champ électrique la particule est soumise à la force $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$.

Rép. $y = -\frac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\frac{k}{v_0}x\right)$, où l'axe des y est dirigé suivant la tension du champ, l'origine des coordonnées est confondue avec la position initiale du point dans le champ.

27.64. Un corps pesant M se déplace sur un plan incliné rugueux étant constamment tendu par un fil suivant une direction horizontale, parallèle à la droite AB. A partir d'un certain moment le mouvement du corps devient rectiligne et uniforme, l'une des composantes orthogonales de la



Probl. 27.64

vitesse parallèle à AB étant égale alors à 12 cm/s. Déterminer la seconde composante v_1 de la vitesse ainsi que la tension T du fil, sachant que la pente du plan $\operatorname{tg}\alpha = 1/30$, le coefficient de frottement $f = 0{,}1$, le poids du corps est de 300 N.

Rép. $v_1 = 4{,}24$ cm/s; $T = 28{,}3$ N.

27.65. Un point M de masse m est soumis à l'action de deux forces d'attraction dirigées vers les centres fixes O_1 et O_2 (cf. schéma). La grandeur de ces forces est proportionnelle à la distance aux points O_1 et O_2. Le coefficient de proportionnalité est identique et vaut c. Le mouvement commence au point A_0 avec la vitesse $\boldsymbol{v}_0$ perpendiculaire à la ligne O_1O_2. Déterminer

la trajectoire décrite par le point M. Calculer les instants où il coupe la direction de la ligne O_1O_2 et ses coordonnées à ces instants.

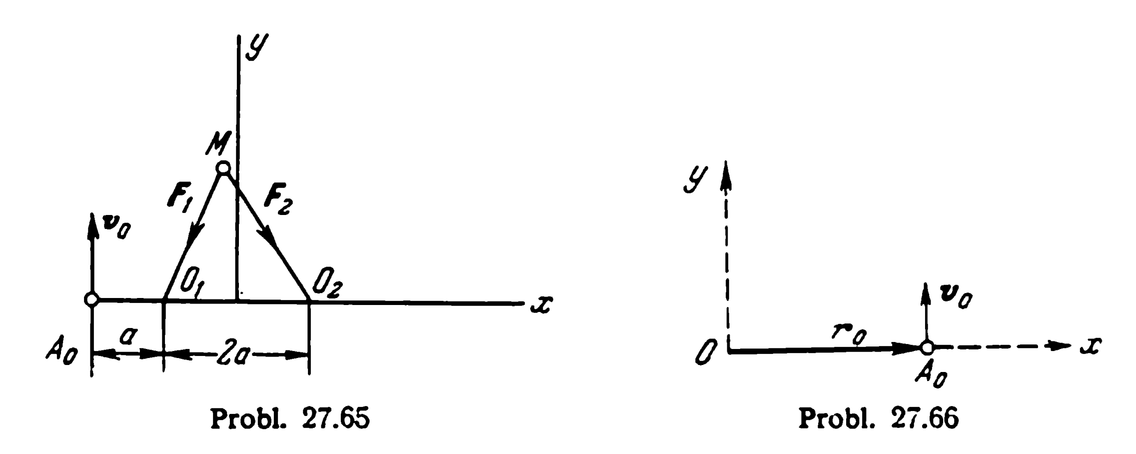
Rép. L'ellipse $\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1$, où $k = \sqrt{\frac{2c}{m}}$;

$$t = 0,\ x_0 = -2a,\ y_0 = 0;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{k},\ x_1 = 2a,\ y_0 = 0;$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{k},\ x_2 = -2a,\ y_0 = 0, \text{ etc.}$$

Le temps mis par le point pour décrire l'ellipse est $T = \frac{2\pi}{k}$.



Probl. 27.65 Probl. 27.66

27.66. Un point A de masse m qui part de la position $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ ($\boldsymbol{r}$ étant le rayon vecteur du point), avec la vitesse v_0 perpendiculaire à $\boldsymbol{r}_0$, est soumis à l'action d'une force d'attraction dirigée vers le centre O et proportionnelle à la distance à ce centre. Le coefficient de proportionnalité est mc_1. En outre, le point est soumis à l'action de la force constante $mc\boldsymbol{r}_0$. Trouver l'équation du mouvement et la trajectoire du point. Quelle doit être la relation c_1/c pour que la trajectoire du mouvement passe par le centre O? A quelle vitesse le point passe-t-il par le centre O?

Rép. 1) $\boldsymbol{r} = \frac{c}{c_1}\boldsymbol{r}_0 + \frac{v_0}{\sqrt{c_1}} \sin \sqrt{c_1}\, t + \boldsymbol{r}_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \cos \sqrt{c_1}\, t$;

2) l'ellipse $\left[\frac{x - \frac{c}{c_1} r_0}{r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2 = 1$;

3) le point A passe par le centre O si $c_1/c = 2$;

4) le point A passe par le centre O à la vitesse $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = -v_0$ à l'instant $t = \pi/\sqrt{c_1}$.

27.67. Un point pesant de masse m tombe de la position, définie par les coordonnées $x_0 = 0$, $y_0 = h$ à l'instant $t = 0$, sous l'action de la pesanteur

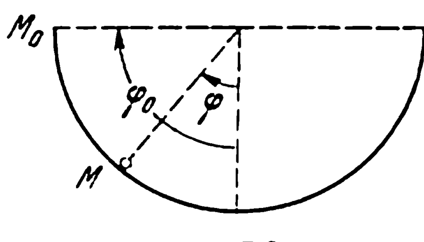
(parallèle à l'axe des y) et d'une force de répulsion de l'axe des y proportionnelle à la distance à cet axe (le coefficient de proportionnalité est c). Les projections de la vitesse initiale du point sur les axes de coordonnées sont $v_x = v_0$, $v_y = 0$. Déterminer la trajectoire du point ainsi que l'instant t_1 où ce point coupe l'axe des x.

Rép. La trajectoire est

$$x = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} k \sqrt{\frac{2}{g}(h-y)}, \text{ où } k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

27.68. Le point M de masse m se déplace sous l'action de la pesanteur sur la surface intérieure lisse d'un cylindre creux de rayon r. A l'instant initial l'angle $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ et le point a une vitesse nulle. Déterminer sa vitesse et la réaction de la surface du cylindre pour $\varphi = 30°$.

Rép. $v = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{gr}$; $T = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg$.



Probl. 27.68

§ 28. Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point matériel. Théorème de la variation du moment cinétique du point matériel

28.1. Un train se déplace sur une voie horizontale et rectiligne. La force de résistance lors du freinage est égale à 0,1 du poids du train. A l'instant où l'on commence à freiner la vitesse du train est de 72 km/h. Calculer le temps de freinage et le chemin parcouru pendant ce temps.

Rép. 20,4 s; 204 m.

28.2. Un corps pesant descend, sans vitesse initiale, suivant un plan incliné rugueux formant un angle de 30° avec l'horizontale. Déterminer le temps que met le corps pour parcourir une distance de 39,2 m, si le coefficient de frottement est $f = 0{,}2$.

Rép. $T = 5$ s.

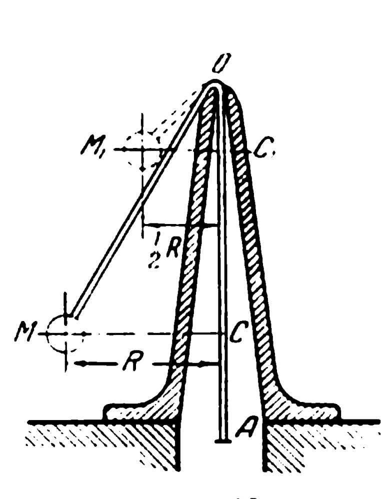
28.3. Un train de 400 t amorce une montée $i = \operatorname{tg} \alpha = 0{,}006$ (α étant l'angle de la montée) à la vitesse de 54 km/h. Le coefficient de frottement (coefficient de résistance globale) lors du mouvement du train est de 0.005. 50 s après l'amorçage de la montée la vitesse du train tombe à 45 km/h. Calculer la traction de la locomotive Diesel.

Rép. 2,36 t.

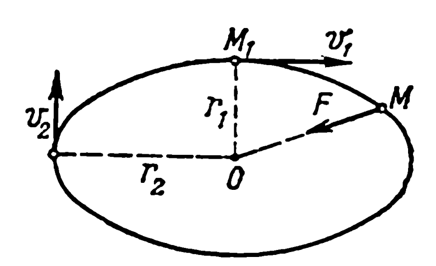
28.4. Un petit poids M est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible MOA dont une partie OA passe par un tube vertical; le poids se déplace autour de l'axe du tube suivant une circonférence de rayon $MC = R$ et fait 120 tr/mn. En tirant lentement le fil OA dans le tube, on raccourcit la partie extérieure du fil jusqu'à la longueur OM_1, le poids décrit alors

une circonférence de rayon $\frac{1}{2} R$. Calculer le nombre de tr/mn que fait le poids dans ce cas.

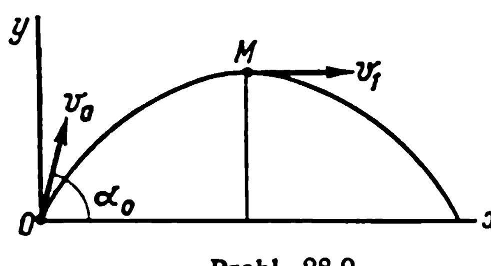
Rép. 480 tr/mn.



Probl. 28.4



Probl. 28.8



Probl. 28.9

28.5. Pour déterminer le poids d'un train chargé on a installé un dynamomètre entre les wagons et la locomotive Diesel. L'indication moyenne du dynamomètre en 2 mn est de 100,8 t. Pendant ce temps le train a atteint la vitesse $v=57{,}6$ km/h (à l'instant initial le train était au repos). Le coefficient de frottement $f=0{,}02$. Calculer le poids du train.

Rép. 3 000 t.

28.6. Quel doit être le coefficient de frottement f entre les roues d'une automobile et la route lors du freinage, si allant à la vitesse $v=72$ km/h l'automobile s'est arrêtée 6 s après le début du freinage?

Rép. $f=0{,}34$.

28.7. Une balle de 20 gf quitte le fusil à la vitesse $v=650$ m/s parcourant le canon en 0,000 95 s. Déterminer la grandeur moyenne de la pression des gaz agissant sur la balle, si l'aire du canon $s=150$ mm^2.

Rép. 9,31 kgf/mm^2.

28.8. Le point M se déplace autour d'un centre fixe sous l'action d'une force centripète. Trouver la vitesse v_2 au point de la trajectoire le plus éloigné du centre, si dans la position la plus proche elle est $v_1=30$ cm/s, r_2 étant cinq fois plus grand que r_1.

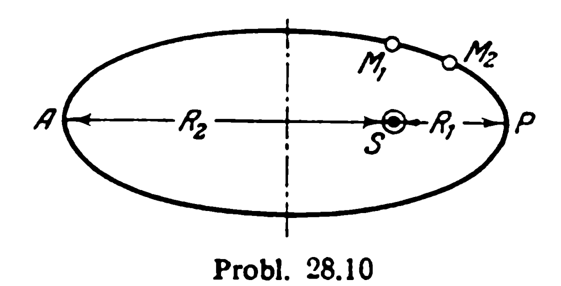
Rép. $v_2=6$ cm/s.

28.9. Trouver l'impulsion de la résultante de toutes les forces agissant sur un obus au cours du temps où il passe de sa position initiale O à sa plus haute position M, sachant que $v_0=500$ m/s, $\alpha_0=60°$, $v_1=200$ m/s, l'obus pesant 100 kgf.

Rép. Les projections de l'impulsion de la résultante sont:

$S_x=-510$ kgf s; $S_y=-4\,410$ kgf s.

28.10. Deux météorites M_1 et M_2 décrivent la même ellipse au foyer S de laquelle se trouve le Soleil. La distance entre ces météorites est tellement petite qu'on peut considérer l'arc M_1M_2 de l'ellipse comme un segment de droite. On sait que la distance M_1M_2 était a lorsque son point



Probl. 28.10

médian se trouvait au périhélie P. Supposant que les météorites se déplacent avec des vitesses sectorielles égales, déterminer la distance M_1M_2 lorsque son point médian passe par l'aphélie A; $SP=R_1$ et $SA=R_2$.

Rép. $M_1M_2=\frac{R_1}{R_2}a$.

28.11. Un garçon pesant 40 kgf se tient debout sur les patins d'une luge chargée dont le poids avec la charge est de 40 kgf et donne chaque seconde une impulsion de 2 kgf s. Calculer la vitesse de la luge 15 s après, si le coefficient de frottement $f=0{,}01$.

Rép. $v=2{,}2$ m/s.

28.12. Un point effectue un mouvement circulaire uniforme avec la vitesse $v=20$ cm/s et fait un tour complet en 4 s.

Trouver l'impulsion S des forces agissant sur le point en une demi-période, si la masse du point $m=5$ g. Calculer la valeur moyenne de la force F.

Rép. $S=200$ dyn s; $F=100$ dyn et est dirigée suivant la vitesse finale.

28.13. Deux pendules mathématiques de longueurs l_1 et l_2 $(l_1>l_2)$ effectuent des oscillations de même amplitude. Les deux pendules ont commencé à se mouvoir dans le même sens à partir de leurs positions extrêmes. Trouver la condition que doivent remplir les longueurs l_1 et l_2 pour qu'après un certain intervalle les pendules reviennent simultanément à la position d'équilibre. Calculer le plus petit intervalle de temps T.

Rép. $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}=\frac{k}{n}$, où k et n sont des nombres entiers, la fraction $\frac{k}{n}$ étant irréductible; $T=kT_2=nT_1$.

28.14. Une bille de poids p attachée à un fil inextensible glisse sur un plan horizontal lisse; on tire l'autre extrémité du fil, avec une vitesse constante a, dans une ouverture pratiquée dans le plan. Déterminer le mouvement de la bille et la tension du fil T sachant qu'à l'instant initial le fil est disposé suivant une droite, la distance entre la bille et l'ouverture est R et la pro-

jection de la vitesse initiale de la bille sur la perpendiculaire à la direction du fil est v_0.

Rép. En coordonnées polaires (si l'on prend l'ouverture comme origine des coordonnées et l'angle φ_0 égal à zéro):

$$r=R-at; \quad \varphi=\frac{v_0 t}{R-at}; \quad T=\frac{pv_0^2 R^2}{g(R-at)^3}.$$

28.15. Déterminer la masse M du Soleil sachant que : le rayon de la Terre $R=637\cdot 10^6$ cm, sa densité moyenne vaut 5,5, le demi grandaxe de l'orbite terrestre est $a=149\cdot 10^{11}$ cm et la période de rotation de la Terre autour du Soleil $T=365{,}25$ jours. La force d'attraction universelle entre deux masses de 1 kg à une distance de 1 cm est à $\frac{gR^2}{m}$, où m est la masse de la Terre; il découle des lois de Kepler que la force d'attraction de la Terre par le Soleil est $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\cdot\frac{m}{r^2}$, où r est la distance de la Terre au Soleil.

Rép. $M=197\cdot 10^{31}$ g.

28.16. Un point de masse m soumis à l'action d'une force centrale F décrit la lemniscate $r^2=a\cos 2\varphi$, où a est une grandeur constante, r la distance du point au centre; à l'instant initial $r=r_0$, la vitesse est v_0 et forme un angle α avec la droite joignant le point avec le centre. Calculer la force F sachant qu'elle ne dépend que de la distance r.

D'après la formule de Binet $F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right)$, où c est le double de la vitesse sectorielle du point.

Rép. La force d'attraction $F=\frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha$.

28.17. Un point matériel M de masse m se déplace autour d'un centre fixe O sous l'action de la force F située en ce centre et ne dépendant que de la distance $MO=r$. Sachant que la vitesse du point $v=a/r$ (a étant une grandeur constante), calculer la force F et la trajectoire du point.

Rép. La force d'attraction $F=\frac{ma^2}{r^3}$; la trajectoire est une spirale logarithmique.

28.18. Déterminer le mouvement d'un point d'une masse de 1 g sous l'action d'une force centripète inversement proportionnelle au cube de la distance entre le point et le centre de la force pour les données suivantes: pour une distance de 1 cm la force vaut 1 dyn; à l'instant initial la distance du point au centre $r_0=2$ cm, la vitesse $v_0=0{,}5$ cm/s et forme un angle de 45° avec la direction de la droite joignant le centre et le point.

Rép. $r=2e^{\varphi}$; $r^2=4+t\sqrt{2}$.

28.19. Une particule M d'une masse de 1 g est attirée vers un centre fixe O par une force inversement proportionnelle au cinquième degré de la distance; cette force est égale à 8 dyn pour une distance de 1 cm. A l'instant initial la particule se trouvait à une distance $OM_0 = 2$ cm et sa vitesse $v_0 = 0{,}5$ cm/s était normale à OM_0. Calculer la trajectoire de la particule.

Rép. Une circonférence de 1 cm de rayon.

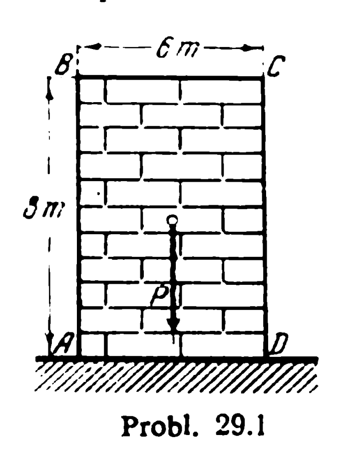
28.20. Un point dont la masse est de 20 g se déplaçant sous l'action d'une force d'attraction vers un centre fixe suivant la loi newtonienne, décrit une ellipse complète de demi-axes de 10 et 8 cm en 50 s. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de la force d'attraction F lors de ce mouvement.

Rép. $F_{max} = 19{,}7$ dyn; $F_{min} = 1{,}2$ dyn.

§ 29. Travail et puissance

29.1. Un massif homogène $ABCD$ dont les dimensions sont indiquées sur le schéma pèse 4 000 kgf. Déterminer le travail à fournir pour le chavirer par rotation autour de l'arête D.

Rép. 4 000 kgf m = 39,24 kJ.



Probl. 29.1

29.2. Déterminer le travail minimal qu'il faut fournir pour soulever de 5 m une charge de 2 t en la déplaçant sur un plan incliné dont la pente est $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, le coefficient de frottement étant 0,5.

Rép. 18 660 kgf m = 183 kJ.

29.3. Pour élever 5 000 m³ d'eau à 3 m de hauteur on utilise une pompe possédant un moteur de 2 ch. Combien de temps faut-il pour faire ce travail, si le rendement de la pompe est de 0,8 ?

On appelle rendement le rapport du travail utile (dans le cas considéré, le travail fourni pour élever l'eau) au travail de la force motrice qui doit être plus grand que le travail utile à cause des résistances parasites.

Rép. 34 h 43 mn 20 s.

29.4. Quelle est la puissance en chevaux-vapeur et en kilowatts d'une machine levant 84 fois en 1 mn un marteau de 200 kgf à une hauteur de 0,75 m, si le rendement de la machine est de 0,7 ?

Rép. 4 ch = 2,94 kW.

29.5. Calculer en chevaux-vapeur et en mégawatts la puissance totale de trois cascades disposées l'une derrière l'autre. La hauteur de chute de l'eau est de 12 m pour la première cascade, de 12,8 m pour la seconde et de 15 m pour la troisième. Le débit moyen d'eau est de 75,4 m³/s.

Rép. 40 000 ch = 29,4 MW.

29.6. Calculer la puissance des turbogénérateurs d'un réseau de tramways, si le nombre de wagons sur la ligne est 45. Chaque wagon pèse 10 t, la résistance de frottement est égale à 0,02 du poids d'un wagon, la vitesse moyenne du wagon est de 12 km/h et les pertes dans le réseau sont de 5%.

Rép. 421 ch=309 kW.

29.7. Pour décharger une barge de charbon on utilise un moteur soulevant une benne. La benne peut contenir 1 t de charbon et pèse 200 kgf. On doit décharger 600 t en 12 heures de travail, la benne chargée devant être levée à 10 m de hauteur. Calculer la puissance théorique du moteur.

Rép. 2,22 ch=1,63 kW.

29.8. Calculer le travail fourni pour monter une charge de 20 kgf sur un plan incliné à une distance de 6 m si la pente du plan est $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le coefficicient de frottement 0,01.

Rép. 61,04 kgf m=598 J.

29.9. Lorsqu'un bateau à turbine se déplace à la vitesse de 15 nœuds, sa turbine développe une puissance de 5 144 ch. Calculer la résistance de l'eau à l'avancement du bateau sachant que le rendement de la turbine et de l'hélice est de 0,4 et que 1 nœud=0,514 4 m/s.

Rép. 20 t.

29.10. Calculer en chevaux-vapeur et en kilowatts la puissance d'un moteur à combustion interne, si la pression moyenne sur le piston pendant toute la course est de 5 kgf/cm²; la course du piston est de 40 cm, son aire de 300 cm², le nombre de courses est 120 à la minute et le rendement est de 0,9.

Rép. 14,4 ch=10,6 kW.

29.11. La pierre d'une rectifieuse de 60 cm de diamètre fait 120 tr/mn. La puissance nécessaire est de 1,6 ch. Le coefficient de frottement entre la pierre et la pièce à rectifier est 0,2. Avec quelle force la pierre comprime-t-elle la pièce à rectifier?

Rép. 1 570 N.

29.12. Déterminer la puissance du moteur d'une raboteuse, si la course de travail est de 2 m et sa durée de 10 s, la force de coupe étant de 1 200 kgf et le rendement de la raboteuse de 0,8. Supposer que le mouvement est uniforme.

Rép. 2,96 kW.

29.13. Au XVIII[e] siècle, on utilisait pour pomper l'eau des mines un manège appelé trépigneuse circulaire. Le diamètre de la trépigneuse $d=8$ m, son axe faisait $n=6$ tr/mn.

Déterminer la traction moyenne du cheval entraînant la trépigneuse en supposant que sa puissance est de 1 ch.

Rép. $F=29{,}9$ kgf.

29.14. Une charge de poids P est suspendue à l'extrémité d'un ressort. Pour allonger le ressort de 1 cm il faut appliquer une force égale à c gf. Etablir l'expression de l'énergie mécanique totale du système.

Rép. $\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2-mgx=\text{const}$, où x est calculée à partir de l'extrémité du ressort non tendu vers le bas.

29.15. Le centre de gravité d'un skieur parcourant une distance de 20 km sur un chemin horizontal effectue des oscillations harmoniques d'amplitude $a=8$ cm et de période $T=4$ s. Le skieur pèse 80 kgf et le coefficient de frottement des skis sur la neige $f=0{,}05$.

Calculer le travail fourni par le skieur en marche, s'il a parcouru cette distance en 1 h 30 mn, ainsi que sa puissance moyenne.

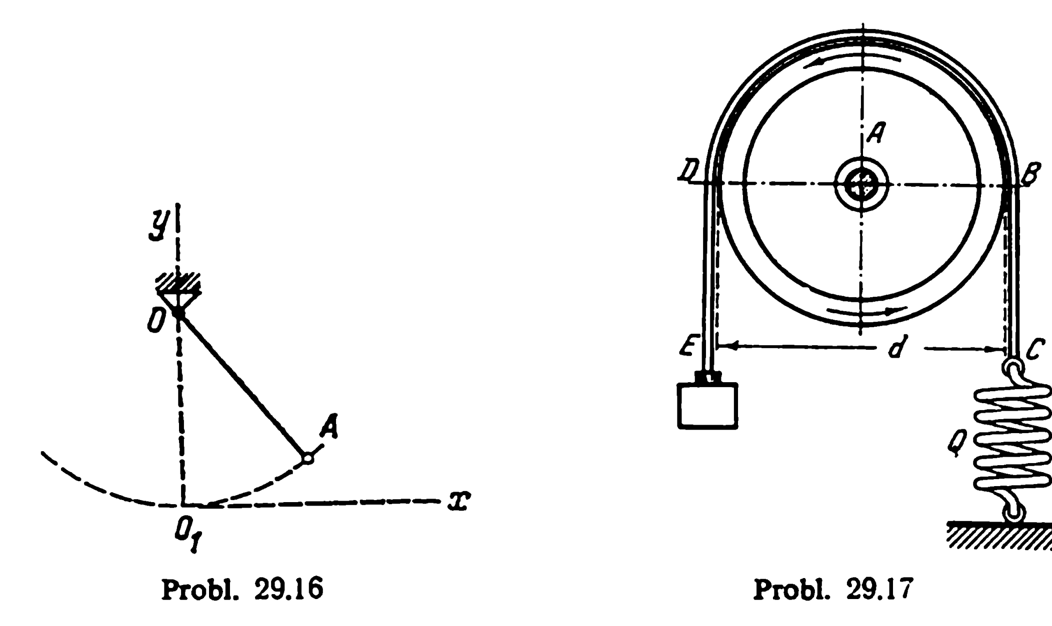
Remarque. Supposer que le travail de freinage lors de l'abaissement du centre de gravité du skieur constitue 0,4 du travail fourni lors de la montée du centre de gravité à la même hauteur.

Rép. $A=1{,}05\cdot10^5$ kgfm; $w=0{,}26$ ch.

29.16. Un pendule mathématique A de poids P et de longueur l s'élève à la hauteur y sous l'action de la force Px/l. Calculer l'énergie potentielle du pendule: 1) comme travail de la pesanteur et 2) comme travail fourni par la force Px/l, et indiquer dans quelles conditions ces deux procédés amènent au même résultat.

Rép. Py; 2) $\frac{1}{2}\frac{Px^2}{l}$.

Les résultats sont identiques si l'on peut négliger y^2.



Probl. 29.16 Probl. 29.17

29.17. Pour mesurer la puissance d'un moteur on passe sur la poulie A une bande portant des sabots de frein. Le brin droit BC de la bande est retenu par un dynamomètre à ressort Q, son brin gauche DE étant tendu

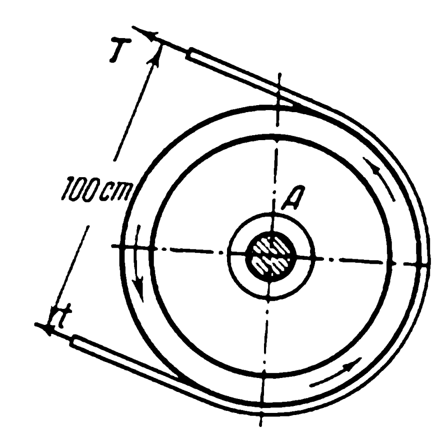
par une charge. Déterminer la puissance du moteur si, en tournant uniformément, il fait 120 tr/mn; le dynamomètre indique alors une tension de 4 kgf dans le brin droit, le poids de la charge étant de 1 kgf, le diamètre du volant $d=63{,}6$ cm.

La différence des tensions entre les brins BC et DE de la bande est égale à la force freinant le volant; on détermine le travail de cette force en 1 s.

Rép. 0,16 ch = 117,8 W.

29.18. Une puissance de 20 ch est transmise au moyen d'une courroie. Le rayon de la poulie est de 50 cm, sa vitesse angulaire de 150 tr/mn. En supposant que la tension T du brin moteur de la courroie est deux fois plus grande que la tension t dans le brin entraîné, calculer les tensions T et t.

Rép. $T=382$ kgf; $t=191$ kgf.

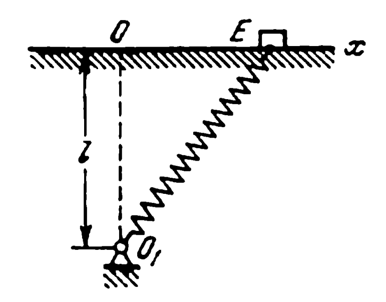


Probl. 29.18

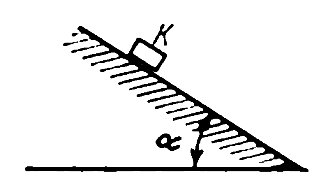
§ 30. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du point matériel

30.1. Un corps E de masse m se trouve sur un plan horizontal lisse. On attache à ce corps un ressort de rigidité c dont l'autre extrémité est articulée en O_1. La longueur du ressort non déformé est l_0; $OO_1=l$. A l'instant initial on écarte le corps E de sa position d'équilibre O de $OE=a$, puis on le relâche sans vitesse initiale. Déterminer la vitesse du corps à l'instant où il passe par la position d'équilibre.

Rép. $v=\sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2}+l_0\left(l-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right]}$.



Probl. 30.1



Probl. 30.3

30.2. Calculer dans les conditions du problème précédent la vitesse du corps E à l'instant où il passe par la position d'équilibre O en supposant que le plan est rugueux et que le coefficient de frottement est f.

Rép. $$v^2=\frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2}+l_0\left(l-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-f\left[(mg+cl)\,a+cl_0\,l\,\mathrm{Log}\,\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right]\right\}.$$

30.3. Le corps K est au repos sur un plan incliné rugueux. Le plan forme un angle α par rapport à l'horizontale et $f_0 > \operatorname{tg}\alpha$, f_0 étant le coefficient d'adhérence. A un moment donné on communique au corps une vitesse initiale v_0 dirigée le long du plan vers le bas. Calculer le chemin s parcouru par le corps jusqu'à l'arrêt, si le coefficient de frottement est f. (Voir fig. p. 251.)

Rép. $s = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$.

30.4. Un corps pesant descend sans vitesse initiale sur un plan incliné de pente $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; le coefficient de frottement est 0,1. Calculer la vitesse du corps à 2 m de son point de départ.

Rép. 4,02 m/s.

30.5. Un obus de 24 kgf quitte le canon de 2 m de longueur à la vitesse de 500 m/s.

Quelle est la valeur moyenne de la force de pression des gaz appliquée à l'obus?

Rép. 152,9 t.

30.6. Un point matériel de 3 kgf se déplace vers la gauche sur une droite horizontale à la vitesse de 5 m/s. On lui applique une force constante dirigée vers la droite. L'action de la force cesse 30 s après; la vitesse du point est alors 55 m/s et se trouve dirigée vers la droite. Trouver la grandeur de cette force et le travail qu'elle a accompli.

Rép. 0,612 kgf; 459 kgf m = 4,5 kJ.

30.7. A l'approche d'une gare un train descend une rampe d'angle $\alpha = 0{,}008$ rd à la vitesse de 36 km/h. A un moment donné, le mécanicien voyant le danger commence à freiner. La résistance due au freinage et au frottement dans les essieux constitue 0,1 du poids du train. Déterminer à quelle distance et en combien de temps va s'arrêter le train après le début du freinage. On peut poser $\sin\alpha = \alpha$.

Rép. 55,3 m; 11,06 s.

30.8. Un train pesant 200 t roule sur une voie horizontale avec une accélération 0,2 m/s². La résistance due au frottement dans les essieux constitue 10 kgf par chaque tonne du poids du train et peut être considérée comme indépendante de la vitesse. Déterminer la puissance développée par la locomotive Diesel à l'instant $t = 10$ s, si pour $t = 0$ la vitesse du train était de 18 m/s.

Rép. 1 620 ch = 1 192 kW.

30.9. Une poutre de poids G commence à se mouvoir avec la vitesse initiale v_0 sur un plan horizontal rugueux et parcourt la distance s jusqu'à l'arrêt complet. Déterminer le coefficient de frottement, la force de frottement étant proportionnelle à la pression normale.

Rép. $f = \dfrac{v_0^2}{2gs}$.

30.10. La résistance rencontrée par un wagon plat de 6 t pendant le mouvement, due au frottement dans les essieux, est égale à 15 kgf. Un ouvrier pousse le wagon à l'arrêt et le fait rouler sur une voie horizontale rectiligne en exerçant une pression de 25 kgf. Après avoir parcouru 20 m, il abandonne le wagon à lui-même. Calculer, en négligeant la résistance de l'air et le frottement des roues sur les rails, la vitesse maximale v_{max} du wagon et la distance s parcourue jusqu'à l'arrêt.

Rép. $v_{max} = 0{,}808$ m/s; $s = 33\frac{1}{3}$ m.

30.11. La résistance à l'avancement d'un clou dans un mur est de 70 kgf. A chaque coup de marteau il s'enfonce dans le mur de 0,15 cm. Déterminer le poids du marteau P, si sa vitesse, à l'instant où il frappe le clou, est de 1,25 m/s.

Rép. $P = 1{,}32$ kgf.

30.12. Un météorite qui est tombé sur la Terre en 1751 pesait 39 kgf. Il s'est enfoncé dans le sol à une profondeur de 1,875 m. L'étude expérimentale a montré que la résistance du sol à l'enfoncement du corps à l'endroit de sa chute est de 50 t.

A quelle vitesse le météorite a-t-il atteint la surface de la Terre? De quelle hauteur a-t-il dû tomber sans vitesse initiale pour atteindre cette vitesse à la surface de la Terre? Supposer que la pesanteur est constante et négliger la résistance de l'air.

Rép. $v = 217$ m/s; $H = 2\ 390$ m.

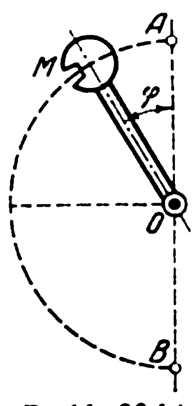
30.13. Un train non freiné pesant 500 t roule avec son moteur coupé. La résistance à l'avancement du train:

$$R = (765 + 51v) \text{ kgf},$$

où v est la vitesse en m/s. Sachant que la vitesse initiale du train $v_0 = 15$ m/s, calculer la distance qu'il a parcourue avant de s'arrêter.

Rép. $s = 4{,}6$ km.

30.14. Un moulage en acier lourd fixé à une barre pouvant tourner presque sans frottement autour d'un axe fixe horizontal O, constitue



Probl. 30.14

la partie principale d'un instrument utilisé pour essayer la résilience des matériaux. Négligeant la masse de la barre on considère le moulage M comme un point matériel pour lequel la distance $OM = 0,981$ m. Calculer la vitesse v de ce point à sa position inférieure B, s'il tombe de sa position supérieure A avec une vitesse initiale minime.

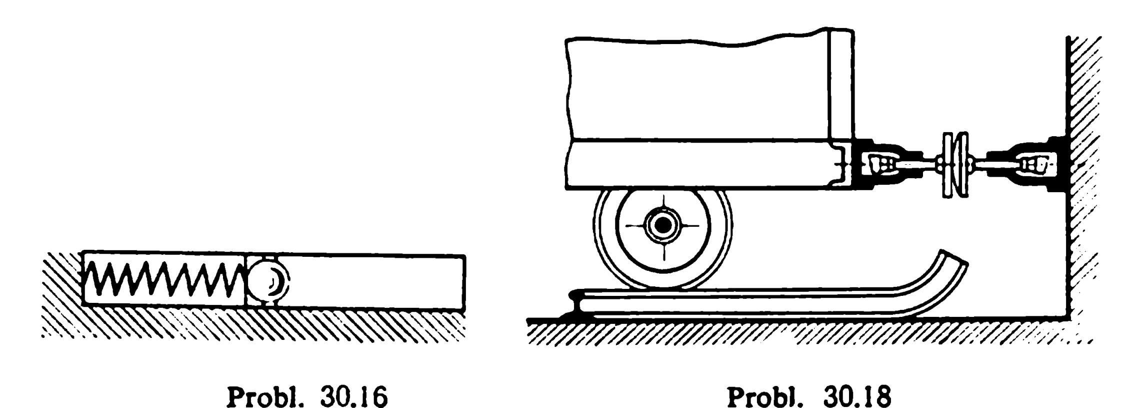
Rép. $v = 6,2$ m/s.

30.15. Ecrire l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort élastique fléchissant de 1 cm sous l'action d'une charge de 0,4 t. Supposer que la déflexion x croît proportionnellement à la charge.

Rép. $V = 0,2x^2 + \text{const.}$

30.16. La longueur du ressort d'un dispositif (cf. schéma) à l'état non comprimé est de 20 cm. La force nécessaire pour changer sa longueur de 1 cm est de 0,2 kgf. Avec quelle vitesse v une bille de 30 gf part-elle du tube si le ressort a été comprimé jusqu'à une longueur de 10 cm, le tube étant horizontal?

Rép. $v = 8,1$ m/s.



Probl. 30.16 Probl. 30.18

30.17. Le déplacement vertical statique d'une poutre portant en son milieu une charge Q est de 2 mm. Calculer la flèche de la poutre en négligeant sa masse dans les deux cas suivants: 1) la charge Q est appliquée sur la poutre non déformée sans vitesse initiale; 2) la charge Q tombe sur le milieu de la poutre non déformée d'une hauteur de 10 cm sans vitesse initiale.

Il faut avoir en vue que la force avec laquelle la poutre agit sur la charge est proportionnelle à son déplacement vertical.

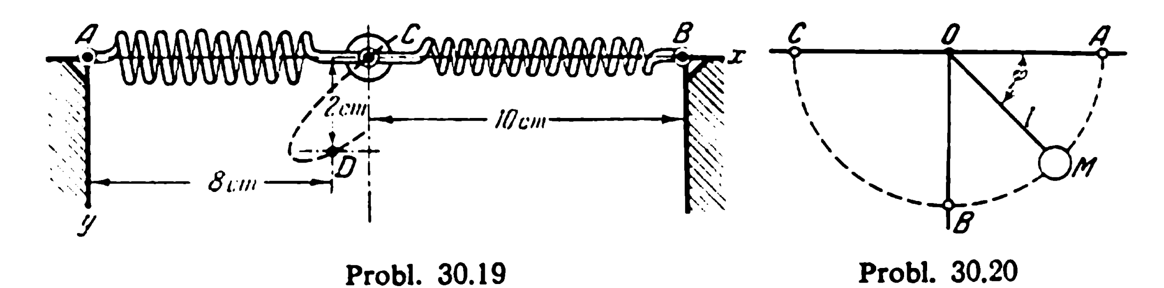
Rép. 1) 4 mm; 2) 22,1 mm.

30.18. Un wagon pesant 16 t se heurte contre deux tampons à la vitesse de 2 m/s. Calculer la compression maximale des ressorts des tampons lors du choc, sachant que les ressorts du wagon et des tampons sont identiques et se compriment de 1 cm sous l'action d'une force de 5 t.

Rép. 5,7 cm.

30.19. Deux ressorts non tendus AC et BC disposés suivant une droite horizontale Ax sont articulés aux points fixes A et B et à un poids de 1,962 kgf au point C. Le ressort AC se comprime de 1 cm sous l'action d'une force de 2 kgf; le ressort CB s'allonge de 1 cm sous l'action d'une force de 4 kgf. Les distances $AC=BC=10$ cm. On communique au poids une vitesse $v_0=2$ m/s dans une direction telle que dans son mouvement ultérieur il passe par le point D de coordonnées $x_0=8$ cm, $y_0=2$ cm, si le point A est pris comme origine des coordonnées et si les axes de coordonnées sont dirigés comme l'indique le schéma. Déterminer la vitesse du poids à l'instant où il passe par le point D situé dans le plan vertical xy.

Rép. $v=1,78$ m/s.



Probl. 30.19 Probl. 30.20

30.20. La charge M, de poids P, suspendue au point O par un fil non pesant et inextensible de longueur l, commence à se mouvoir dans le plan vertical sans vitesse initiale à partir du point A; en l'absence de résistance la charge M atteint la position C où sa vitesse est nulle. En supposant que l'énergie potentielle due au poids de la charge M soit nulle au point B, construire les graphiques des variations des énergies cinétique et potentielle et de leur somme en fonction de l'angle φ.

Rép. Deux sinusoïdes et une droite d'équations

$$T=Pl\sin\varphi,\quad V=Pl(1-\sin\varphi),\quad T+V=Pl.$$

30.21. Un point matériel de masse m effectue des oscillations harmoniques suivant la droite Ox sous l'action d'une force de rappel élastique d'après la loi: $x=a\sin(kt+\beta)$. En négligeant les résistances, tracer les graphiques de la variation de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V du point mobile en fonction de la coordonnée x; à l'origine des coordonnées $V=0$.

Rép. Les deux graphiques sont des paraboles d'équations

$$T=\frac{mk^2}{2}(a^2-x^2);\quad V=\frac{mk^2x^2}{2}.$$

30.22. Quelle force verticale, constante en grandeur et direction, faut-il appliquer à un point matériel pour qu'en tombant sur la Terre d'une hauteur égale au rayon de la Terre, cette force communique au point la même vitesse que la force d'attraction terrestre inversement proportionnelle au carré de la distance du point au centre de la Terre?

Rép. $P/2$, où P est le poids du point à la surface de la Terre.

30.23. Un point matériel est fixé à l'extrémité d'un ressort horizontal de masse négligeable comprimé par la force P et se trouvant au repos. La force P change brusquement de sens. Déterminer la relation entre l'allongement maximal l_2 obtenu et la contraction initiale l_1.

Rép $l_2/l_1=3$.

30.24. Un corps est lancé verticalement de la surface de la Terre avec une vitesse initiale v_0.

Calculer l'altitude H atteinte par le corps, compte tenu du fait que la pesanteur est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de la Terre; négliger la résistance de l'air. Le rayon de la Terre $R=$ $=6\,370$km, $v_0=1$ km/s.

Rép. $H=\frac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}=51$ km.

30.25. Deux particules sont chargées d'électricité positive; la charge de la première particule q_1 est égale à 100 unités absolues électrostatiques CGS, la charge de la seconde $q_2=0,1q_1$; la première particule est immobile, la seconde s'éloigne de la première grâce à la force de répulsion F. La masse de la seconde particule est de 1 g, sa distance initiale à la première particule est de 5 cm, sa vitesse initiale étant nulle. Déterminer la limite supérieure de la vitesse de la seconde particule mobile compte tenu de la seule action de la force de répulsion $F=\frac{q_1 q_2}{r^2}$, où r est la distance entre les deux particules.

Rép. 20 cm/s.

30.26. Calculer la vitesse verticale v_0 qu'il faut communiquer à un corps sur la surface de la Terre pour que ce corps atteigne une altitude égale au rayon de la Terre; tenir compte de la seule attraction terrestre qui est inversement proportionnelle au carré de la distance de ce corps au centre de la Terre. Le rayon de la Terre est égal à $637\cdot10^6$ cm, l'accélération de la pesanteur sur la surface de la Terre est de 980 cm/s^2.

Rép. 7,9 km/s.

30.27. Calculer la vitesse v_0 qu'il faut communiquer à un obus lancé de la surface de la Terre vers la Lune pour que cet obus atteigne le point où les forces d'attraction de la Terre et de la Lune sont égales et y demeure en équilibre. Négliger les mouvements de la Terre et de la Lune ainsi que la résistance de l'air. L'accélération de la pesanteur sur la surface de la Terre $g=9{,}8$ m/s^2. Le rapport des masses de la Lune et de la Terre $m:M=1:80$, leur distance $d=60R$, $R=6\,000$ km (le rayon de la Terre).

Le coefficient f figurant dans la formule de la force d'attraction universelle est défini de l'équation

$$m_1 g = m_1 f \left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

$$Rép.\ v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d} \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R} = \frac{59}{30} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} gR,$$

$$\text{où } \alpha = \frac{1}{59\sqrt{80}}, \text{ d'où } v_0 = 10{,}75 \text{ km/s}.$$

30.28. Une cage de 6 t descend avec la vitesse $v = 12$ m/s. Quelle force de frottement un parachute de sûreté doit-il développer entre la cage et les murs du puits pour arrêter la cage sur une distance de 10 m, en cas de rupture du câble qui la supporte?

Rép. $F = P\left(1 + \frac{v_0^2}{2gs}\right) = 10{,}3$ t.

§ 31. Problèmes mixtes

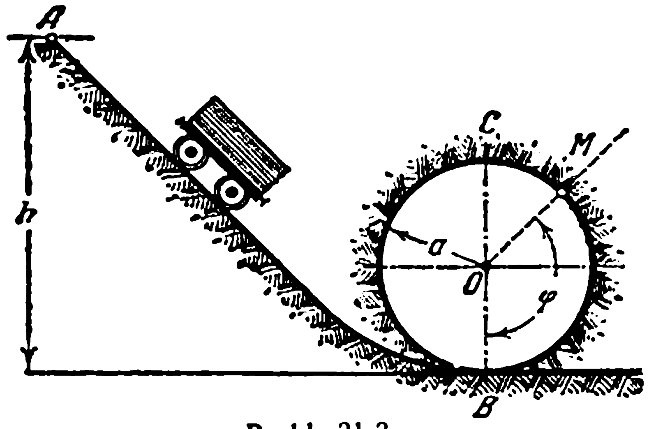
31.1. Une charge de 1 kgf est suspendue par un fil de longueur 50 cm à un point fixe O. A l'instant initial elle est écartée de la verticale sous un angle de 60° et une vitesse $v_0 = 210$ cm/s lui est communiquée dans le plan vertical suivant la perpendiculaire au fil vers le bas. Déterminer: 1) la tension du fil dans la position inférieure; 2) la hauteur calculée suivant la verticale atteinte par la charge au-dessus de cette position.

Rép. 1) 2,9 kgf; 2) 47,5 cm.

31.2. Trouver, dans les conditions du problème précédent (à l'exception de la vitesse v_0), pour quelle vitesse v_0 la charge décrira la circonférence entière.

Rép. $v_0 > 443$ cm/s.

31.3. Un wagonnet de poids P descend sur des rails posés sur la voie AB et qui forment ensuite une boucle circulaire BC de rayon a.

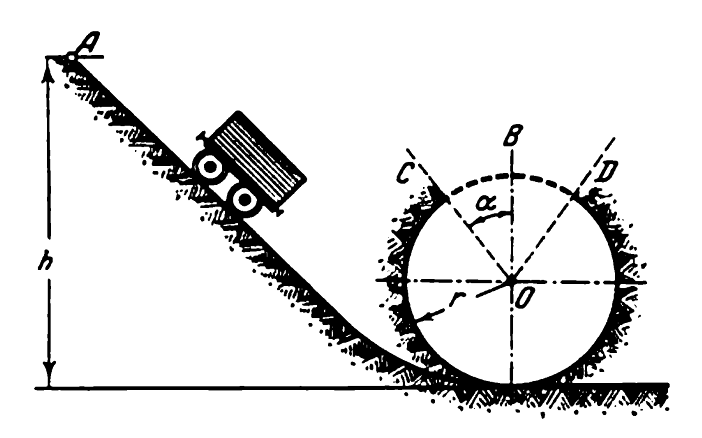


Probl. 31.3

De quelle hauteur h doit descendre un wagonnet sans vitesse initiale pour qu'il puisse parcourir toute la boucle sans s'en détacher? Calculer la pression N du wagonnet sur les rails au point M pour lequel $\widehat{MOB}=\varphi$.

Rép. $h \geqslant 2{,}5a$; $N=P\left(\frac{2h}{a}-2+3\cos\varphi\right)$.

31.4. Un wagonnet descend du point A sur des rails qui forment ensuite une boucle ouverte de rayon r (cf. schéma) : $\widehat{BOC}=\widehat{BOD}=\alpha$.



Probl. 31.4

De quelle hauteur h le wagonnet doit-il descendre sans vitesse initiale afin de parcourir toute la boucle; calculer la valeur de l'angle α pour laquelle cette hauteur h est minimale.

Indication. Sur le tronçon DC le centre de gravité du wagonnet effectue un mouvement parabolique.

Rép. $h=r\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $h_{\min}$ lorsque $\alpha=45°$.

31.5. Un moulage lourd en acier pesant 20 kgf est attaché à une barre de masse négligeable pouvant tourner sans frottement autour d'un axe fixe O. Le moulage tombe de sa position supérieure A avec une vitesse initiale minime. Calculer la plus grande pression sur l'axe (cf. schéma du problème 30.14).

Rép. 100 kgf.

31.6. Calculer (dans le cas du problème précédent) l'angle que forme la barre tournante avec la verticale à l'instant où la pression sur l'axe est nulle.

Rép. $\varphi=\arccos\frac{2}{3}$.

31.7. Un parachutiste de 70 kgf saute d'un avion et ouvre son parachute après avoir parcouru 100 m. Trouver la tension des élingues par

lesquelles l'homme se trouve suspendu au parachute, si au cours des cinq premières secondes après l'ouverture, pour une résistance constante à la descente, la vitesse du parachutiste décroît à 4,3 m/s. Négliger la résistance de l'air au mouvement de l'homme.

Rép. 127,4 kgf.

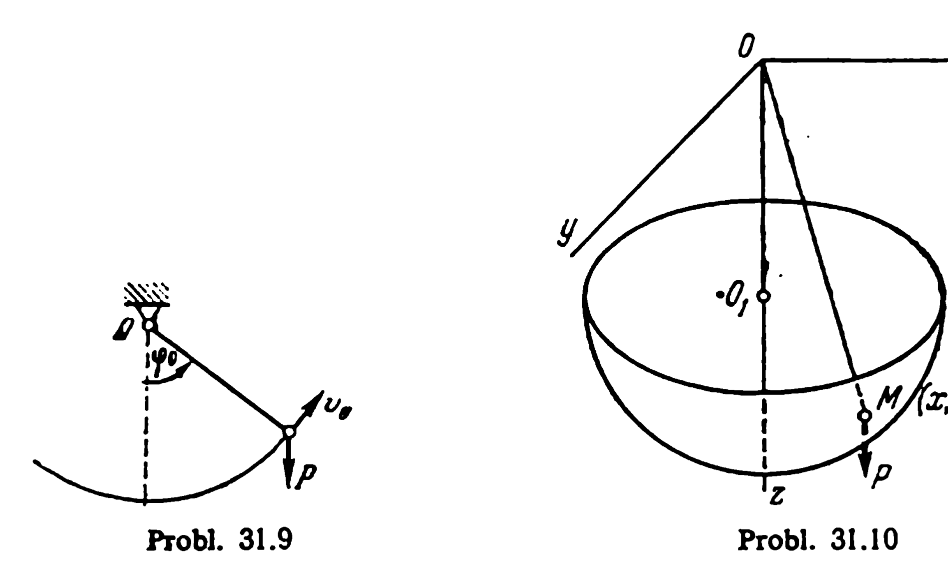
31.8. Le mécanicien d'un train allant à la vitesse de 12 m/s coupe la vapeur et commence à freiner à 500 m d'une gare située sur une élévation de 2 m. Quelle doit être la résistance due au freinage considéré comme constante pour que le train s'arrête à la gare, si le poids du train est de 1 000 t, la résistance de frottement de 2 t?

Rép. 8 679 kgf.

31.9. Un moulage lourd de poids P, fixé à une barre de longueur et de masse négligeable, pouvant tourner sans frottement autour d'un axe fixe O, est écarté de la verticale sous un angle φ_0. On communique alors au moulage une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ (cf. schéma). Calculer l'effort dans la barre en fonction de son angle de déviation de la verticale.

Rép. $N = 3P\cos\varphi - 2P\cos\varphi_0 + \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{l}$.

Si $N>0$ la barre est tendue, si $N<0$ la barre est comprimée.



Probl. 31.9 Probl. 31.10

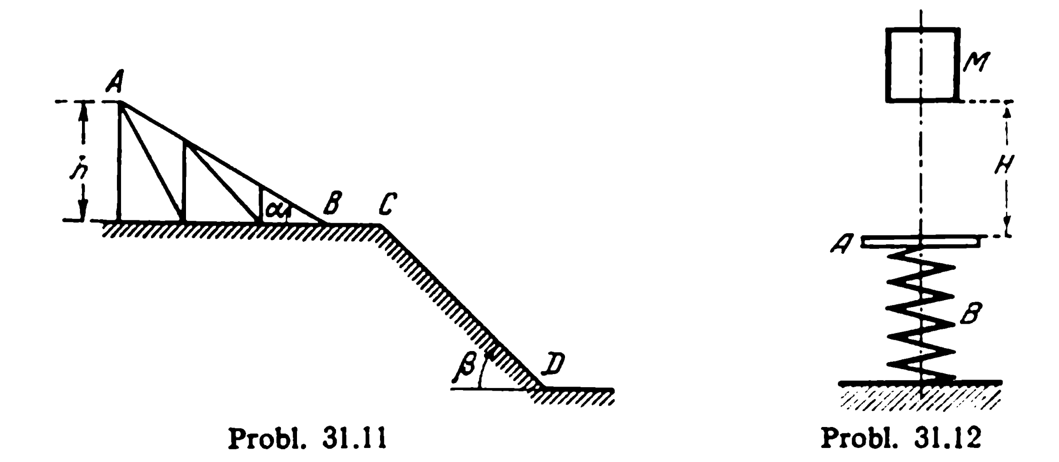
31.10. Un pendule sphérique est constitué d'un fil OM de longueur l, attaché par l'une de ses extrémités au point fixe O, et d'un pesant M, de poids P, attaché à l'autre extrémité de ce fil. On écarte le point M de sa position d'équilibre de manière à ce que ses coordonnées soient: pour $t=0$, $x=x_0$, $y=0$, et on lui communique une vitesse initiale $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=v_0$, $\dot{z}_0=0$. Déterminer pour quelle relation entre les données initiales le point M décrit une circonférence dans le plan horizontal et la période de ce mouvement.

Rép. $v_0 = x_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}$; $T=2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$.

31.11. Avant de sauter du tremplin un skieur descend d'une estacade AB inclinée de $\alpha=30°$ sur l'horizontale et parcourt un petit palier horizontal BC de longueur négligeable. A l'instant où il quitte le palier, le skieur se donne impulsivement une composante verticale de vitesse $v_y=1$ m/s. La hauteur de l'estacade $h=9$ m, le coefficient de frottement des skis sur la neige $f=0{,}08$, la ligne d'atterrissage CD forme un angle $\beta=45°$ avec l'horizontale. Calculer la portée l du vol du skieur. Négliger la résistance de l'air.

Remarque. La portée du vol est la longueur calculée à partir du point C au point d'atterrissage du skieur sur la ligne CD.

Rép. $l=47{,}4$ m.



Probl. 31.11 Probl. 31.12

31.12. Une charge M de poids P tombe sans vitesse initiale d'une hauteur H sur une plaque A reposant sur un ressort hélicoïdal B. Sous l'action du choc le ressort se comprime d'une grandeur h. Calculer, en négligeant le poids de la plaque A et des résistances, le temps T de compression du ressort d'une grandeur h et l'impulsion S de la force élastique du ressort au cours du temps T.

Rép. $T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\quad S=P\left(T+\sqrt{\frac{2H}{g}}\right),$

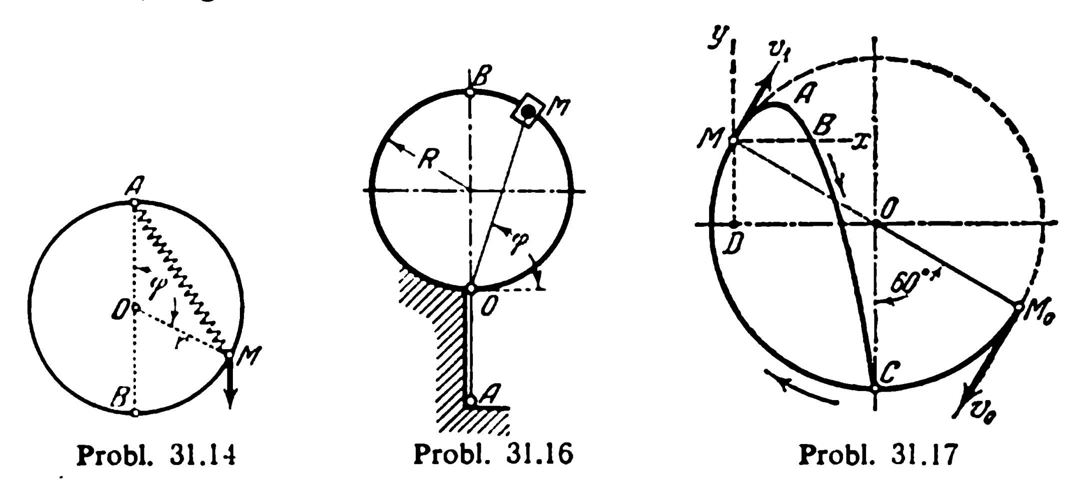
$$\text{où } \operatorname{tg}\alpha=-\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}},\quad k=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}.$$

31.13. Après la rupture d'un volant sa partie la plus éloignée du lieu de la catastrophe se trouvait à une distance $s=280$ m de sa position initiale. Calculer la plus petite valeur possible de la vitesse angulaire du volant à l'instant de l'accident, si le rayon du volant $R=1{,}75$ m. Négliger la résistance de l'air lors du déplacement de la partie considérée depuis sa position initiale jusqu'à sa position finale située dans le même plan horizontal.

Rép. $n=286$ tr/mn.

31.14. Une charge M suspendue par un ressort de poids négligeable au point supérieur A d'un anneau circulaire situé dans le plan vertical, tombe en glissant sans frottement sur l'anneau. Calculer la rigidité du ressort pour laquelle la pression de la charge sur l'anneau au point inférieur B est nulle pour les données suivantes: le rayon de l'anneau est de 20 cm, le poids de la charge de 5 kgf, dans la position initiale de la charge la distance $AM=20$ cm et le ressort est à l'état de repos; la vitesse initiale de la charge est nulle.

Rép. Le ressort doit s'allonger de 1 cm sous l'action d'une force de 0,5 kgf.



Probl. 31.14 Probl. 31.16 Probl. 31.17

31.15. Déterminer la pression de la charge M sur l'anneau au point inférieur B (cf. schéma du problème précédent) pour les données suivantes: le rayon de l'anneau est de 20 cm, le poids de la charge de 7 kgf; dans la position initiale de la charge $AM=20$ cm, le ressort étant alors tendu et sa longueur étant le double de sa longueur au repos qui est de 10 cm; la rigidité du ressort est telle qu'il s'allonge de 1 cm sous l'action d'une force de 0,5 kgf; la vitesse initiale de la charge est nulle; le poids du ressort est négligeable.

Rép. La pression est dirigée vers le haut et vaut 7 kgf.

31.16. Un anneau lisse M de poids Q peut glisser sans frottement sur une circonférence de rayon R cm située dans le plan vertical. L'anneau est relié à un fil élastique MOA passant par un anneau lisse fixe O et attaché au point A. Supposer que la tension du fil est nulle lorsque l'anneau M se trouve au point O et que pour allonger le fil de 1 cm il faut appliquer une force c. A l'instant initial l'anneau se trouve au point B, son équilibre est instable, et, sous l'effet d'une petite perturbation, il commence à glisser suivant la circonférence. Déterminer la pression N qu'exerce l'anneau sur la circonférence.

Rép. $N=2Q+cR+3(Q+cR)\cos 2\varphi$; la pression est dirigée vers l'extérieur pour $N>0$, et vers l'intérieur pour $N<0$.

31.17. Une charge est suspendue à un point fixe O par un fil long de 50 cm. Dans la position initiale M_0 la charge est écartée de la ver-

ticale sous un angle de 60° et une vitesse $v_0=350$ cm/s lui est communiquée dans le plan vertical, perpendiculairement au fil vers le bas.

1) Trouver la position M de la charge, pour laquelle la tension du fil est nulle, et la vitesse v_1 en cette position.

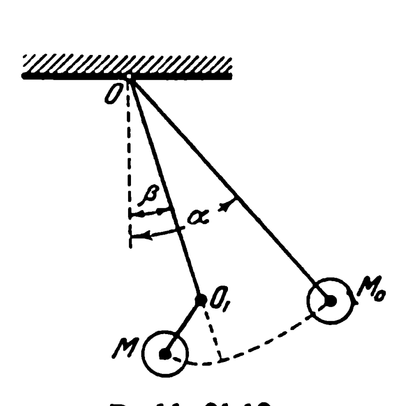
2) Calculer la trajectoire du mouvement ultérieur de la charge jusqu'à l'instant où le fil sera de nouveau tendu, et le temps mis par le point pour parcourir cette trajectoire.

Rép. 1) La position M est située au-dessus de l'horizontale passant par O à une distance $MD=25$ cm; $v_1=157$ cm/s.
2) La parabole $MABC$ dont l'équation, rapportée aux axes Mx et My, est $y=x\sqrt{3}-0{,}08x^2$; la charge décrit cette parabole en 0,55 s.

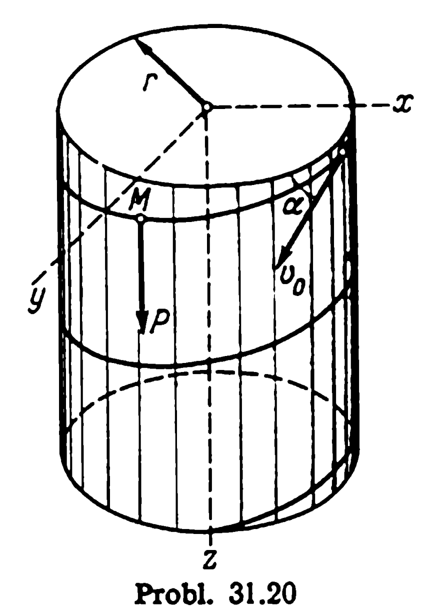
31.18. Un pendule mathématique est installé dans un avion qui monte à une altitude de 10 km. De combien doit-on raccourcir la longueur du fil du pendule pour que la période des petites oscillations reste inchangée à cette altitude ? Supposer que la pesanteur est inversement proportionnelle au carrée de la distance au centre de la Terre.

Rép. De 0,003 13 l, où l est la longueur du fil à la surface de la Terre.

31.19. Un poids M de masse m est suspendu par un fil OM de longueur l en un point fixe O. A l'instant initial OM forme avec la verticale un angle α et la vitesse du poids M est nulle. Dans son mouvement le fil rencontre un fil de fer fin O_1 dont la direction est perpendiculaire au plan du mouvement du poids et dont la position est définie par les coordonnées polaires: $h=OO_1$ et β. Déterminer la plus petite valeur de l'angle α pour laquelle le fil OM ayant rencontré le fil de fer O_1 s'enroule sur celui-ci, ainsi que la variation de la tension du fil à l'instant de cette rencontre. Négliger l'épaisseur du fil de fer.



Probl. 31.19



Probl. 31.20

Rép. $\alpha=\arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)-\frac{3}{2}\right]$; la tension du fil croît de $2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$.

31.20. Un point matériel M de poids P se déplace sur la surface intérieure d'un cylindre circulaire de rayon r.

Supposant la surface du cylindre parafaitement lisse et son axe vertical, calculer la pression qu'exerce le point sur le cylindre. La vitesse initiale du point est égale en grandeur à v_0 et forme un angle α avec l'horizontale.

Rép. $N=\frac{Pv_0^2\cos^2\alpha}{gr}$.

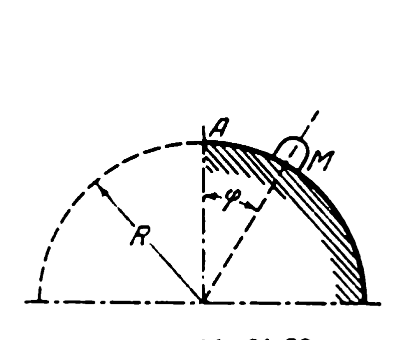
31.21. Dans le problème précédent former les équations du mouvement du point, si à l'instant initial le point est sur l'axe des x.

Rép. $x=r\cos\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$; $y=r\sin\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$;

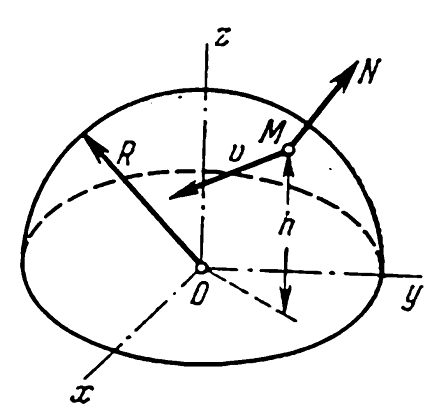
$$z=v_0t\sin\alpha+\frac{gt^2}{2}.$$

31.22. On communique à une pierre M située au sommet A d'une coupole lisse semi-sphérique de rayon R une vitesse initiale horizontale v_0. En quel point la pierre quitte la coupole? Pour quelles valeurs de v_0 la pierre quitte la coupole à l'instant initial? La résistance au mouvement de la pierre sur la coupole est négligeable.

Rép. $\varphi=\arccos\left(\frac{2}{3}+\frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $v_0\geqslant\sqrt{gR}$.



Probl. 31.22



Probl. 31.23

31.23. Un point M de masse m se déplace sur la surface lisse semi-sphérique d'une coupole de rayon R. Supposant que le point est soumis à l'action de la pesanteur parallèle à l'axe des z et sachant qu'à l'instant initial il était à une hauteur h_0 de la base de la coupole avec la vitesse v_0, calculer la pression du point sur la coupole lorsqu'il a atteint une hauteur h de la base de la coupole.

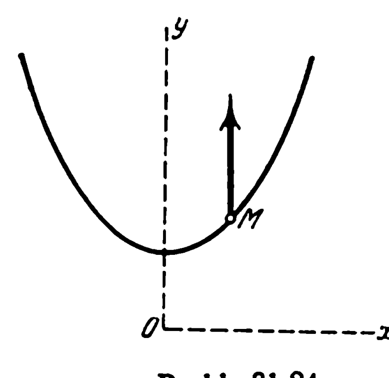
Rép. $N=\frac{mg}{R}\left(3h-2h_0-\frac{v_0^2}{g}\right)$.

31.24. Le point M de masse m se déplace suivant une chaînette

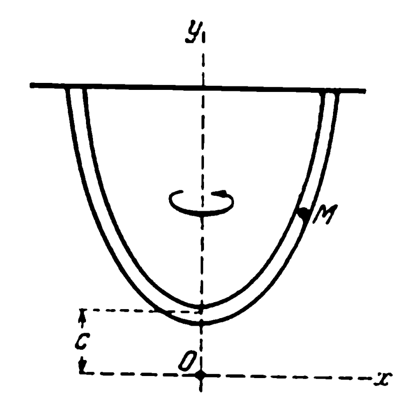
$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

sous l'action d'une force de répulsion kmy parallèle à l'axe Oy dans le sens positif de cet axe. A l'instant $t=0$, $x=1$ m, $\dot{x}=1$ m/s. Déterminer la pression N du point sur la courbe et le mouvement du point pour $k=1$ s^{-2} et $a=1$ m (on néglige la pesanteur). Le rayon de courbure de la chaînette est y^2/a.

Rép. $N=0$; $x=(1+t)$ m.



Probl. 31.24



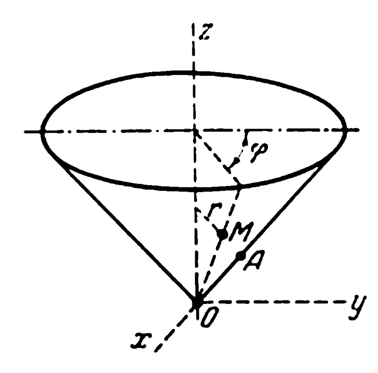
Probl. 31.25

31.25. Déterminer la forme de la courbe plane que doit épouser un tube pour qu'une bille placée arbitrairement en son intérieur reste en équilibre par rapport à ce tube, si ce dernier tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oy.

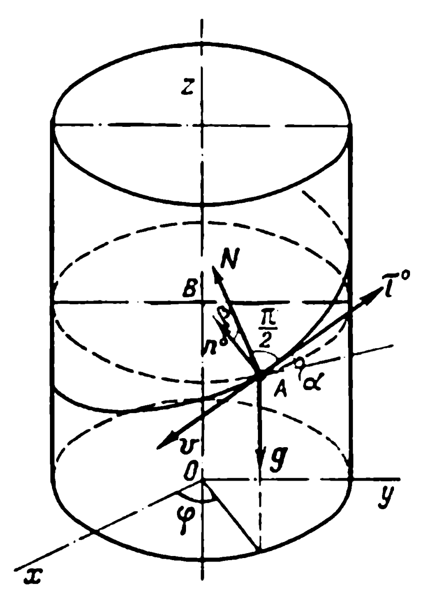
Rép. La parabole $y=\frac{1}{2}\ \frac{\omega^2}{g}\ x^2+c$.

31.26. Le point M de masse $m=1$ g se déplace sur la surface lisse d'un cône circulaire d'angle au sommet $2\alpha=90°$, sous l'action d'une force de répulsion du sommet O proportionnelle à la distance $F=c\cdot OM$ dyn, où $c=1$ dyn/cm. A l'instant initial le point M est en A, la distance OA est égale à $a=2$ cm, sa vitesse initiale $v_0=2$ m/s et est dirigée parallèlement à la base du cône.

Déterminer le mouvement du point M (négliger la pesanteur).



Probl. 31.26



Probl. 31.28

La position du point M est définie par la coordonnée z et les coordonnées polaires r et φ dans le plan perpendiculaire à Oz; l'équation de la surface du cône est: $r^2-z^2=0$.

Rép. $r^2=e^{2t}+e^{-2t}$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2t}$.

31.27. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, en supposant que l'axe du cône est dirigé verticalement vers le haut et en tenant compte de la pesanteur, la pression du point sur la surface du cône.

Rép. $N=m\sin\alpha\left[g+\frac{a^2v_0^2\sin 2\alpha}{2r^3}\right]$.

31.28. Sous l'action de la pesanteur un point matériel A se déplace sur une surface hélicoïdale rugueuse dont l'axe Oz est vertical; la surface est donnée par l'équation $z=a\varphi+f(r)$; le coefficient de frottement du point sur la surface est k. Trouver la condition pour laquelle le mouvement du point a lieu à une distance constante $AB=r_0$ de l'axe, autrement dit, a lieu suivant une hélice; calculer aussi la vitesse de ce mouvement en supposant que $a=\text{const}$.

Indication. Pour résoudre le problème il est commode d'utiliser un système d'axes intrinsèques et de projeter l'équation du mouvement sur la tangente, la normale principale et la binormale de l'hélice au point A. Sur le schéma l'angle entre la composante normale N de la réaction de la surface hélicoïdale et le vecteur unité de la normale principale n^0 est désigné par β.

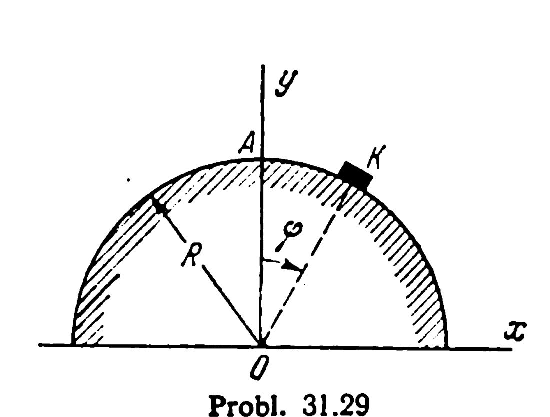
Rép. Le mouvement suivant une hélice est possible si

$$\operatorname{tg}\alpha-k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha}=0,$$

où $\operatorname{tg}\alpha=a/r_0$; la vitesse du mouvement $v=\sqrt{gr_0f'(r_0)}$.

31.29. Un corps K de dimensions négligeables est posé au point supérieur A de la surface rugueuse d'un demi-cylindre fixe de rayon R. Quelle vitesse initiale horizontale v_0, dirigée suivant la tangente au cylindre, faut-il communiquer au corps K pour que le mouvement de celui-ci s'arrête sur la surface du cylindre, si les coefficients de frottement et d'adhérence sont identiques et égaux à f?

Rép. $v_0\leqslant\sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}\,e^{-2f\varphi_0}-(1-2f^2)\right]}$, $\varphi_0=\operatorname{arc\,tg} f$.



Probl. 31.29

Probl. 31.30

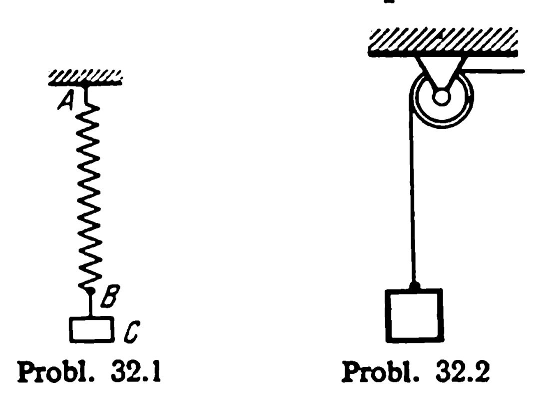
31.30. Un corps K de dimensions négligeables est posé au point inférieur A de la surface intérieure rugueuse d'un cylindre fixe de rayon R. Quelle vitesse initiale horizontale v_0, dirigée suivant la tangente au cylindre, faut-il communiquer au corps K pour qu'il s'élève jusqu'au point supérieur B du cylindre? Le coefficient de frottement est f. (Voir fig. p. 265.)

Rép. $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}]}$.

§ 32. Mouvement oscillatoire

a) Oscillations libres

32.1. Le ressort AB dont l'une des extrémités est fixée au point A est tel que pour l'allonger de 1 cm il faut appliquer statiquement au point B une force de 20 gf. A un moment donné on suspend à l'extrémité B du ressort non déformé un poids C de 100 gf et on l'abandonne sans vitesse initiale. Ecrire l'équation du mouvement du poids et indiquer l'amplitude et la période des oscillations. La masse du ressort est négligeable. Rapporter le mouvement du poids à l'axe mené de la position d'équilibre statique du poids verticalement vers le bas.



Probl. 32.1 Probl. 32.2

Rép. $x = -5 \cos 14t$ cm; $a = 5$ cm; $T = 0{,}45$ s.

32.2. L'extrémité supérieure d'un câble par lequel on descendait uniformément un poids de 2 t à la vitesse de 5 m/s s'est brusquement arrêtée, le câble étant pincé dans la frette de la poulie. Négligeant le poids du câble, déterminer la tension maximale lors du mouvement oscillatoire ultérieur du poids, si la rigidité du câble $c=4$ t/cm.

Rép. $F=47{,}1$ t.

32.3. Calculer la tension maximale du câble du problème précédent, si l'on a indroduit entre la charge et le câble un ressort élastique de rigidité $c_1=0{,}4$ t/cm.

Rép. $F=15{,}6$ t.

32.4. Un poids Q tombe d'une hauteur de 1 m sans vitesse initiale et se heurte contre le milieu d'une poutre horizontale élastique de masse négligeable, dont les extrémités sont articulées. Ecrire l'équation du mouvement ultérieur du poids sur la poutre, si en son milieu le déplacement vertical statique de la poutre est de 0,5 cm pour la charge indiquée. Rapporter le mouvement à l'axe mené de la position d'équilibre statique du poids sur la poutre verticalement vers le bas.

Rép. $x=(-0{,}5 \cos 44{,}3t+10 \sin 44{,}3t)$ cm.

32.5. Chaque ressort d'un wagon supporte une charge de P kgf: sous l'action de cette charge le déplacement vertical du ressort, à l'état d'équilibre, est de 5 cm. Déterminer la période T des oscillations libres du wagon sur les ressorts. La résistance élastique du ressort est proportionnelle à sa flèche.

Rép. $T=0{,}45$ s.

32.6. Calculer la période des oscillations libres du fondement d'une machine posé sur un sol élastique, si le fondement et la machine pèsent ensemble 90 t, l'aire de la semelle du fondement $S=15$ m², la rigidité du sol $c=\lambda S$, où $\lambda=3$ kgf/cm³ est la rigidité spécifique du sol.

Rép. $T=0{,}09$ s.

32.7. Calculer la période des oscillations libres verticales d'un navire en eau calme, si le poids du navire est P t, l'aire de sa section horizontale est S m² et ne dépend pas de la hauteur de la section; le poids spécifique de l'eau est 1 t/m³. Faire abstraction des forces de viscosité de l'eau.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{P}{Sg}}$.

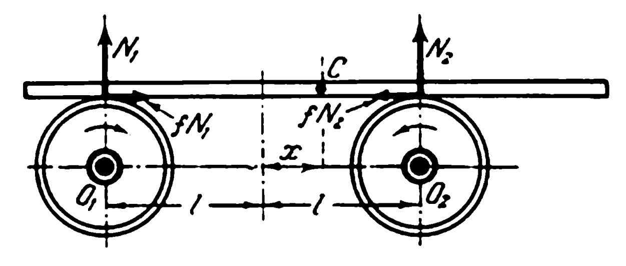
32.8. Ecrire l'équation du mouvement du navire du problème précédent, si la mise à l'eau a été effectuée avec une vitesse verticale nulle.

Rép. $y=-\frac{P}{S}\cos\sqrt{\frac{Sg}{R}}t$ m.

32.9. Un poids de P N est suspendu par un fil élastique à un point fixe. Ecarté de sa position d'équilibre le poids commence à osciller. Exprimer la longueur du fil x en fonction du temps et trouver la condition que doit remplir sa longueur initiale x_0 pour que, pendant le mouvement du poids, le fil reste tendu. La tension du fil est proportionnelle à son allongement; sa longueur au repos est l; sous l'action d'une charge statique de q N le fil s'allonge de 1 cm. La vitesse initiale du poids est nulle.

Rép. $x=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right);\quad l\leqslant x_0\leqslant l+\frac{2P}{q}$.

32.10. Une barre homogène est posée librement sur deux poulies cylindriques de même rayon tournant en sens inverses (cf. schéma); les centres des poulies O_1 et O_2 sont sur la droite horizontale O_1O_2; la distance $O_1O_2=2l$; le mouvement de la barre est dû aux forces de frottement développées



Probl. 32.10

en ses points de tangence avec les poulies; ces forces sont proportionnelles à la pression de la barre sur la poulie, le coefficient de proportionnalité (coefficient de frottement) étant f.

1) Déterminer le mouvement de la barre après l'avoir écartée de sa position de symétrie de x_0 lorsque $v_0=0$.

2) Calculer le coefficient de frottement f sachant que la période des oscillations T de la barre pour $l=25$ cm est de 2 s.

Rép. 1) $x=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t\right)$; 2) $f=\frac{4\pi^2 l}{gT^2}=0{,}25$.

32.11. A un même ressort on suspend d'abord une charge de poids p et une seconde fois une charge de poids $3p$. Déterminer la variation de la période des oscillations. Ecrire l'équation du mouvement des charges connaissant la rigidité c du ressort et les conditions initiales (les charges sont suspendues à l'extrémité du ressort non déformé et sont abandonnées sans vitesse initiale).

Rép. $\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{3}$; $x_1=-\frac{p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{p}}\,t$; $x_2=-\frac{3p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{3p}}\,t$.

32.12. A un ressort de rigidité $c=2$ kgf/cm on suspend d'abord une charge $P_1=6$ kgf, on la remplace ensuite par une charge $P_2=12$ kgf. Calculer les périodes et les fréquences des oscillations des charges.

Rép. $k_1=18{,}1\ \text{s}^{-1}$, $k_2=12{,}8\ \text{s}^{-1}$; $T_1=0{,}348$ s, $T_2=0{,}49$ s.

32.13. Deux poids $P_1=0{,}5$ kgf et $P_2=0{,}8$ kgf sont suspendus à un ressort de rigidité $c=20$ gf/cm. Le système était au repos dans la position d'équilibre statique, lorsqu'on a enlevé le poids P_2. Trouver l'équation du mouvement, la fréquence, la pulsation et la période des oscillations du poids restant.

Probl. 32.13

Rép. $x=40\cos 6{,}26t$ cm; $T=1$ s; $f=1$ Hz; $k=2\pi\ \text{s}^{-1}$.

32.14. Un poids $P_1=2$ kgf suspendu à un ressort de rigidité $c=0{,}1$ kgf/cm est en équilibre. Au poids P_1 on ajoute le poids $P_2=0{,}8$ kgf (cf. schéma du problème 32.13). Trouver l'équation du mouvement et la période des oscillations des poids.

Rép. $x=-8\cos 5{,}91t$; $T=1{,}06$ s.

32.15. Une charge pesant 4 kgf est suspendue d'abord à un ressort de rigidité $c_1=2$ kgf/cm, ensuite à un ressort de rigidité $c_2=4$ kgf/cm. Calculer les rapports des fréquences et des périodes des oscillations de la charge.

Rép. $\frac{k_1}{k_2}=0{,}706$; $\frac{T_1}{T_2}=1{,}41$.

32.16. Un corps de poids P se trouve sur un plan incliné formant un angle α avec la verticale. On attache au corps un ressort de rigidité c, parallèle au plan incliné.

Ecrire l'équation du mouvement du corps, si à l'instant initial on l'a attaché à l'extrémité du ressort non déformé et lui a communiqué une vitesse v_0 dirigée vers le bas suivant le plan incliné.

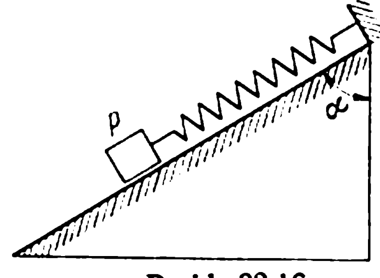
Prendre la position d'équilibre statique comme origine des coordonnées.

Rép. $x=\frac{v_0}{k}\sin kt-\frac{P\cos\alpha}{c}\cos kt$, ou $k=\sqrt{\frac{cg}{P}}$.

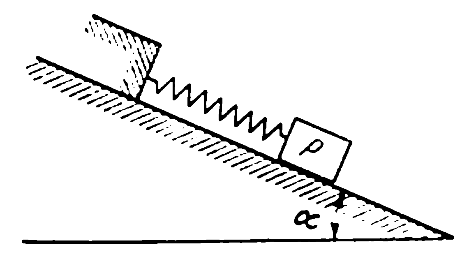
32.17. Un corps de poids P attaché à un ressort repose sur un plan lisse incliné sous un angle $\alpha=30°$ par rapport à l'horizontale. L'allongement statique du ressort est f.

Déterminer les oscillations du corps si à l'instant initial le ressort a été étiré jusqu'à une longueur égale à $3f$, ensuite le corps a été abandonné sans vitesse initiale.

Rép. $x=2f\cos\left(\sqrt{\frac{g}{f}\sin\alpha}\cdot t\right)$.



Probl. 32.16



Probl. 32.17

32.18. Un corps de poids $Q=12$ kgf, attaché à l'extrémité d'un ressort, effectue des oscillations harmoniques. A l'aide d'un chronomètre on établit que le corps effectue 100 cycles complets en 45 s, après quoi on attache à l'extrémité du ressort un poids supplémentaire $Q_1=6$ kgf.

Calculer la période des oscillations des deux poids sur le ressort.

Rép. $T_1=T\sqrt{\frac{Q+Q_1}{Q}}=0{,}55$ s.

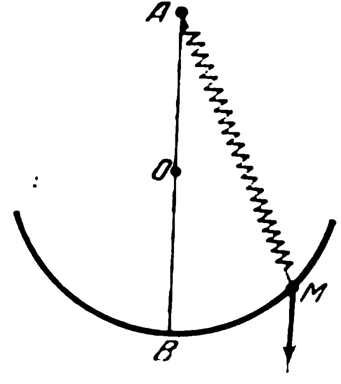
32.19. Ecrire dans les conditions du problème précédent l'équation du mouvement du seul poids Q et des deux poids $(Q+Q_1)$, si dans les deux cas les poids étaient fixés à l'extrémité du ressort non déformé.

Rép. 1) $x=-5{,}02\cos 14t$ cm,
2) $x_1=-7{,}53\cos 11{,}4t$ cm, où x et x_1 sont calculées respectivement à partir de chacune des deux positions d'équilibre statique.

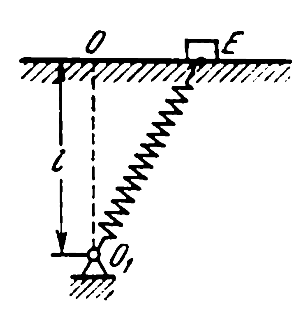
32.20. Un poids M suspendu par un ressort au point fixe A effectue de petites oscillations harmoniques dans le plan vertical en glissant sans frottement sur l'arc d'une circonférence de diamètre $AB=l$; la longueur du ressort non déformé est a; la rigidité du ressort est telle que sous l'action d'une force égale au poids de M il s'allonge de b. Calculer la période

T des oscillations dans le cas où $l=a+b$; la masse du ressort est négligeable et on suppose que pendant les oscillations il reste tendu.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.



Probl. 32.20



Probl. 32.22

32.21. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du poids M, si à l'instant initial $\widehat{BAM}=\varphi_0$, v_0 étant la vitesse initiale du point M dirigée suivant la tangente à la circonférence vers le bas.

Rép. $\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t-\frac{v_0}{\sqrt{lg}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$.

32.22. Un corps E de masse m se trouve sur un plan lisse horizontal. On attache au corps un ressort de rigidité c dont l'autre extrémité est articulée en O_1. La longueur du ressort non déformé est l_0; dans la position d'équilibre du corps le ressort est tendu, la tension étant $F_0=c(l-l_0)$, où $l=OO_1$. Tenant compte des seuls termes linéaires en δ dans l'expression de la composante horizontale de la force élastique du ressort, δ étant la déviation du corps de sa position d'équilibre, calculer la période de petites oscillations du corps.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_0}}$.

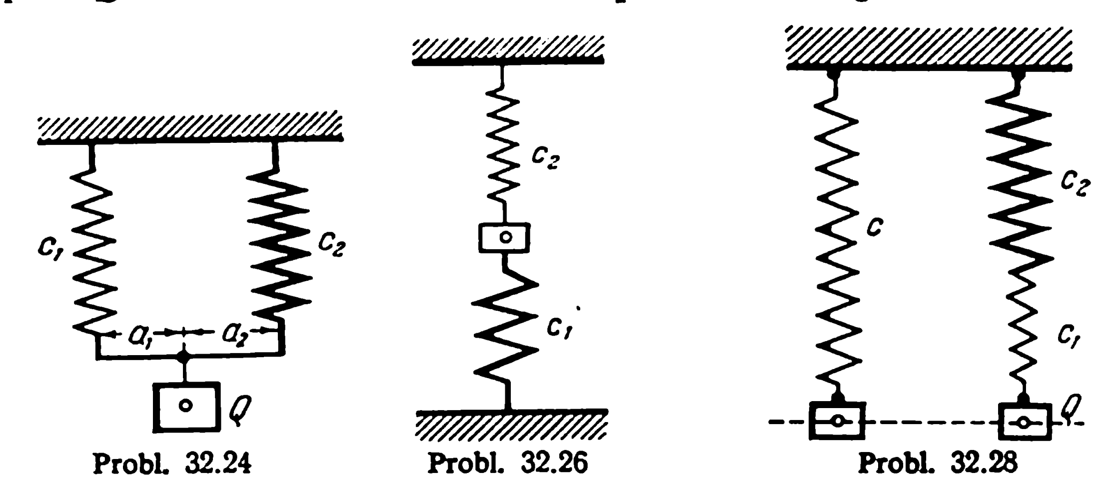
32.23. Un point matériel de poids P est suspendu à l'extrémité d'un ressort non déformé de rigidité c, puis est abandonné avec une vitesse initiale v_0 dirigée vers le bas. Trouver l'équation du mouvement et la période des oscillations du point, si à l'instant où il était parvenu au point inférieur extrême on lui a appliqué une force $Q=$const dirigée vers le bas.

Prendre la position d'équilibre statique comme origine des coordonnées, autrement dit, prendre l'origine à une distance P/c de l'extrémité du ressort non déformé.

Rép. $x=\frac{Q}{c}+\left[\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{P}{c}\right)^2}-\frac{Q}{c}\right]\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t$,

où t est calculé à partir de l'instant d'application de la force Q; $T=2\pi\sqrt{P/cg}$.

32.24. Déterminer la période des oscillations libres d'une charge de poids Q fixée à deux ressorts montés en parallèle et la rigidité du ressort



Probl. 32.24 Probl. 32.26 Probl. 32.28

équivalent au système de ressorts considéré, si la charge est disposée de manière que les allongements des deux ressorts, ayant les rigidités c_1 et c_2, soient identiques.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$; $c=c_1+c_2$; la disposition de la charge est telle que $a_1/a_2=c_2/c_1$.

32.25. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du poids, si on l'a suspendu aux ressorts non déformés et si on lui a communiqué une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ dirigée vers le haut.

Rép. $x=-\frac{Q}{c_1+c_2}\cos\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}\,t-v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\sin\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}\,t$.

32.26. Déterminer la période des oscillations libres d'une charge de poids Q enserrée entre deux ressorts de rigidités différentes c_1 et c_2.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$.

32.27. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du poids, si dans sa position d'équilibre on lui a communiqué une vitesse v_0 dirigée vers le bas.

Rép. $x=v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\sin\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}\,t$.

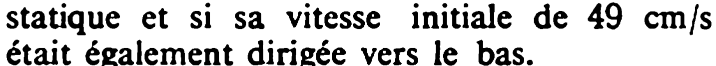
32.28. Déterminer la rigidité c d'un ressort équivalent à un système de deux ressorts montés en série, de rigidités différentes c_1 et c_2, et calculer la période des oscillations d'un poids Q suspendu à ce système de ressorts.

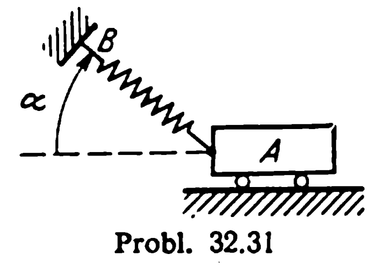
Rép. $c=\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}$; $T=2\pi\sqrt{\frac{Q(c_1+c_2)}{gc_1c_2}}$.

32.29. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du poids, si à l'instant initial il était à une distance x_0 au-dessous de la position d'équilibre, sa vitesse v_0 étant dirigée vers le haut.

$$Rép.\quad x = x_0 \cos \sqrt{\frac{c_1 c_2 g}{(c_1+c_2) Q}}\, t - v_0 \sqrt{\frac{(c_1+c_2) Q}{c_1 c_2 g}} \sin \sqrt{\frac{c_1 c_2 g}{(c_1+c_2) Q}}\, t.$$

32.30. Déterminer la rigidité du ressort équivalent à un système de ressorts montés en série de différentes rigidités $c_1 = 1$ kgf/cm et $c_2 = 3$ kgf/cm. Trouver la période des oscillations, l'amplitude et l'équation du mouvement d'un poids $Q = 5$ kgf suspendu à ce système de ressorts, si à l'instant initial le poids était déplacé de 5 cm au-dessous de sa position d'équilibre statique et si sa vitesse initiale de 49 cm/s était également dirigée vers le bas.





Probl. 32.31

$$Rép.\quad c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 0{,}75 \text{ kgf/cm};$$

$$T = 0{,}52 \text{ s};\quad a = 6{,}45 \text{ cm};$$

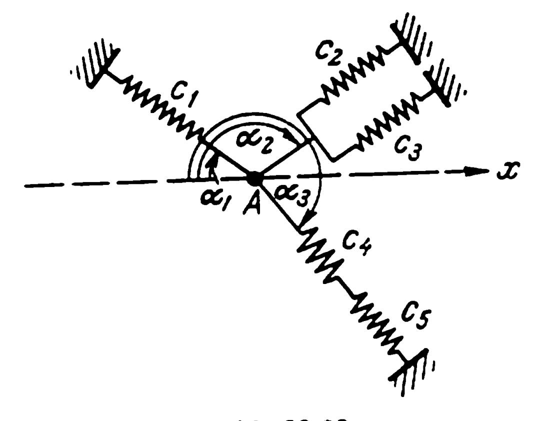
$$x = 5 \cos 7\sqrt{3}t + \frac{7}{\sqrt{3}} \sin 7\sqrt{3}t.$$

32.31. Un corps A de masse m peut se déplacer sur une droite horizontale. On lui attache un ressort de rigidité c dont l'autre extremité est fixée au point fixe B. Pour un angle $\alpha = \alpha_0$ le ressort n'est pas déformé. Calculer la fréquence et la période de petites oscillations de ce corps.

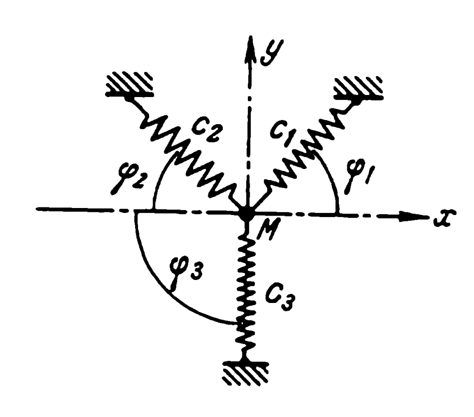
$$Rép.\quad k = \sqrt{\frac{c \cos^2 \alpha_0}{m}};\quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c \cos^2 \alpha_0}}.$$

32.32. Un point A de masse m est fixé à des ressorts (cf. schéma). Dans sa position initiale le point est en équilibre et les ressorts non déformés. Calculer la rigidité du ressort équivalent lorsque le point oscille suivant l'axe des x dans des guides parfaitement polis.

$$Rép.\quad c = c_1 \cos^2 \alpha_1 + (c_2 + c_3) \cos^2 \alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3.$$



Probl. 32.32



Probl. 32.33

32.33. Déterminer la rigidité du ressort équivalent aux trois ressorts indiqués sur le schéma lorsque le point M oscille suivant l'axe des x dans des guides parfaitement polis. Résoudre le même problème dans le cas où les guides sont disposés suivant l'axe des y.

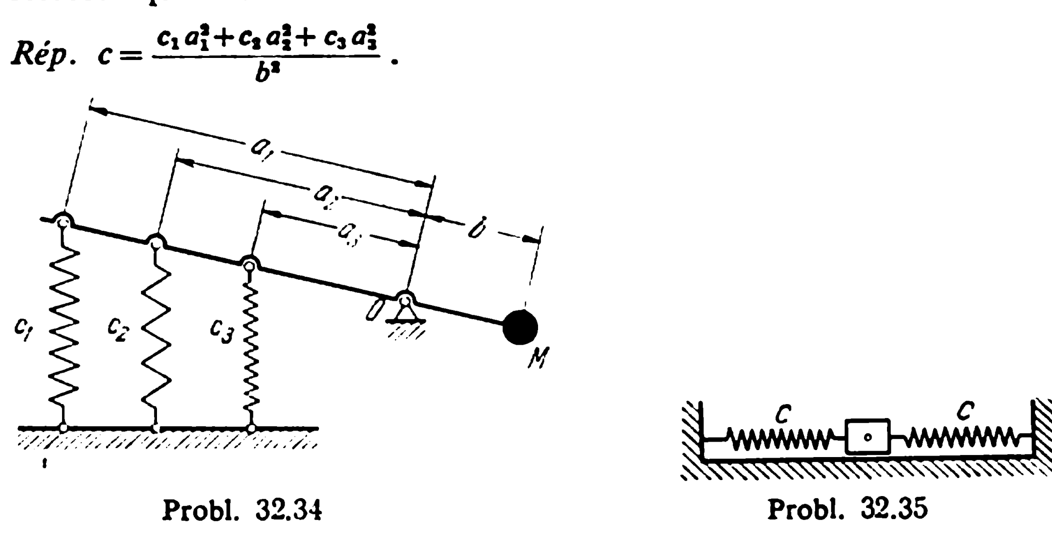
Rép. $c_x = c_1 \cos^2\varphi_1 + c_2 \cos^2\varphi_2 + c_3 \cos^2\varphi_3$;

$c_y = c_1 \sin^2\varphi_1 + c_2 \sin^2\varphi_2 + c_3$.

Dans la position initiale les ressorts ne sont pas déformés et le point M est en équilibre.

32.34. Déterminer la rigidité du ressort équivalent si le poids M est fixé à une barre de masse négligeable. La barre est articulée en O et liée au fondement par trois ressorts verticaux de rigidités c_1, c_2, c_3. Les ressorts sont fixés à la barre à des distances a_1, a_2, a_3 et le poids M à une distance b de l'articulation O. Dans la position d'équilibre la barre est horizontale. Le ressort équivalent est fixé à la barre à une distance b de l'articulation.

Rép. $c = \dfrac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{b^2}$.



Probl. 32.34

Probl. 32.35

32.35. Un poids de 10 kgf reposant sur un plan horizontal parfaitement lisse est inséré entre deux ressorts de même rigidité $c = 2$ kgf/cm. A un moment donné le poids a été déplacé de 4 cm de sa position d'équilibre vers la droite et abandonné sans vitesse initiale. Trouver l'équation du mouvement, la période des oscillations et la vitesse maximale du poids.

Rép. 1) $x = 4 \cos 19{,}8t$ cm; 2) $T = 0{,}317$ s; 3) $\dot{x}_{\max} = 79{,}2$ cm/s.

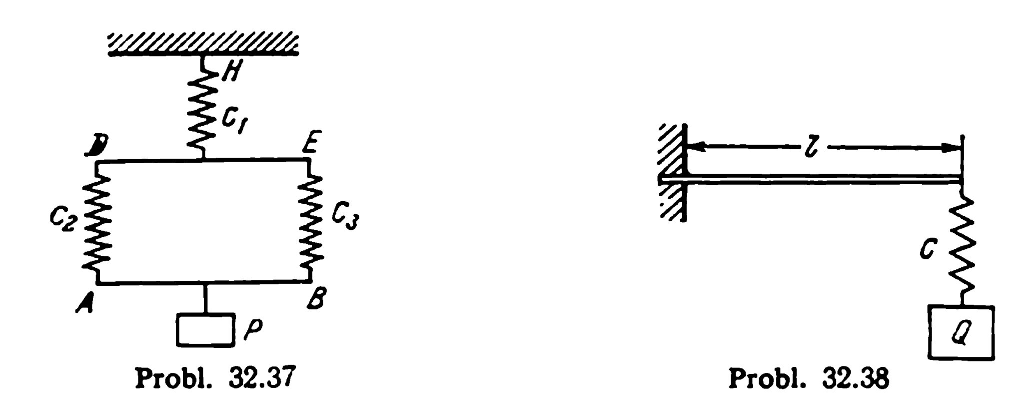
32.36. Un ressort hélicoïdal comporte n tronçons de rigidités c_1, c_2, ..., c_n. Déterminer la rigidité c du ressort homogène équivalent au ressort considéré.

Rép. $c = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{c_i}}$.

32.37. Le poids P est suspendu à une barre non pesante AB reliée par deux ressorts de rigidités c_2 et c_3 avec la barre non pesante DE. Cette der-

nière est fixée au plafond en un point H par un ressort de rigidité c_1. Lorsque le système oscille les barres restent horizontales. Calculer la rigidité d'un seul ressort équivalent pour laquelle le poids P oscille avec la même fréquence. Trouver la période des oscillations libres du poids.

Rép. $c=\dfrac{c_1(c_2+c_3)}{c_1+c_2+c_3}$; $T=2\pi\sqrt{\dfrac{P(c_1+c_2+c_3)}{gc_1(c_2+c_3)}}$.



Probl. 32.37 Probl. 32.38

32.38. Déterminer la fréquence propre des oscillations du poids Q suspendu à l'extrémité d'une console élastique non pesante de longueur l. La rigidité du ressort supportant le poids est égale à c kgf/cm. La rigidité à l'extrémité de la console est définie par la formule $c_1=\dfrac{3EJ}{l^3}$ (E est le module d'élasticité, J le moment d'inertie).

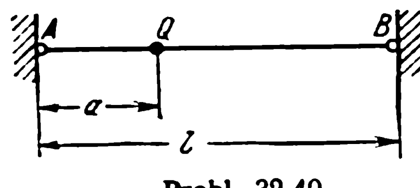
Rép. $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot 3EJc}{Q(3EJ+cl^3)}}$.

32.39. L'amplitude des oscillations d'un poids $P=10$ kgf, situé au milieu d'une poutre élastique de rigidité $c=2$ kgf/cm, est de 2 cm. Calculer la grandeur de la vitesse initiale du poids si à l'instant $t=0$ il était en équilibre.

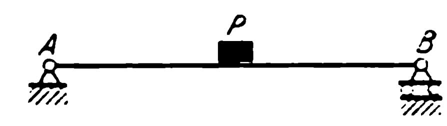
Rép. $v_0=28$ cm/s.

32.40. Un poids Q est maintenu par un câble de longueur $AB=l$ tendu horizontalement. Pour de petites oscillations verticales du poids la tension S du câble peut être considérée comme constante. Déterminer la fréquence des oscillations libres du poids, si la distance de celui-ci à l'extrémité du câble A est a.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{Sgl}{Qa(l-a)}}$ s^{-1}.



Probl. 32.40



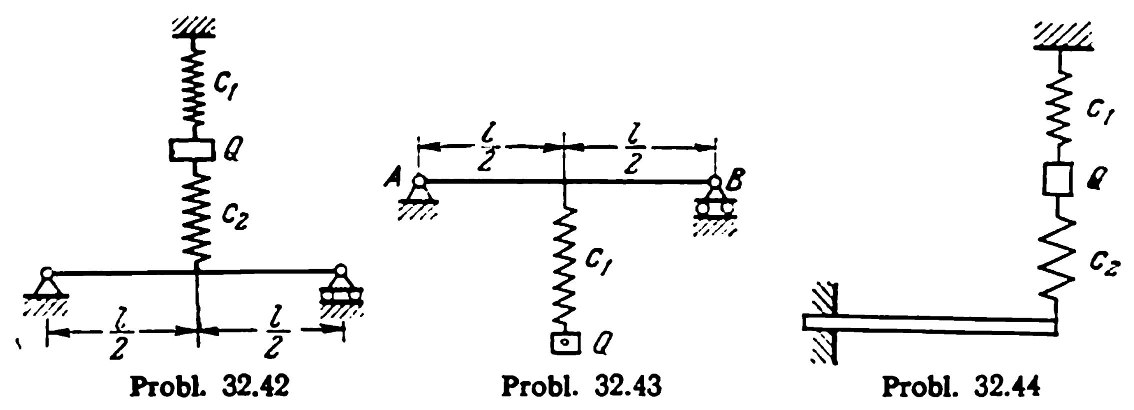
Probl. 32.41

32.41. Un poids $P=50$ kgf repose au milieu d'une poutre AB. Le moment d'inertie de la section droite de la poutre $J=80$ cm^4. Calculer la longueur l de la poutre pour laquelle la période des oscillations libres du poids sur la poutre soit $T=1$ s.

Remarque. La flèche statique d'une poutre est définie par la formule $f=\frac{Pl^3}{48\,EJ}$, où $E=2{,}1\cdot10^6$ kgf/cm^2 est le module d'élasticité.

Rép. $l=15{,}9$ m.

32.42. Une charge de poids Q est fixée entre deux ressorts verticaux de rigidités c_1 et c_2. L'extrémité supérieure du premier ressort est fixe, l'extrémité inférieure du second est attachée au milieu d'une poutre. Déterminer la longueur l de la poutre pour laquelle la période des oscillations de la



Probl. 32.42 Probl. 32.43 Probl. 32.44

charge soit T. Le moment d'inertie de la section droite de la poutre est J, le module d'élasticité E.

$$Rép.\quad l=\sqrt[3]{\frac{48EJ\left(c_1+c_2-\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}-c_1\right)}}\,.$$

32.43. Trouver l'équation du mouvement et la période des oscillations du poids Q suspendu au ressort de rigidité c_1, ce ressort étant fixé au milieu d'une poutre de longueur l. La rigidité de la poutre à la flexion est EJ. A l'instant initial le poids était dans sa position d'équilibre statique et sa vitesse $\mathbf{v}_0$ était dirigée vers le bas.

$$Rép.\quad x=v_0\sqrt{\frac{Q\,(c_1l^3+48\,EJ)}{48\,EJc_1g}}\,\sin\sqrt{\frac{48\,EJc_1g}{(c_1l^3+48\,EJ)\,Q}}\,t;$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(c_1l^3+48\,EJ)\,Q}{c_1\cdot48\,EJg}}\,.$$

32.44. Un poids Q est fixé entre deux ressorts verticaux de rigidités c_1 et c_2. L'extrémité supérieure du premier ressort est fixe. L'extrémité inférieure du second est reliée à l'extrémité libre d'une poutre dont l'autre extrémité est encastrée dans un mur. Calculer la longueur de la

poutre pour laquelle le poids oscille avec une période donnée T, sachant que le déplacement vertical de l'extrémité libre de la poutre encastrée sous l'action d'une force P appliquée à cette extrémité est $f=\frac{Pl^3}{3EJ}$, où EI est la rigidité donnée de la poutre en flexion. Ecrire l'équation du mouvement du poids si à l'instant initial il était suspendu aux extrémités des ressorts non déformés et abandonné sans vitesse initiale.

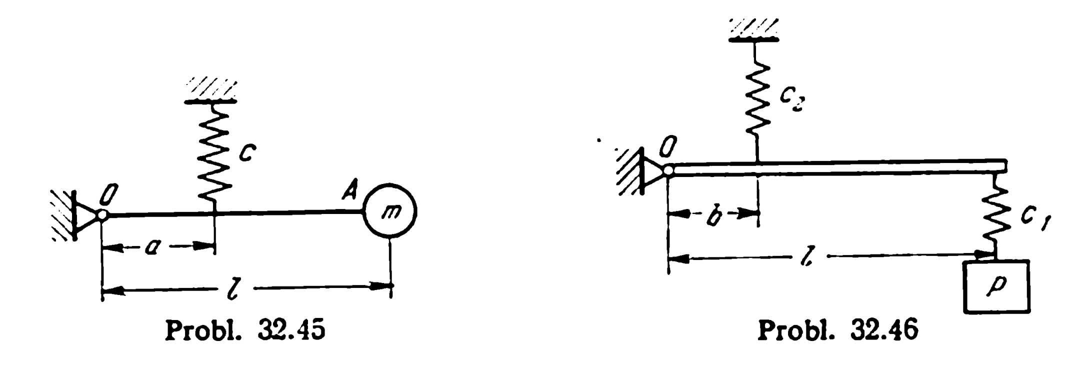
Rép. 1) $l=\sqrt[3]{\dfrac{3\,EJ\left(c_1+c_2-\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot\dfrac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot\dfrac{Q}{g}-c_1\right)}}$;

2) $x=-Q\dfrac{c_2 l^3+3EJ}{c_1 c_2 l^3+(c_1+c_2)\,3EJ}\cos\sqrt{\dfrac{[c_1 c_2 l^3+(c_1+c_2)3EJ]g}{(c_2 l^3+3EJ)Q}}\,t.$

32.45. Une barre non pesante OA de longueur l, à l'extrémité de laquelle on a fixé une masse m, peut tourner autour de l'axe O, un ressort de rigidité c étant fixé à une distance a de l'axe O.

Calculer la fréquence propre des oscillations du poids si dans sa position d'équilibre la barre OA est horizontale.

Rép. $k=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$ s^{-1}.



Probl. 32.45 Probl. 32.46

32.46. Un poids P est suspendu par un ressort de rigidité c_1 à l'extrémité d'une barre non pesante de longueur l pouvant tourner autour de l'axe O. Le ressort supportant la barre est fixé à une distance b du point O, sa rigidité étant c_2.

Déterminer la fréquence propre des oscillations du poids P.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot c_1 c_2}{P\left[c_2+\left(\dfrac{l}{b}\right)^2 c_1\right]}}$ s^{-1}.

32.47. Pour déterminer l'accélération de la pesanteur en un lieu donné de la sphère terrestre on effectue deux expériences. On suspend à l'extrémité d'un ressort un poids P_1 et on mesure son allongement statique l_1.

Ensuite on suspend un autre poids P_2 à l'extrémité de ce même ressort et on mesure de nouveau son allongement statique l_2. On répète les deux expériences en imprimant successivement à chacun de deux poids des oscillations libres, et on mesure leurs périodes T_1 et T_2. La seconde expérience est faite pour mettre en évidence l'effet de la masse propre du ressort; on suppose alors que cet effet est équivalent à l'addition d'une masse supplémentaire à la masse oscillante.

Trouver la formule calculant l'accélération de la pesanteur d'après ces données experimentales.

Rép. $g=\dfrac{4\pi^2(l_1-l_2)}{T_1^2-T_2^2}$.

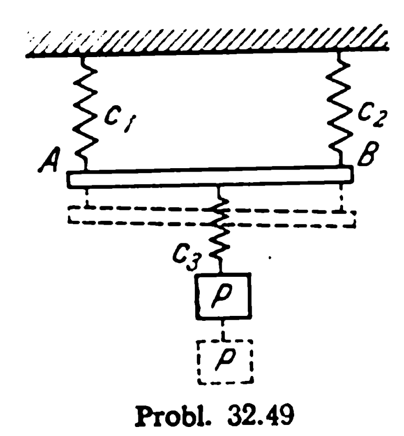
32.48. Un point M pesant 2 kgf se déplace sans frottement sur une corde horizontale d'un cercle vertical sous l'action de la force d'attraction F proportionnelle à la distance au centre O, le coefficient de proportionnalité étant 0,1 kgf/cm. La distance du centre du cercle à la corde est de 20 cm, le rayon de la circonférence de 40 cm. Déterminer la loi du mouvement du point si à l'instant initial il occupait la position extrême droite M_0 et si sa vitesse était nulle. Calculer la vitesse avec laquelle le point passe par le milieu de la corde.

Rép. $x=34{,}6\cos 7t$ cm; $\dot{x}=\pm 242$ cm/s.

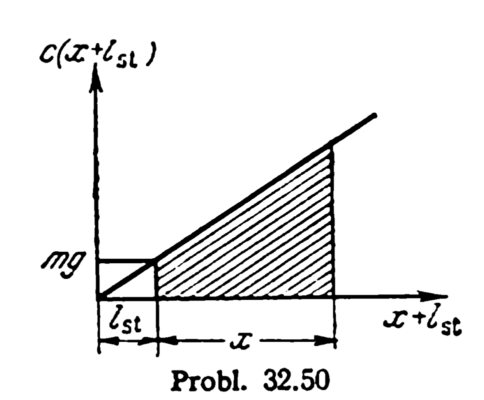
Probl. 32.48

32.49. Trois ressorts sont fixés à une barre non pesante AB. Deux d'entre eux de rigidités c_1 et c_2 supportent la barre et sont disposés à ses extrémités. Le troisième, de rigidité c_3, est fixé au milieu de la barre et porte un poids P. Déterminer la période propre des oscillations du poids.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot 4c_1\cdot c_2\cdot c_3}{P(4c_1\cdot c_2+c_1\cdot c_3+c_2\cdot c_3)}}\ \text{s}^{-1}$.



Probl. 32.49



Probl. 32.50

32.50. Un poids de 10 kgf attaché à un ressort de rigidité $c=2$ kgf/cm effectue des oscillations. Déterminer l'énergie mécanique totale du poids et du ressort en négligeant la masse du ressort; construire le graphique de

la force élastique en fonction du déplacement en y indiquant l'énergie potentielle du ressort. Prendre comme origine des coordonnées pour le calcul de l'énergie potentielle la position d'équilibre statique.

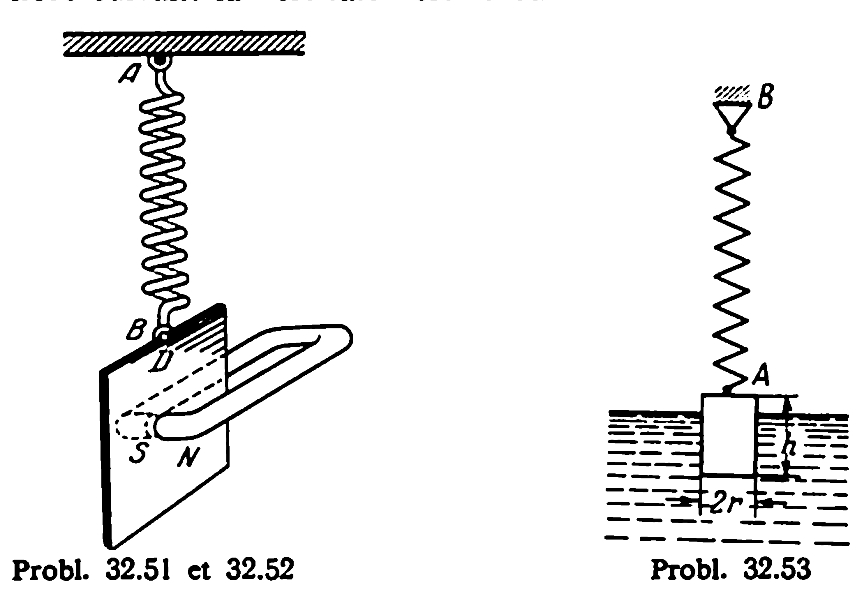
Rép. $W=\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\,cx^2$.

L'aire hachurée sur le graphique est égale à l'énergie potentielle du ressort.

b) Effet de la résistance sur des oscillations libres

32.51. Une plaque D pesant 100 gf et suspendue par un ressort AB au point fixe A se déplace entre les pôles d'un aimant. Par suite de courants de Foucault le mouvement est freiné par une force proportionnelle à la vitesse. La force de résistance au mouvement est égale à $kv\Phi^2$ dyn, où $k=0{,}000\,1$, v est la vitesse en cm/s et Φ le flux magnétique entre les pôles N et S. A l'instant initial la vitesse de la plaque est nulle et le ressort est non déformé; son allongement est de 1 cm sous l'action statique d'une force de 20 gf appliquée au point B. Déterminer le mouvement de la plaque pour le cas où $\Phi=1\,000\sqrt{5}$ unités CGS.

Rép. $x=-e^{-2,5t}$, $(5\cos 13{,}78t+0{,}907\sin 13{,}78t)$ cm, où x désigne la distance du centre de gravité de la plaque à sa position d'équilibre suivant la verticale vers le bas.



Probl. 32.51 et 32.52

Probl. 32.53

32.52. Déterminer le mouvement de la plaque D du problème précédent dans le cas où le flux magnétique $\Phi=10\,000$ unités CGS.

Rép. $x=-\frac{5}{48}e^{-98t}\,(49e^{96t}-1)$.

32.53. Un cylindre de poids P, de rayon r et de hauteur h est suspendu par un ressort AB au point fixe B; le cylindre est immergé dans l'eau. Dans la position d'équilibre le cylindre est immergé jusqu'à mi-hauteur. A l'instant initial le cylindre était immergé jusqu'au 2/3 de sa hauteur; puis sans

vitesse initiale il se met à se mouvoir verticalement. Déterminer le mouvement du cylindre par rapport à sa position d'équilibre si la rigidité du ressort est c. L'action de l'eau se ramène à la force d'Archimède, le poids spécifique de l'eau étant γ.

Rép. $x=\frac{1}{6}h\cos kt$, où $k^2=\frac{g}{P}\,(c+\pi\gamma r^2)$.

32.54. Déterminer dans le problème précédent le mouvement oscillatoire du cylindre sachant que la résistance de l'eau est proportionnnelle au premier degré de la vitesse et vaut αv.

Rép. Le mouvement du cylindre est oscillatoire si

$$\left(\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2>0.$$

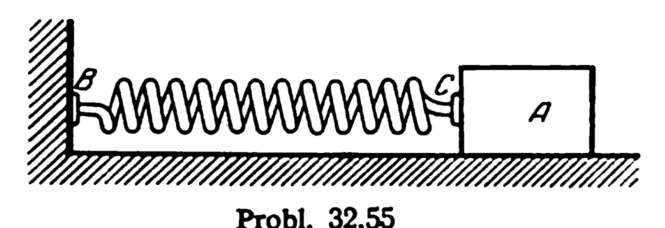
Alors

$$x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}\,e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right),$$

où

$$k^2=\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma,\quad n=\frac{\alpha}{2m},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n},\quad m=\frac{P}{g}.$$

32.55. Un corps A pesant 0,5 kgf, situé sur un plan horizontal rugueux, est attaché au point fixe B par un ressort dont l'axe BC est horizontal. Le coefficient de frottement du plan est égal à 0,2; le ressort est tel que pour



Probl. 32.55

l'allonger de 1 cm il faut une force de 0,25 kgf. Le corps A est écarté du point B de manière à allonger le ressort de 3 cm, puis est relâché sans vitesse initiale. Trouver: 1) le nombre de mouvements qu'effectue le corps A, 2) les amplitudes de ces mouvements, 3) la durée T de chacun.

Le corps s'arrête lorsque dans la position où sa vitesse est nulle la force élastique du ressort est égale ou inférieure à la force de frottement.

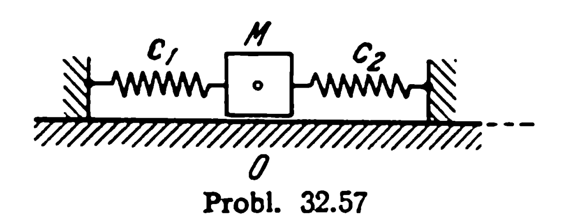
Rép. 1) 4 mouvements; 2) 5,2 cm, 3,6 cm, 2 cm, 0,4 cm; 3) $T=0{,}141$ s.

32.56. Un poids $Q=20$ kgf situé sur un plan incliné rugueux est attaché à un ressort non déformé. A l'instant initial on lui communique une vitesse $v_0=0{,}5$ m/s dirigée vers le bas. Le coefficient de frottement $f=0{,}08$, la rigidité du ressort $c=2$ kgf/cm. L'angle formé par le plan incliné avec l'horizontale $\alpha=45°$. Déterminer: 1) la période des oscillations, 2) le

nombre de mouvements qu'effectue le poids, 3) les amplitudes de ces mouvements.

Rép. 1) $T=0{,}628$ s; 2) 8 mouvements; 3) 7,68 cm, 6,56 cm, 5,44 cm, 4,32 cm, 3,2 cm, 2,08 cm, 0,96 cm, 0,16 cm.

32.57. Un poids $P=0{,}5$ kgf oscille sur un plan horizontal sous l'action de deux ressorts identiques de rigidité $c_1=c_2=0{,}125$ kgf/cm fixés au poids par l'une de leurs extrémités et à un support fixe par l'autre; les axes des ressorts sont sur une même droite horizontale. Les coefficients de frottement et d'adhérence sont respectivement $f=0{,}2$ et $f_0=0{,}25$.



Probl. 32.57

A l'instant initial le poids a été écarté vers la droite de sa position moyenne O à une distance $x_0=3$ cm et abandonné sans vitesse initiale. Trouver: 1) le domaine des positions d'équilibre possibles du poids, 2) les amplitudes des mouvements du poids, 3) le nombre de ces mouvements, 4) la durée de chacun d'eux, 5) la position du corps après les oscillations.

Rép. 1) $-0{,}5$ cm $< x < 0{,}5$ cm; 2) 5,2 cm, 3,6 cm, 2 cm, 0,4 cm; 3) 4 mouvements; 4) $T=0{,}141$ s; 5) $x=-0{,}2$ cm.

32.58. Un corps de masse m suspendu à un ressort de rigidité c effectue des oscillations amorties sous l'action de la force de résistance R proportionnelle au premier degré de la vitesse ($R=\alpha v$).

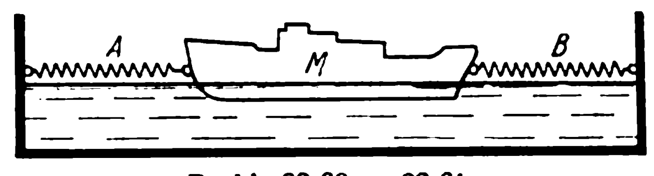
Déterminer le rapport des périodes des oscillations amorties T et non amorties T_0, si le rapport $n/k=0{,}1$ ($k^2=c/m$, $n=\alpha/2m$).

Rép. $T\approx 1{,}005T_0$.

32.59. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, le nombre de cycles nécessaire pour que l'amplitude soit 100 fois moindre.

Rép. 7,5 cycles.

32.60. Pour déterminer la résistance de l'eau à l'avancement du modèle d'un bateau M pour de très petites vitesses, on a mis le modèle dans un récipient d'eau et on a attaché la proue et la poupe à ce récipient par deux ressorts identiques A et B dont les tensions sont proportionnelles aux allongements. Les résultats des observations ont montré que les déplacements



Probl. 32.60 et 32.61

du modèle à partir de sa position d'équilibre décroissent après chaque mouvement et forment une progression géométrique de raison 0,9, la durée de chaque mouvement étant $T=0{,}5$ s.

Déterminer en grammes-force la résistance R de l'eau rapportée à chaque gramme du poids du modèle sachant que sa vittsse est de 1 cm/s et que la résistance de l'eau est proportionnelle au premier degré de la vitesse.

Rép. $R=0{,}000\,43$ gf.

32.61. Trouver, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du modèle, si à l'instant initial le ressort A était tendu et le ressort B comprimé de $\Delta l=4$ cm, le modèle étant ensuite abandonné sans vitesse initiale.

Rép. $x=e^{-0{,}21t}\,(4\cos 6{,}28t+0{,}134\sin 6{,}28t)$.

32.62. Pour déterminer la viscosité d'un liquide, Coulomb utilisa le procédé suivant: ayant fixé une plaque mince A à un ressort, il la fit osciller d'abord dans l'air, puis dans le liquide dont il fallait déterminer la viscosité, et mesura la durée T_1 d'un mouvement dans le premier cas et T_2 dans le second. La force de frottement entre la plaque et le liquide peut être exprimée par la formule $2Skv$, où $2S$ est l'aire de la plaque, v sa vitesse, k le coefficient de viscosité. Calculer le coefficient k d'après les grandeurs T_1 et T_2 déterminées expérimentalement sachant que le poids de la plaque est P. Négliger le frottement entre la plaque et l'air.

Rép. $k=\frac{\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}$.

Probl. 32.62

32.63. Un corps pesant 5 kgf est suspendu à un ressort de rigidité $c=2$ kgf/cm. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse. Après quatre oscillations l'amplitude a diminué de 12 fois.

Déterminer la période des oscillations et le décrément logarithmique de l'amortissement.

Rép. $T=0{,}319$ s; $\frac{nT}{2}=0{,}311$.

32.64. Trouver, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du corps, si on l'a suspendu à l'extrémité d'un ressort déformé et lâché sans vitesse initiale.

Rép. $x=e^{-1{,}94t}\,(-2{,}5\cos 19{,}2t-0{,}252\sin 19{,}2t)$.

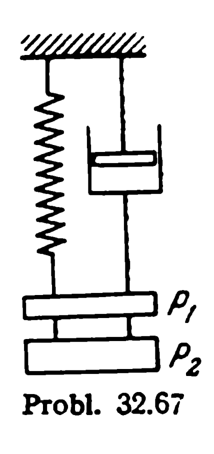
32.65. Un corps pesant 5,88 kgf suspendu à un ressort oscille, en l'absence de résistance, avec une période $T=0{,}4\pi$ s; lorsqu'il existe une résistance

proportionnelle au premier degré de la vitesse, ce corps oscille avec une période $T_1 = 0{,}5\pi$ s. Trouver la force de résistance k pour une vitesse de 1 cm/s et déterminer le mouvement, si à l'instant initial le ressort a été tendu de 4 cm à partir de sa position d'équilibre et le corps abandonné à lui-même.

Rép. $k = 0{,}036$; $x = 5e^{-3t} \sin\left(4t + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{4}{3}\right)$.

32.66. Un corps pesant 1,96 kgf est suspendu à un ressort qui s'allonge de 20 cm sous l'action d'une force de 1 kgf. Pendant son mouvement il rencontre une résistance proportionnelle au premier degré de la vitesse, égale à 0,02 kgf pour une vitesse de 1 cm/s. A l'instant initial le ressort est allongé de 5 cm par rapport à sa position d'équilibre, le corps se met ensuite en mouvement sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement du corps.

Rép. $x = 5e^{-5t}(5t+1)$ cm.



Probl. 32.67

32.67. Deux poids $P_1 = 2$ kgf et $P_2 = 3$ kgf sont suspendus dans la position d'équilibre statique à un ressort de rigidité $c = 0{,}4$ kgf/cm. Un damper à huile crée une résistance proportionnelle au premier degré de la vitesse, $R = \alpha v$, où $\alpha = 0{,}1$ kgf s/cm. On enlève le poids P_2. Trouver l'équation du mouvement résultant du poids P_1.

Rép. $x = 8{,}34e^{-4{,}5t} - 0{,}84e^{-44{,}5t}$.

32.68. L'allongement statique d'un ressort sous l'action d'un poids P est f. Une force de résistance proportionnelle à la vitesse agit sur le poids oscillant.

Déterminer la plus petite valeur du coefficient de résistance α pour laquelle le mouvement est apériodique. Trouver la période des oscillations amorties si le coefficient de résistance est inférieur à la valeur trouvée.

Rép. $\alpha = \frac{2P}{\sqrt{gf}}$. Pour $\alpha < \frac{2P}{\sqrt{gf}}$ le mouvement est oscillatoire de période $T = \sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$.

32.69. Un poids de 100 gf suspendu à l'extrémité d'un ressort de rigidité $c = 20$ gf/cm se déplace dans un liquide. La force de résistance au mouvement est proportionnelle au premier degré de la vitesse: $R = \alpha v$, où $\alpha = 3{,}5$ gf s/cm.

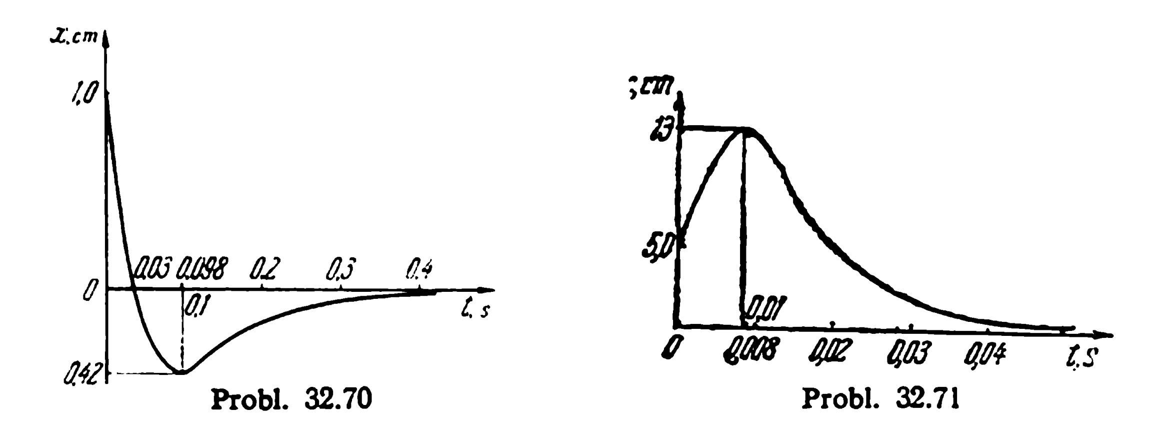
Trouver l'équation du mouvement du poids et construire le graphique du déplacement en fonction du temps, si à l'instant initial le poids est dévié de 1 cm de sa position d'équilibre et relâché sans vitesse initiale.

Rép. $x = e^{-17{,}15t}(1{,}36e^{9{,}95t} - 0{,}36e^{-9{,}95t})$ cm.

32.70. Un poids de 100 gf suspendu à l'extrémité d'un ressort de rigidité $c = 20$ gf/cm se déplace dans un liquide. La force de résistance au mouvement est proportionnelle au premier degré de la vitesse: $R = \alpha v$, où $\alpha = 3{,}5$ gf s/cm.

Trouver l'équation du mouvement du poids et construire le graphique du déplacement en fonction du temps, si à l'instant initial on l'a dévié de 1 cm de sa position d'équilibre statique et on lui a communiqué une vitesse de 50 cm/s dans le sens contraire à celui du déplacement.

Rép. $x = e^{-17{,}15t}(-1{,}15e^{9{,}95t} + 2{,}15e^{-9{,}95t})$ cm.



Probl. 32.70 Probl. 32.71

32.71. Trouver, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du poids et construire le graphique du déplacement en fonction du temps, si à l'instant initial on a dévié le poids de 5 cm de sa position d'équilibre et on lui a communiqué une vitesse de 10 cm/s dans le même sens.

Rép. $x = e^{-17{,}15t}(7{,}30e^{9{,}95t} - 2{,}30e^{-9{,}95t})$ cm.

32.72. Lors des oscillations d'un poids de 20 kgf suspendu à un ressort, on a remarqué qu'après 10 cycles la déviation maximale a diminué de deux fois. Le poids effectue 10 cycles en 9 s. Calculer les valeurs du coefficient de résistance α (pour une résistance du milieu proportionnelle au premier degré de la vitesse) et de la rigidité c.

Rép. $\alpha = 0{,}003\,14$ kgf cm^{-1} s; $c = 0{,}99$ kgf cm^{-1}.

c) Osillations forcées

32.73. Ecrire l'équation du mouvement rectiligne d'un point de masse m, soumis à l'action de la force de rappel $Q = -cx$ et de la force constante F_0. A l'instant initial $t = 0$, $x_0 = 0$ et $\dot{x}_0 = 0$. Calculer la période des oscillations.

Rép. $x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, où $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $T = 2\pi/k$.

32.74. Ecrire l'équation du mouvement rectiligne d'un point de masse m, soumis à l'action de la force de rappel $Q = -cx$ et de la force $F = \alpha t$. A l'instant initial le point est dans la position d'équilibre statique, sa vitesse étant nulle.

Rép. $x = \frac{a}{mk^3}(kt - \sin kt)$, où $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

32.75. Ecrire l'équation du mouvement rectiligne d'un point de poids P, soumis à l'action de la force de rappel $Q=-cx$ et de la force $F=F_0e^{-\alpha t}$. A l'instant initial le point est au repos dans la position d'équilibre.

Rép. $x=\frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}\cos kt+\frac{\alpha}{k}\sin kt\right)$, où $k=\sqrt{\frac{cg}{P}}$.

32.76. Une barre magnétique de poids de 100 gf est suspendue à un ressort de rigidité $c=20$ gf/cm. L'extrémité inférieure de l'aimant passe à travers un solénoïde parcouru par un courant alternatif d'intensité $i=$ $=20\sin 8\pi t$ A. Le courant est branché à l'instant $t=0$ et la barre, qui était jusque-là au repos suspendue au ressort, est attirée vers l'intérieur du solénoïde. La force d'interaction entre l'aimant et le solénoïde est donnée par la formule $F=16\pi i$ dyn. Déterminer les oscillations forcées de l'aimant.

Rép. $x=-0{,}023\sin 8\pi t$ cm.

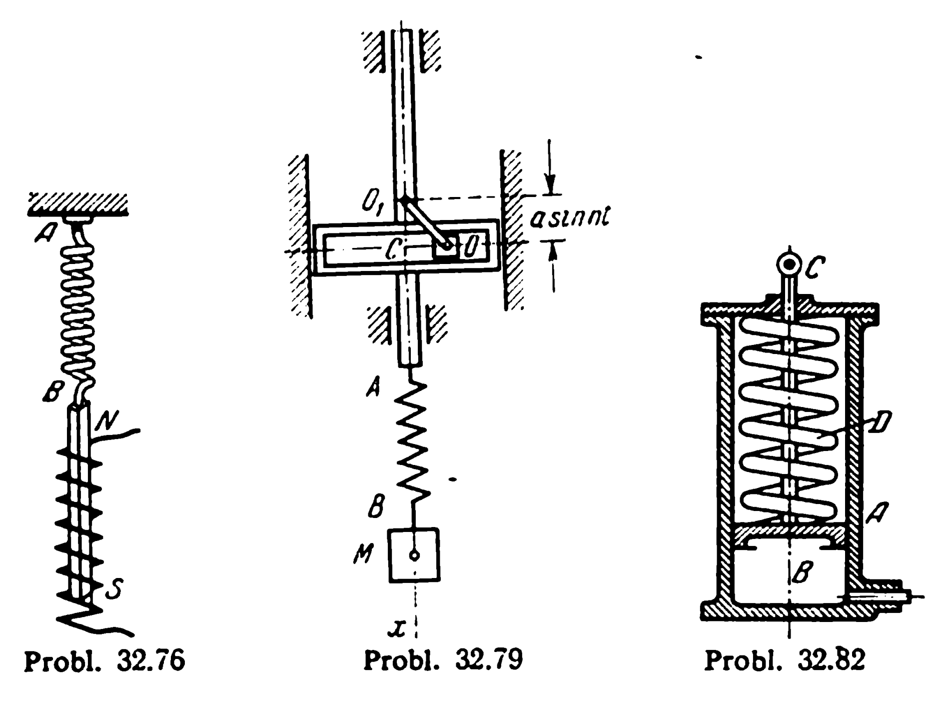
32.77. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement de la barre magnétique sachant qu'on l'a suspendue à l'extrémité d'un ressort non déformé et abandonnée sans vitesse initiale.

Rép. $x=(-5\cos 14t+0{,}041\sin 14t-0{,}023\sin 8\pi t)$ cm.

32.78. Ecrire, dans les conditions du problème 32.76, l'équation du mouvement de la barre magnétique sachant que dans la position d'équilibre statique on lui a communiqué une vitesse initiale $v_0=5$ cm/s.

Rép. $x=(0{,}4\sin 14t-0{,}023\sin 8\pi t)$ cm.

32.79. Un poids M est suspendu à un ressort AB dont l'extrémité supérieure effectue, suivant une droite verticale, des oscillations harmoniques d'amplitude a et de fréquence n: $O_1C=a\sin nt$ cm. Déterminer les



Probl. 32.76 Probl. 32.79 Probl. 32.82

oscillations forcées du poids M pour les données suivantes: le poids pèse 400 gf, le ressort s'allonge de 1 cm sous l'action d'une force de 40 gf, $a=2$ cm, $n=7$ s^{-1}.

Rép. $x=4\sin 7t$ cm.

32.80. Déterminer le mouvement du poids M (cf. problème 32.79) suspendu au ressort AB dont l'extrémité supérieure A effectue suivant la verticale des oscillations harmoniques d'amplitude a et de pulsation k; l'allongement statique du ressort sous l'action du poids M est δ. A l'instant initial le point A occupe sa position moyenne, et le poids M est au repos; la position initiale du poids est prise comme origine des coordonnées, l'axe Ox est dirigé verticalement vers le bas.

Rép. $x=\frac{ag}{k^2\delta-g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\sin kt\right]$ lorsque $k\gtrless\sqrt{\frac{g}{\delta}}$;

$$x=\frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos kt\right] \text{ lorsque } k=\sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

32.81. Le déplacement vertical statique des ressorts d'un wagon chargé $\Delta l_{st}=5$ cm. Déterminer la vitesse critique du mouvement pour laquelle le wagon commence à «galoper», si aux joints des rails le wagon reçoit des secousses provoquant des oscillations forcées du wagon sur les ressorts; la longueur des rails $L=12$ m.

Rép. $v=96$ km/h.

32.82. L'indicateur d'une machine à vapeur est composé d'un cylindre A dans lequel se déplace un piston B qui s'appuie contre un ressort D; le piston est solidaire d'une barre BC à laquelle est fixée la goupille enregistreuse C. Supposant que la pression p de la vapeur sur le piston B, évaluée en kgf/cm², varie selon la formule $p=4+3\sin\frac{2\pi}{T}t$, où T est le temps mis par l'arbre pour accomplir un tour, déterminer l'amplitude des oscillations forcées de la goupille C, si l'arbre effectue 3 tr/s, pour les données suivantes: l'aire du piston de l'indicateur $\sigma=4$ cm², le poids de la partie mobile de l'indicateur $Q=1$ kgf; le ressort se comprime de 1 cm par une force de 3 kgf.

Rép. $a=4{,}54$ cm.

32.83. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement de la goupille C, si à l'instant initial le système était au repos dans la position d'équilibre statique.

Rép. $x=(-1{,}57\sin 54{,}3t+4{,}54\sin 6\pi t)$ cm.

32.84. Un poids $Q=200$ gf suspendu à un ressort de rigidité $c=1$ kgf/cm est soumis à l'action de la force $S=H\sin pt$, où $H=2{,}0$ kgf, $p=50$ s^{-1}. A l'instant initial $x_0=2$ cm, $\dot{x}_0=10$ cm/s. La position d'équilibre statique est prise comme origine des coordonnées.

Ecrire l'équation du mouvement du poids.

Rép. $x=(2\cos 70t-2{,}77\sin 70t+4{,}08\sin 50t)$ cm.

32.85. Un poids $Q=200$ gf suspendu à un ressort de rigidité $c=1$ kgf/cm est soumis à l'action de la force $S=H\sin pt$, où $H=2$ kgf, $p=70$ s^{-1}. A l'instant initial $x_0=2$ cm, $\dot{x}_0=10$ cm/s. La position d'équilibre statique est prise comme origine des coordonnées.

Ecrire l'équation du mouvement du poids.

Rép. $x=(2\cos 70t)+1{,}14\sin 70t-70t\cos 70t)$ cm.

d) Effet de la résistance sur les oscillations forcées

32.86. Une barre magnétique de 50 gf passant à travers un solénoïde et une plaque de cuivre de 50 gf située entre les pôles d'un aimant sont suspendues à un ressort de rigidité $c=20$ gf/cm. Le solénoïde est parcouru par un courant $i=20\sin 8\pi t$ A qui engendre une force $F=16\pi i$ dyn appliquée à la barre magnétique. La force de freinage, due aux courants de Foucault dans la plaque de cuivre, est égale à $kv\Phi^2$, où $k=10^{-4}$, $\Phi=1\,000\sqrt{5}$ unités CGS et v est la vitesse de la plaque. Déterminer les oscillations forcées de la plaque.



Probl. 32.86 et 32.87

Rép. $x=0{,}022\sin(8\pi t-0{,}91\pi)$ cm.

32.87. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement de la plaque si on l'a suspendue avec la barre magnétiqué à l'extrémité d'un ressort non déformé et leur a communiqué une vitesse initiale $v_0=5$ cm/s dirigée vers le bas.

Rép. $x=e^{-2{,}5t}(-4{,}99\cos 13{,}75t-0{,}56\sin 13{,}75t)+$
$+0{,}022\sin(8\pi t-0{,}91\pi)$ cm.

32.88. Un point matériel de poids $Q=2$ kgf est suspendu à un ressort de rigidité $c=4$ kgf/cm. Le point est soumis à l'action d'une force perturbatrice $S=12\sin(pt+\delta)$ kgf et d'une force de résistance au mouvement proportionnelle au premier degré de la vitesse: $R=0{,}5\sqrt{mc}\,\dot{x}$ kgf, où $[\dot{x}]=$ $=$ cm/s. Calculer la valeur maximale A_{max} de l'amplitude des oscillations forcées. Pour quelle fréquence p l'amplitude des oscillations forcées atteint-elle sa valeur maximale?

Rép. $A_{max}=6{,}21$ cm; $p=41{,}5$ s^{-1}.

32.89. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, l'équation du mouvement du point, si à l'instant initial sa position et sa vitesse étaient $x_0=2$ cm, $\dot{x}_0=3$ cm/s. La fréquence de la force perturbatrice $p=30$ s^{-1}, sa phase initiale $\delta=0°$; la position d'équilibre statique étant prise comme origine des coordonnées.

Rép. $x=e^{-11{,}06t}(4{,}49\cos 42{,}8t-$
$-1{,}563\sin 42{,}8t)+4{,}7\sin(30t-0{,}178\pi)$ cm.

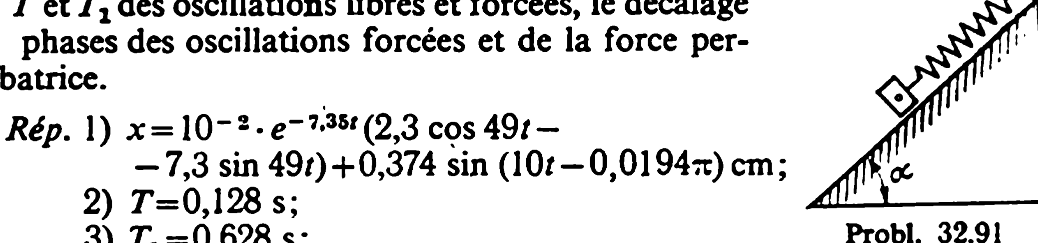
32.90. Un point matériel de poids $p=3$ gf est suspendu à un ressort de rigidité $c=12$ gf/cm. Le point est soumis à l'action d'une force perturba-

trice $F=H \sin(62{,}6t+\beta)$ gf et d'une force de résistance proportionnelle au premier degré de la vitesse: $R=\alpha v$ gf.

De combien va décroître l'amplitude des oscillations forcées du point si la résistance croît de trois fois?

Rép. L'amplitude des oscillations forcées va décroître de trois fois.

32.91. Un corps pesant 2 kgf, relié par l'intermédiaire d'un ressort de rigidité $c=5$ kgf/cm à un point fixe A se déplace sur un plan incliné lisse formant un angle α avec l'horizontale sous l'action de la force perturbatrice $S=1{,}8 \sin 10t$ kgf et d'une force de résistance proportionnelle à la vitesse: $\mathbf{R}=-0{,}03\mathbf{v}$ kgf, où $[v]=$ cm/s. A l'instant initial le corps était à l'arrêt dans la position d'équilibre statique. Trouver l'équation du mouvement du corps, les périodes T et T_1 des oscillations libres et forcées, le décalage des phases des oscillations forcées et de la force perturbatrice.



Probl. 32.91

Rép. 1) $x=10^{-2}\cdot e^{-7{,}35t}(2{,}3 \cos 49t - 7{,}3 \sin 49t)+0{,}374 \sin(10t-0{,}0194\pi)$ cm;
2) $T=0{,}128$ s;
3) $T_1=0{,}628$ s;
4) $\varepsilon=00194\pi$ rd.

32.92. Un corps de poids $Q=392$ gf fixé à un ressort de rigidité $c=4$ kgf/cm est soumis à une force $S=H \sin pt$ kgf, où $H=4$ kgf, $p=50$ s^{-1}, et à une force de résistance $R=\alpha v$, où $\alpha=25$ gf s/cm, v étant la vitesse du corps. A l'instant initial le corps est au repos dans la position d'équilibre statique. Ecrire l'équation du mouvement du corps et déterminer la valeur de la pulsation p pour laquelle l'amplitude des oscillations forcées est maximale.

Rép. $x=0{,}647e^{-31{,}25t}\sin(95t+0{,}74\pi)+1{,}23 \sin(50t-0{,}126\pi)$,

$$\text{où } a=\frac{ph}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sqrt{4n^2+\frac{(2n^2+p^2-k^2)^2}{k^2-n^2}}=0{,}647 \text{ cm},$$

$$\beta=\text{arc tg}\,\frac{2n\sqrt{k^2-n^2}}{2n^2+p^2-k^2}=-1{,}07,\quad A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=1{,}23,$$

$$\varepsilon=\text{arc tg}\,\frac{2np}{k^2-p^2}=0{,}416,\quad n=31{,}25 \text{ s}^{-1},\quad \sqrt{k^2-n^2}=95 \text{ s}^{-1}.$$

L'amplitude est maximale lorsque la pulsation de la force perturbatrice $p=\sqrt{k^2-2n^2}=89{,}8$ s^{-1}.

32.93. Un corps de poids Q gf fixé à un ressort de rigidité c gf/cm est soumis à l'action d'une force perturbatrice $S=H \sin pt$ gf et d'une force de résistance $R=\alpha v$ gf, où v est la vitesse du corps. A l'instant initial le corps

est dans la position d'équilibre statique et n'a pas de vitesse initiale. Ecrire l'équation du mouvement du corps si $c > \alpha^2 g/4Q$.

Rép. $$x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left(2n \cos \sqrt{k^2-n^2}\, t + \right.$$

$$\left. + \frac{2n^2+p^2-k^2}{\sqrt{k^2-n^2}} \sin \sqrt{k^2-n^2\, t}\right) +$$

$$+ \frac{h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left[(k^2-p^2)\sin pt - 2np\cos pt\right], \quad \text{où}$$

$$h = \frac{Hg}{Q}, \quad k^2 = \frac{cg}{Q}, \quad n = \frac{\alpha g}{2Q}.$$

32.94. Un corps de 6 kgf plongé dans un liquide est suspendu à un ressort de rigidité $c = 18$ kgf/cm et soumis à l'action de la force perturbatrice $P_0 \sin \omega t$. La résistance du liquide est proportionnelle à la vitesse. Quel doit être le coefficient de résistance α du liquide visqueux pour que l'amplitude maximale des oscillations forcées soit égale au triple de la valeur du déplacement statique du ressort? Quel est le rapport de la pulsation des oscillations forcées à celle des oscillations libres? Trouver le décalage des phases des oscillations forcées et de la force perturbatrice.

Rép. $\alpha = 0{,}115$ kgf cm^{-1} s; $z = 0{,}97$; $\varepsilon = 79°48'$.

32.95. Un corps de poids $Q = 100$ gf fixé à un ressort de rigidité $c = 5$ kgf/cm est soumis à l'action d'une force $S = H \sin pt$, où $H = 10$ kgf, $p = 100$ s^{-1}, et d'une force de résistance $R = \beta v$, où $\beta = 50$ gf s/cm.

Ecrire l'équation des oscillations forcées et déterminer la valeur de la fréquence p pour laquelle l'amplitude des oscillations forcées est maximale.

Rép. 1) $x_2 = 0{,}98 \sin 100t - 1{,}22 \cos 100t$;

2) il n'y a pas d'amplitude maximale car $n > k/\sqrt{2}$.

32.96. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, le décalage des phases des oscillations forcées et de la force perturbatrice.

Rép. $\varepsilon = \text{arc tg } 1{,}26 = 51°40'$.

32.97. Un poids de 200 gf est suspendu à un ressort de rigidité $c = 20$ gf/cm. Ce poids est soumis à une force perturbatrice gf et à une force de résistance $R = 50v$ gf.

$$S = 0{,}2 \sin 14t.$$

Déterminer le décalage des phases des oscillations forcées et de la force perturbatrice.

Rép. $\varepsilon = 91°38'$.

32.98. Quelle doit être, dans les conditions du problème précédent, la rigidité c_1 d'un nouveau ressort remplaçant l'ancien pour que le décalage des phases des oscillations forcées et de la force perturbatrice soit $\pi/2$.

Rép. $c_1 = 40$ gf/cm.

32.99. Pour réduire l'action de la force perturbatrice $F=F_0 \sin(pt+\delta)$ sur un corps de masse m, on installe un amortisseur à ressort avec un damper hydraulique. La rigidité du ressort est c. Supposant la résistance proportionnelle au premier degré de la vitesse ($F_{rés}=\alpha v$) calculer la pression dynamique maximale du système entier sur le fondement lors des oscillations stationnaires.

Rép. $N_{max}=F_0 \sqrt{\dfrac{k^4+4n^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$,

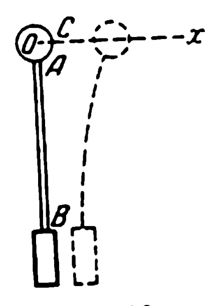
où $k^2=\dfrac{c}{m}$, $n=\dfrac{\alpha}{2m}$.

Probl. 32.99

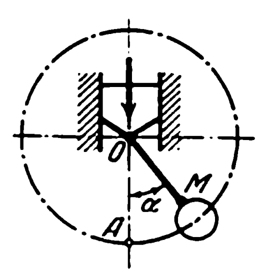
§ 33. Mouvement relatif

33.1. Un poids C pesant 2,5 kgf est fixé à l'extrémité A d'une barre élastique verticale AB. Ecarté de sa position d'équilibre le poids C effectue des oscillations harmoniques sous l'effet d'une force proportionnelle à la distance de la position d'équilibre. Pour dévier l'extrémité A de la barre AB de 1 cm il faut appliquer une force de 0,1 kgf. Trouver l'amplitude des oscillations forcées du poids C dans le cas où le point de fixation de la barre B effectue des oscillations harmoniques d'une amplitude de 1 mm et d'une période de 1,1 s suivant l'horizontale.

Rép. 5,9 mm.



Probl. 33.1



Probl. 33.3

33.2. Le point de suspension d'un pendule mathématique de longueur l est animé d'un mouvement uniformément accéléré suivant la verticale. Calculer la période T des petites oscillations du pendule dans les deux cas: 1) lorsque l'accélération du point de suspension est dirigée vers le haut, sa valeur p étant arbitraire; 2) lorsque cette accélération est dirigée vers le bas et sa valeur $p<g$.

Rép. 1) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{p+g}}$; 2) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-p}}$.

33.3. Un pendule mathématique OM de longueur l est écarté à l'instant initial de sa position d'équilibre OA d'un certain angle α, sa vitesse étant nulle; la vitesse de son point de suspension en cet instant est également nulle. Il descend ensuite avec une accélération constante $p \geqslant g$. Calculer la

longueur s de l'arc de circonférence décrit par le point M dans son mouvement relatif autour du point O.

Rép. 1) Pour $p=g$, $s=0$; 2) pour $p>g$, $s=2l(\pi-\alpha)$.

33.4. Un train roule du sud au nord à la vitesse de 15 m/s sur des rails posés suivant un méridien. Le poids du train est de 2 000 t.

1) Déterminer la pression latérale qu'exerce le train sur les rails s'il coupe à l'instant considéré la latitude nord de 60°. 2) Déterminer la pression latérale qu'exerce le train sur les rails s'il coupe ce même lieu en allant du nord au sud.

Rép. 1) 384 kgf sur le rail droit est;
2) 384 kgf sur le rail droit ouest.

33.5. Dans l'hémisphère nord, un point matériel tombe librement sur la Terre d'une altitude de 500 m. Tenant compte de la rotation de la Terre autour de son axe et négligeant la résistance de l'air, calculer la déviation du point vers l'est dans sa chute libre. La latitude du lieu est de 60°.

Rép. 12 cm.

33.6. Un pendule effectue de petites oscillations harmoniques dans un wagon se déplaçant sur une voie horizontale rectiligne. Sa position moyenne est déviée le la verticale sous un angle de 6°.

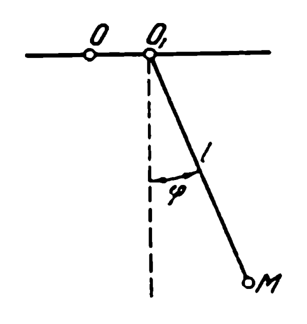
1) Déterminer l'accélération w du wagon.

2) Calculer la différence des périodes des oscillations du pendule: T dans le cas où le wagon est à l'arrêt et T_1 dans le cas considéré.

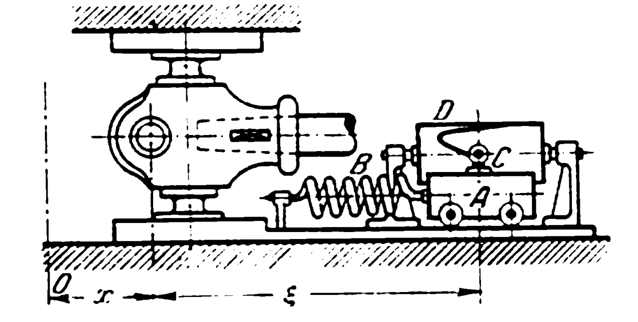
Rép. 1) $w=103$ cm/s²; 2) $T-T_1=0{,}0028\,T$.

33.7. Le point de suspension O_1 d'un pendule de longueur l effectue des oscillations harmoniques horizontales autour du point fixe O; $OO_1=a\sin pt$. Déterminer les petites oscillations du pendule sachant qu'à l'instant $t=0$ il était au repos.

Rép. $\varphi=\frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}\left(\sin pt-\frac{p}{k}\sin kt\right)$, $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$.



Probl. 33.7



Probl. 33.8

33.8. Pour mesurer les accélérations du piston d'un moteur à combustion interne on utilise un instrument composé d'un chariot mobile A et d'un tambour D tournant uniformément, solidaire de la tête du piston.

Le poids du chariot est Q et grâce à ses guides spéciaux, il effectue un mouvement de translation pendant lequel l'extrémité du crayon C fixé au chariot décrit une droite parallèle à l'axe de la tige. Le chariot A est relié à la tête du piston par un ressort B de rigidité c. Un mécanisme d'horlogerie fait tourner le tambour avec une vitesse angulaire ω, le rayon du tambour est r. Ecrire l'équation de la courbe décrite par le crayon sur la bande du tambour, si le mouvement de la tête du piston par rapport à ses guides est décrit par l'équation $x=a+l\cos\Omega t$, où a est une constante arbitraire qui dépend du choix de l'origine du système fixe de coordonnées, l la course du piston, Ω la vitesse angulaire du volant du moteur.

Rép. $\xi=A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t+B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t+\frac{Ql\Omega^2}{cg-Q\Omega^2}\cos\Omega t,$

$\eta=r\omega t;$

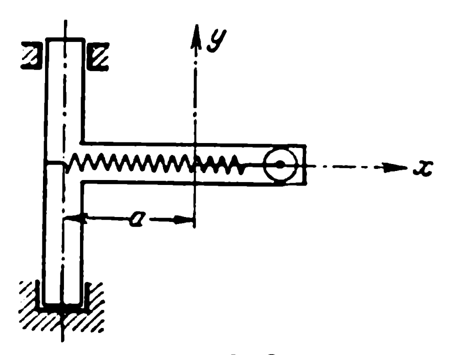
A et B sont des constantes définies par les conditions initiales.

33.9. Une bille de masse m, fixée à l'extrémité d'un ressort horizontal de rigidité c, est en équilibre dans un tube à une distance a de l'axe vertical. Déterminer le mouvement relatif de la bille si le tube, formant avec l'axe un angle droit, se met à tourner autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω.

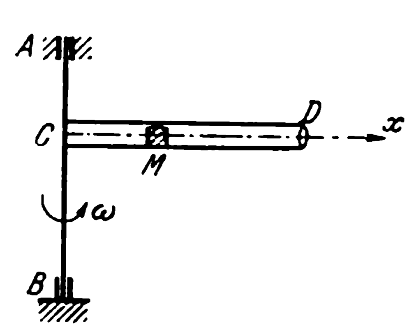
Rép. Dans le système de coordonnées dont l'origine coïncide avec le point d'équilibre de la bille:

1) $x=2\frac{\omega^2 a}{k^2-\omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t$ pour $k=\sqrt{\frac{c}{m}}>\omega$;

2) $x=\frac{\omega^2 a}{\omega^2-k^2}(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2-k^2}\,t-1)$ pour $k=\sqrt{\frac{c}{m}}<\omega$.



Probl. 33.9



Probl. 33.10

33.10. Un tube horizontal CD tourne uniformément autour de l'axe vertical AB avec la vitesse angulaire ω. A l'intérieur du tube se trouve un corps M. Calculer la vitesse v du corps par rapport au tube à l'instant où il quitte le tube, si à l'instant initial $v=0$, $x=x_0$; la longueur du tube est L. Négliger le frottement.

Rép. $v=\sqrt{L^2-x_0^2}\,\omega$.

33.11. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, le temps mis par le corps pour parcourir le tube.

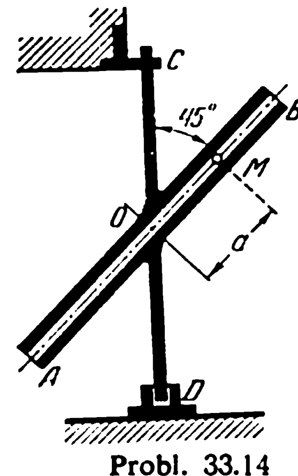
Rép. $T=\frac{1}{\omega}\ \mathrm{Log}\ \frac{L+\sqrt{L^2-x_0^2}}{x_0}$.

33.12. Ecrire, dans les conditions du problème 33.10, l'équation différentielle du mouvement du corps dans le tube si le coefficient de frottement entre la bille et le tube est f.

Rép. $\ddot{x}=\omega^2 x\pm f\sqrt{g^2+4\omega^2\dot{x}^2}$, le signe supérieur correspondant à $\dot{x}<0$, le signe inférieur à $\dot{x}>0$.

33.13. Un anneau se déplace suivant une barre lisse AB tournant uniformément dans le plan horizontal autour de l'axe vertical passant par l'extrémité A à la vitesse angulaire de 1 tr/s. La longueur de la barre est de 1 m; à l'instant $t=0$ l'anneau était à 60 cm de l'extrémité A et sa vitesse était nulle. Déterminer l'instant t_1 où l'anneau quitte la barre.

Rép. $t_1=\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{Log}\ 3=0{,}175$ s.



Probl. 33.14

33.14. Un tube AB tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical CD et forme avec celui-ci un angle constant de 45°. A l'intérieur du tube se trouve une bille pesante M. Déterminer le mouvement de cette bille par rapport au tube, si sa vitesse initiale est nulle, sa distance initiale au point O étant a. Négliger le frottement.

Rép. $OM=\frac{1}{2}\left(a-\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{+0{,}5\omega t\sqrt{2}}+e^{-0{,}5\omega t\sqrt{2}}\right)+\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

33.15. Quelle est la variation de l'accélération de la pesanteur en fonction de la latitude du lieu φ par suite de la rotation de la Terre autour de son axe. Le rayon de la Terre $R=6\,370$ km.

Rép. Si l'on néglige le terme contenant ω^4 par suite de sa petitesse, on obtient alors:

$$g_1=g\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{289}\right),$$

où g est l'accélération de la pesanteur au pôle, φ la latitude du lieu.

33.16. De combien de fois faut-il augmenter la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe pour qu'un point pesant situé sur la surface de la Terre à l'équateur soit impondérable? Le rayon de la Terre $R=6\,370$ km.

Rép. De 17 fois.

33.17. Un obus vole suivant une trajectoire tendue (c'est-à-dire suivant une trajectoire considérée, d'une manière approchée, comme une

droite horizontale). La vitesse horizontale de l'obus $v_0 = 900$ m/s. L'obus doit frapper un but situé à 18 km du lieu du tir. Déterminer la déviation de l'obus par raport à ce but par suite de la rotation de la Terre. Négliger la résistance de l'air. Le tir est effectué à la latitude nord $\lambda = 60°$.

Rép. L'obus dévie à droite (si on le regarde d'en haut perpendiculairement à la vitesse) d'une distance $s = \omega v_0 t^2 \sin \lambda = 22{,}7$ m, indépendamment de la direction du tir.

33.18. Un pendule suspendu par un long fil reçoit une vitesse initiale dans le plan nord-sud. Supposant les déviations du pendule petites par rapport à la longueur du fil et tenant compte de la rotation de la Terre autour de son axe, trouver après combien de temps le plan d'oscillations du pendule se confond avec le plan ouest-est.

Le pendule est situé à la latitude nord 60°.

Rép. $T = 13{,}86\,(0{,}5 + k)$ heures, où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

CHAPITRE X

DYNAMIQUE DU SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

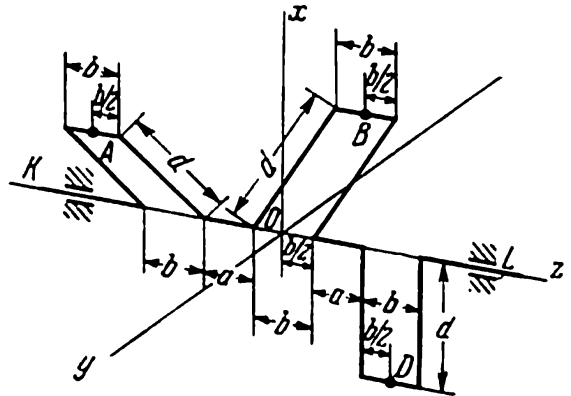
§ 34. Géométrie des masses: centre des masses du système matériel, moments d'inertie des corps solides

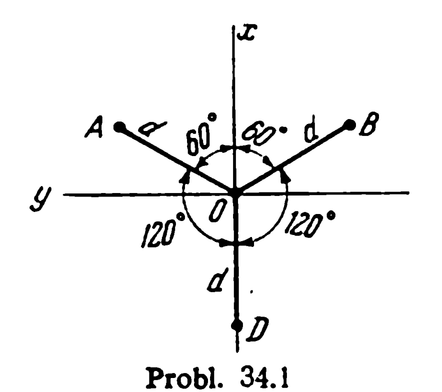
34.1. Le vilebrequin d'un moteur à trois cylindres (cf. schéma) comporte trois coudes formant des angles de 120°. Déterminer la position du centre des masses du vilebrequin en supposant que les masses des coudes sont concentrées aux points A, B et D, et $m_A = m_B = m_D = m$. Négliger les masses des autres parties du vilebrequin; les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. Le centre des masses est confondu avec l'origine O des coordonnées.

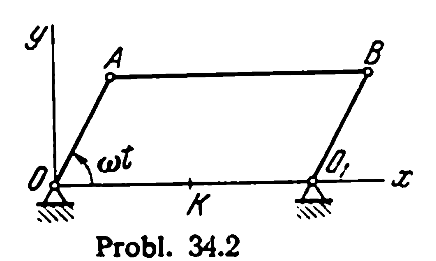
34.2. Ecrire l'équation du mouvement du centre des masses d'un parallélogramme articulé $OABO_1$ ainsi que l'équation de la trajectoire de ce centre lorsque la manivelle OA tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Les éléments du parallélogramme sont des tiges homogènes, et $OA = O_1B = \frac{AB}{2} = a$.

Rép. $x_C = a + \frac{3}{4} a \cos \omega t$, $y_C = \frac{3}{4} a \sin \omega t$; l'équation de la trajectoire $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4} a\right)^2$, c'est une circonférence de rayon $\frac{3}{4} a$, centrée au point K de coordonnées $(a, 0)$.





Probl. 34.1

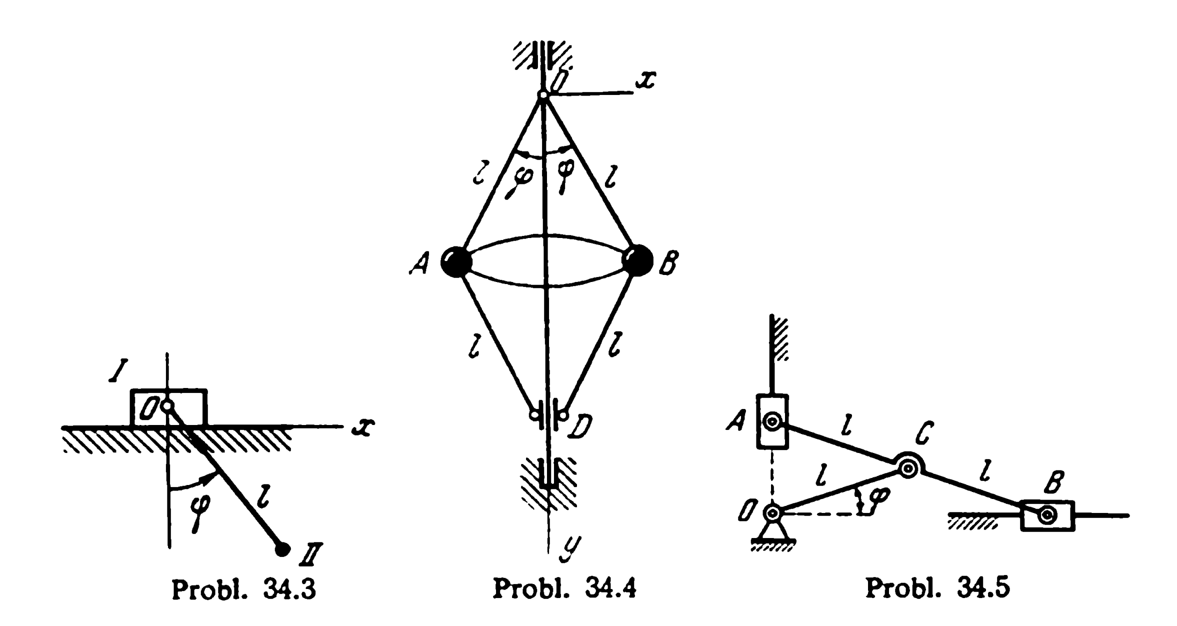


Probl. 34.2

34.3. Le corps II de poids P_2 est fixé au coulisseau I de poids P_1 à l'aide d'un fil fin non pesant. Lorsque le corps oscille suivant la loi $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ le coulisseau glisse sur un plan horizontal lisse fixe.

Ecrire l'équation du mouvement du coulisseau $x_1 = f(t)$, sachant qu'à l'instant initial $t=0$ le coulisseau était à l'origine O sur l'axe des x. La longueur du fil est l.

Rép. $x_1 = -\frac{P_2}{P_1+P_1} l \sin(\varphi_0 \sin \omega t)$.



Probl. 34.3 Probl. 34.4 Probl. 34.5

34.4. Déterminer la position du centre des masses d'un régulateur centrifuge (cf. schéma) si le poids de chacune des boules A et B est P_1 et si le poids du manchon D est P_2. Considérer les boules A et B comme des masses ponctuelles. Les masses des tiges sont négligeables.

Rép. $x_C = 0$, $y_C = 2\frac{P_1+P_2}{2P_1+P_2} l \cos\varphi$.

34.5. Déterminer la trajectoire du centre des masses du mécanisme d'un ellipsographe composé de manchons A et B pesant chacun Q kgf, de la manivelle OC de poids P kgf et de la règle AB de poids $2P$ kgf; $OC = AC = CB = l$. Considérer la règle et la manivelle comme des barres homogènes, les manchons comme des masses ponctuelles.

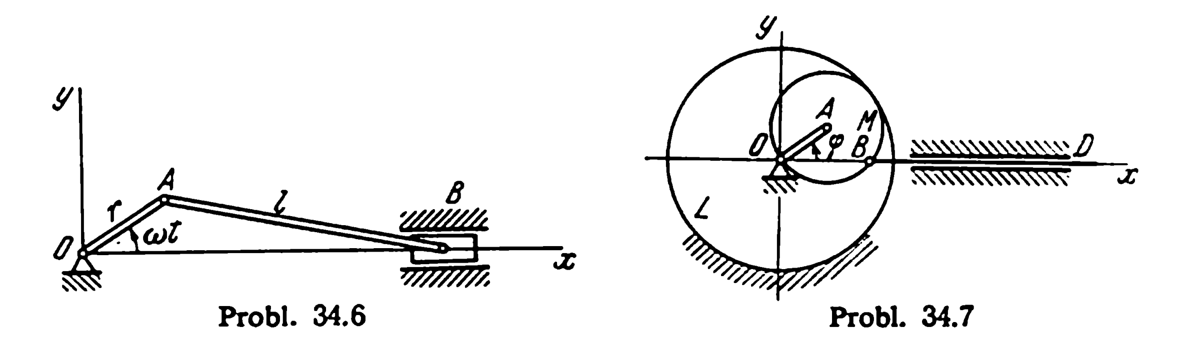
Rép. La circonférence centrée en O et de rayon

$$\frac{5P+4Q}{3P+2Q}\,\frac{l}{2}.$$

34.6. Un mécanisme bielle-manivelle est entraîné par la manivelle OA de poids P_1 et de longueur r_1 tournant avec une vitesse angulaire constante ω. Ecrire les équations du mouvement du centre des masses du mécanisme, si le poids de la bielle AB de longueur l est P_2 et le poids du coulisseau B est P_3; $r \ll l$.

Indication. Il faut développer l'expression $\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \omega t}$, où $\lambda=\frac{r}{l}$, en série et négliger tous les termes de la série contenant des puissances de λ^2 supérieures à la deuxième.

Rép. $$x_C=(4-\lambda^2)\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}l+\frac{P_1+2P_2+2P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}r\cos\omega t+$$
$$+\lambda^2\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}l\cos 2\omega t,$$
$$y_C=\frac{P_1+P_2}{2(P_1+P_2+P_3)}r\sin\omega t, \text{ où } \lambda=\frac{r}{l}.$$



Probl. 34.6 Probl. 34.7

34.7. La manivelle OA de poids P_1 et de longueur r d'un mécanisme (cf. schéma) fait tourner le pignon M de poids P_2 et de rayon r, engrené intérieurement avec un pignon fixe L de rayon $2r$.

Une règle BD de poids P_3 et de longueur l, se déplaçant dans des guides rectilignes horizontaux, est articulée au pignon M. Considérer la manivelle OA et la règle BD comme des barres homogènes. Le centre de gravité du pignon M est au point A. Déterminer la position du centre des masses du mécanisme.

Rép. $$x_C=\frac{P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}l+\frac{P_1+2P_2+4P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}r\cos\varphi;$$
$$y_C=\frac{P_1+2P_2}{2(P_1+P_2+P_3)}r\sin\varphi.$$

34.8. Calculer le moment d'inertie d'un arbre en acier d'un rayon de 5 cm et d'une masse de 100 kgf par rapport à sa génératrice. Considérer l'arbre comme un cylindre continu homogène.

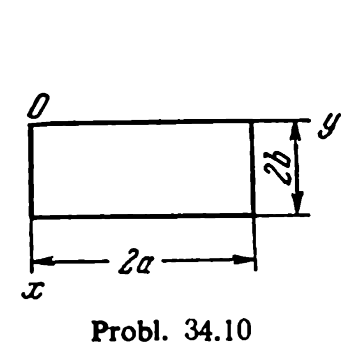
Rép. 3 750 kg cm^2.

34.9. Calculer le moment d'inertie d'un demi-disque homogène mince de poids P et de rayon r par rapport au diamètre.

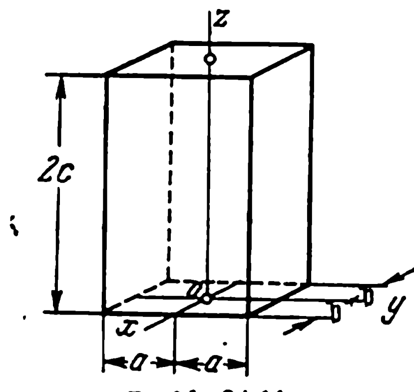
Rép. $\frac{Pr^2}{4g}$.

34.10. Calculer les moments d'inertie J_x et J_y d'une plaque rectangulaire homogène (cf. schéma) de poids P par rapport aux axes x et y.

Rép. $J_x=\frac{4}{3}\frac{P}{g}a^2$; $J_y=\frac{4}{3}\frac{P}{g}b^2$.



Probl. 34.10



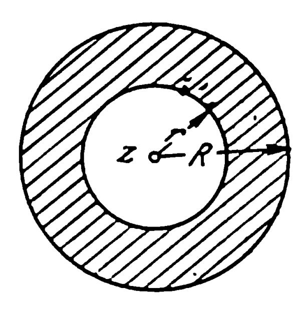
Probl. 34.11

34.11. Calculer les moments d'inertie d'un parallélépipède rectangle homogène (cf. schéma) de poids P par rapport aux axes x, y et z.

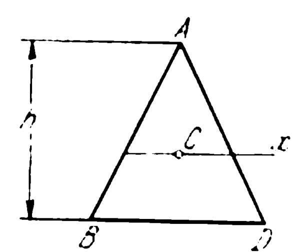
Rép. $J_x = \frac{P}{3g}(a^2+4c^2)$; $J_y = \frac{P}{3g}(b^2+4c^2)$; $J_z = \frac{P}{3g}(a^2+b^2)$.

34.12. Dans un disque circulaire mince homogène de rayon R, on a pratiqué une ouverture concentrique de rayon r. Calculer le moment d'inertie de ce disque de poids P par rapport à l'axe des z passant par son centre de gravité perpendiculairement à son plan.

Rép. $J_z = \frac{P}{2g}(R^2+r^2)$.



Probl. 34.12



Probl. 34.13

34.13. Calculer le moment d'inertie d'une plaque mince homogène de poids P ayant la forme d'un triangle isocèle de hauteur h par rapport à l'axe passant par son centre de gravité C parallèlement à sa base.

Rép. $\frac{1}{18}\frac{P}{g}h^2$.

34.14. Calculer le moment d'inertie de la plaque, considérée dans le problème précédent, par rapport à l'axe passant par son sommet parallèlement à la base.

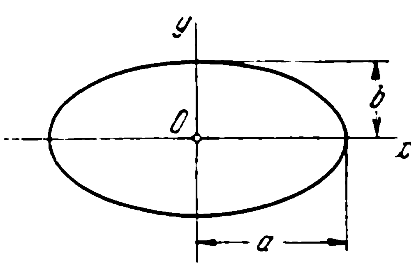
Rép. $\frac{P}{2g}h^2$.

34.15. Calculer le moment d'inertie de la plaque (cf. problème 34.13) par rapport à l'axe passant par le sommet A perpendiculairement à son plan, si la base $BD=a$.

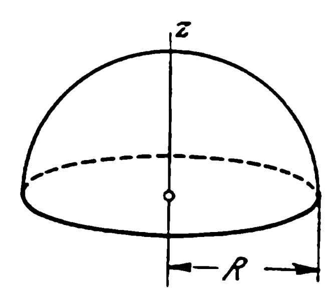
Rép. $\frac{P}{24g}(a^2+12h^2)$.

34.16. Calculer les moments d'inertie d'une plaque elliptique mince homogène de poids P limitée par le contour $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ par rapport à trois axes orthogonaux x, y et z.

Rép. $J_x=\frac{P}{4g}b^2$, $J_y=\frac{P}{4g}a^2$, $J_z=\frac{P}{4g}(a^2+b^2)$.



Probl. 34.16



Probl. 34.18

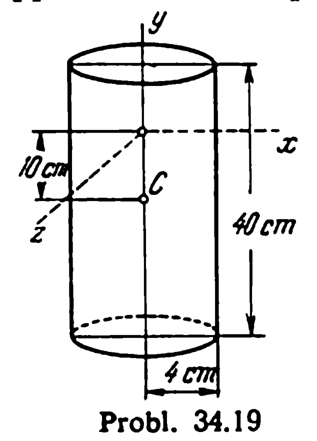
34.17. Déterminer le moment d'inertie d'une sphère creuse homogène de masse M par rapport à l'axe passant par son centre de gravité. Les rayons extérieur et intérieur sont respectivement R et r.

Rép. $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$.

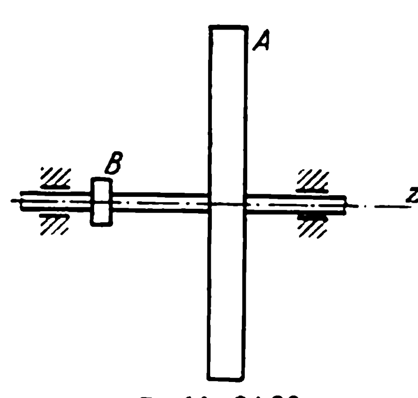
34.18. Calculer le moment d'inertie d'une coque mince homogène semi-sphérique de rayon R, par rapport à l'axe passant par le centre de la demi-sphère perpendiculairement au plan qui la limite. La masse M de la coque est uniformément répartie sur la surface de la demi-sphère.

Rép. $\frac{2}{3}MR^2$.

34.19. Calculer le rayon d'inertie d'un cylindre continu homogène par rapport à l'axe des z perpendiculaire à l'axe du cylindre et distant de son



Probl. 34.19



Probl. 34.20

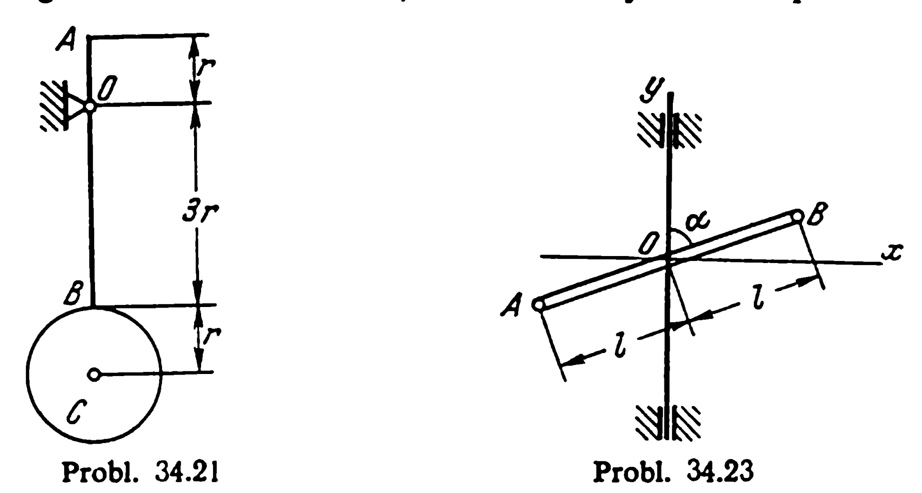
centre de gravité C de 10 cm, si le rayon du cylindre vaut 4 cm, sa hauteur 40 cm.

Rép. 15,4 cm.

34.20. Un volant A de 1 t et un pignon B de 10 kgf sont fixés sur un arbre de 60 kgf. Le rayon de l'arbre est de 5 cm, celui du volant de 1 m, celui du pignon de 10 cm. Calculer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation z. Considérer l'arbre comme un cylindre homogène, le pignon comme un disque continu homogène. La masse du volant est uniformément répartie sur sa jante.

Rép. 102 kgf m s².

34.21. Un pendule se compose d'une barre mince homogène AB de poids P_1 à l'extrémité de laquelle est fixé un disque homogène C de poids P_2. La longueur de la barre est $4r$, où r est le rayon du disque. Calculer



Probl. 34.21 Probl. 34.23

le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de suspension O perpendiculaire au plan du pendule et situé à une distance r de l'extrémité de la barre.

Rép. $\frac{14P_1+99P_2}{6g}r^2$.

34.22. Calculer le rayon de giration du pendule considéré dans le problème précédent par rapport à l'axe passant par l'extrémité A de la barre AB perpendiculairement au plan du pendule.

Rép. $\rho_A = r\sqrt{\frac{32P_1+153P_2}{6(P_1+P_2)}}$.

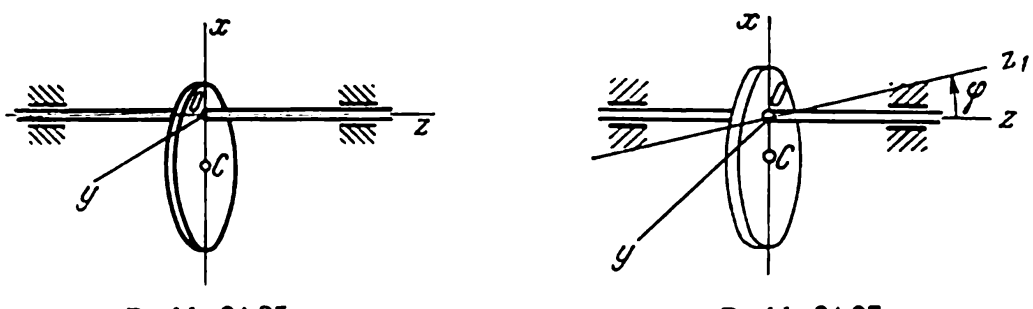
34.23. Une barre mince homogène AB de longueur $2l$ et de poids P est fixée en son centre O à un axe vertical et forme avec ce dernier un angle α. Calculer les moments d'inertie de la barre J_x, J_y et le produit d'inertie J_{xy}. Les axes de coordonnées sont indiqués sur le schéma.

Rép. $J_x = \frac{Pl^2}{3g}\cos^2\alpha$; $J_y = \frac{Pl^2}{3g}\sin^2\alpha$; $J_{xy} = \frac{Pl^2}{6g}\sin 2\alpha$.

34.24. Calculer les produits d'inertie J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} du vilebrequin d'après les données du problème 34.1.

Rép. $J_{xz} = -\frac{3}{2} md(a+b)$; $J_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2} md(a+b)$; $J_{xy} = 0$.

34.25. Un disque circulaire homogène de poids P est fixé excentriquement sur l'axe z perpendiculaire à son plan. Le rayon du disque est r, l'excentricité $OC=a$, où C est le centre de gravité du disque. Les axes de



Probl. 34.25 Probl. 34.27

coordonnées sont indiqués sur le schéma. Déterminer les moments d'inertie J_x, J_y, J_z et les produits d'inertie J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}.

Rép. $J_x = \frac{Pr^2}{4g}$; $J_y = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)$; $J_z = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)$;

$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

34.26. En utilisant les conditions et la réponse du problème précédent, calculer les grandeurs des demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie construit au point O.

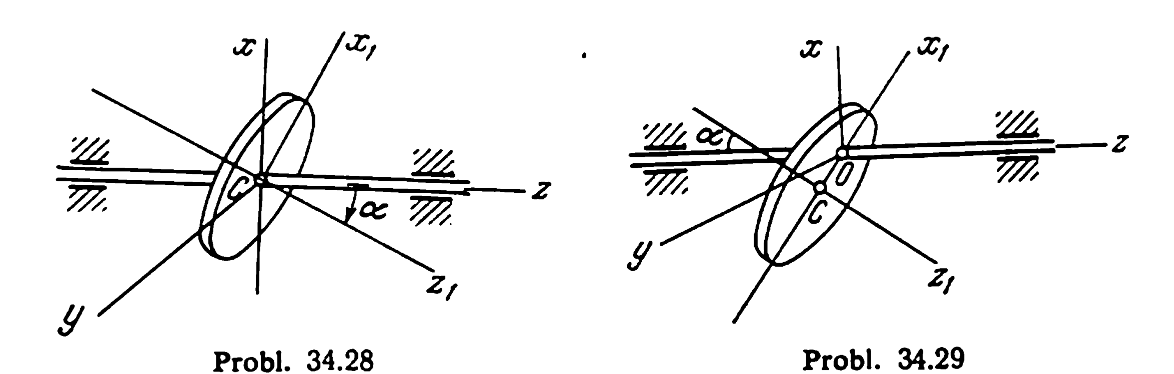
Rép. $a = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{g}{P}}$; $b = \sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)}}$; $c = \sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)}}$.

34.27. Calculer, selon les données du problème 34.25, le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe z_1 situé dans le plan vertical xz et formant un angle φ avec l'axe z.

Rép. $J_{z_1} = \frac{Pr^2}{4g}\sin^2\varphi + \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)\cos^2\varphi$.

34.28. Un disque circulaire homogène de poids P est fixé sur l'axe z passant par son centre de gravité C. L'axe de symétrie du disque z_1 est situé dans le plan vertical de symétrie xz et forme un angle α avec l'axe Cz. Le rayon du disque est r. Calculer les produits d'inertie du disque J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (les axes de coordonnées sont indiqués sur le schéma).

Rép. $J_{xy} = J_{zy} = 0$; $J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{Pr^2}{8g}\sin 2\alpha$.



Probl. 34.28 Probl. 34.29

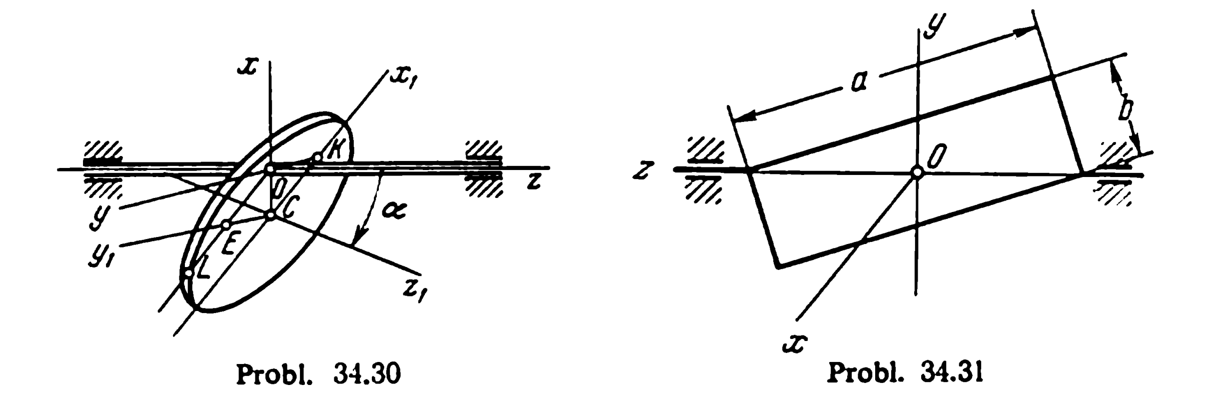
34.29. Résoudre le problème précédent en supposant que le disque est fixé excentriquement sur l'axe Oz, l'excentricité étant $OC = a$.

Rép. $J_{xy} = J_{yz} = 0; \quad J_{xz} = \frac{P}{2g}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha.$

34.30. Un disque circulaire homogène de rayon R est fixé sur l'axe de rotation Oz passant par le point O et formant avec l'axe de symétrie du disque Cz_1 un angle α. La masse du disque est M. Calculer le moment d'inertie J_z du disque par rapport à l'axe de rotation Oz et les produits d'inertie J_{xz} et J_{yz} si OL est la projection de l'axe des z sur le plan du disque; $OE = a$, $OK = b$.

Rép. $J_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha + b^2\right];$

$$J_{xz} = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\sin\alpha\cos\alpha; \quad J_{yz} = Mab\sin\alpha.$$



Probl. 34.30 Probl. 34.31

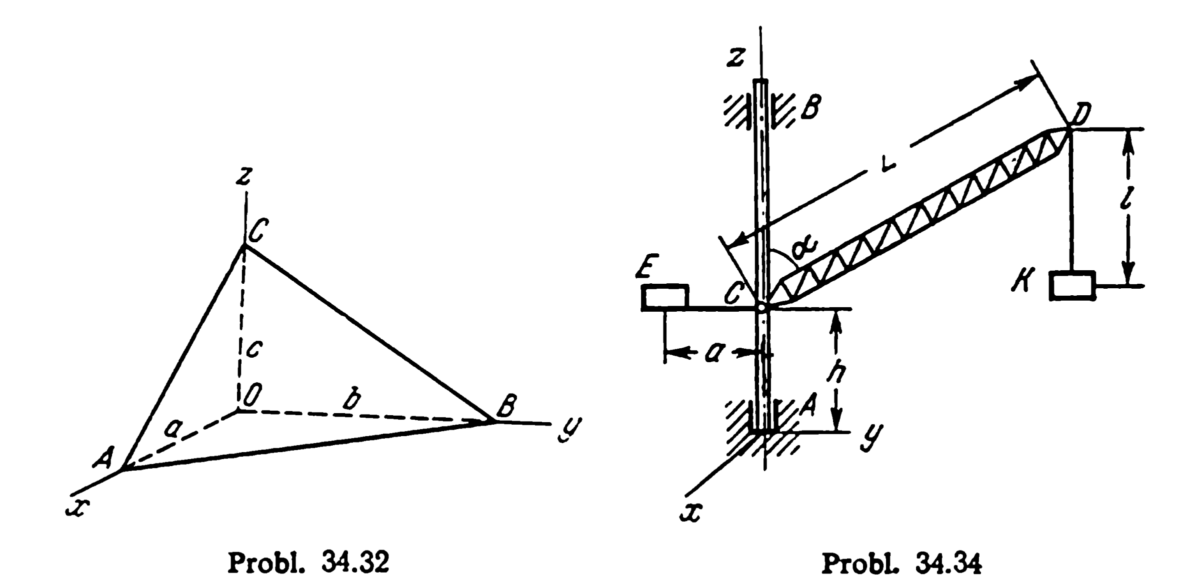
34.31. Une plaque rectangulaire homogène de poids P et de côtés a et b est fixée à l'axe des z, passant par l'une de ses diagonales. Calculer son produit d'inertie J_{yz} par rapport aux axes y et z situés ainsi que la plaque dans le plan du schéma. L'origine des coordonnées est confondue avec le centre de gravité de la plaque.

Rép. $J_{yz} = \frac{P}{12g}\,\frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}.$

34.32. Calculer les moments d'inertie et les produits d'inertie du tétraèdre homogène $OABC$ (cf. schéma) de masse M par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Rép. $J_x = \frac{M}{10}(b^2+c^2)$, $J_y = \frac{M}{10}(a^2+c^2)$, $J_z = \frac{M}{10}(a^2+b^2)$;

$$J_{xy} = \frac{M}{20}ab, \quad J_{yz} = \frac{M}{20}bc, \quad J_{zx} = \frac{M}{20}ca.$$



Probl. 34.32 Probl. 34.34

34.33. Ecrire l'équation de l'ellipsoïde d'inertie du tétraèdre (cf. problème précédent) par rapport au point O, si $a=b=c$.

Rép. $\frac{Ma^2}{4}(x_1^2+y_1^2)+\frac{M}{10}a^2z_1^2=1$; l'axe de symétrie z_1 de l'ellipsoïde d'inertie forme avec les axes Ox, Oy, Oz des angles égaux. Les axes x_1 et y_1 occupent une position arbitraire dans le plan passant par le point O perpendiculairement à z_1.

34.34. La partie tournante d'une grue est composée de la flèche CD de longueur L et de poids G, du contrepoids E de poids Q et de la charge K de poids P. Considérant la flèche comme une poutre mince homogène, le contrepoids E et la charge K comme des masses ponctuelles, calculer le moment d'inertie J_z de la grue par rapport à l'axe vertical de rotation z et les produits d'inertie par rapport aux axes de coordonnées x, y, z liés à la grue. Le centre de gravité de tout le système se trouve sur l'axe des z; la flèche CD se trouve dans le plan yz.

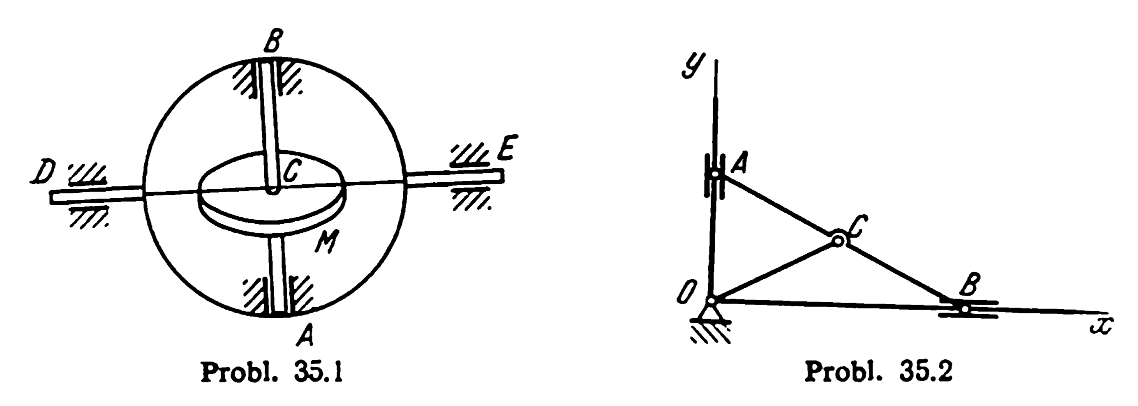
Rép. $J_z = \frac{1}{g}\left[Qa^2+\left(P+\frac{1}{3}G\right)L^2\sin^2\alpha\right]$;

$$J_{yz} = \frac{P+\frac{1}{3}G}{2g}L^2\sin 2\alpha - \frac{P}{g}Ll\sin\alpha, \quad J_{xy}=J_{xz}=0.$$

§ 35. Théorème sur le mouvement du centre des masses du système matériel

35.1. Calculer le vecteur résultant des forces extérieures agissant sur le volant M tournant autour de l'axe AB avec l'accélération angulaire ε. L'axe AB, fixé dans un cadre circulaire, tourne à son tour uniformément autour de l'axe DE. Le centre de gravité C du volant est au point d'intersection des axes AB et DE.

Rép. Le vecteur résultant des forces extérieures est nul.



Probl. 35.1 Probl. 35.2

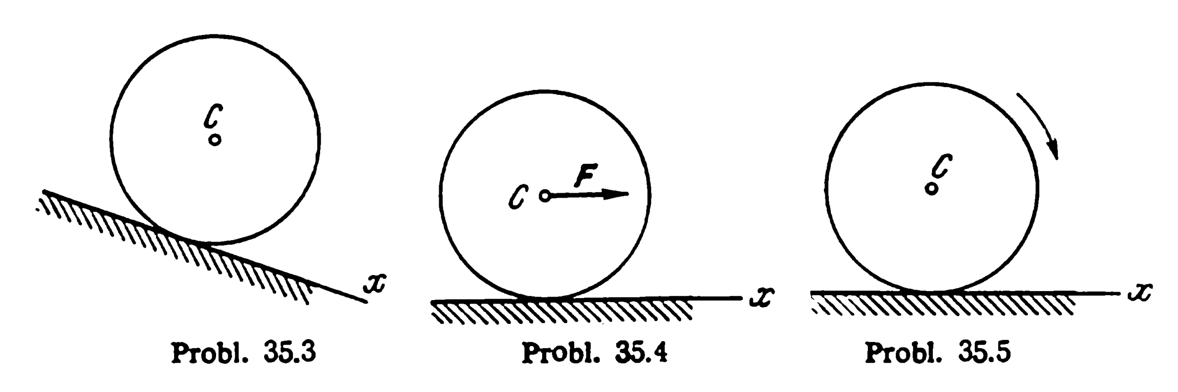
35.2. Déterminer le vecteur résultant des forces extérleures appliquées à la règle AB d'un ellipsographe (cf. schéma). La manivelle OC tourne avec une vitesse angulaire constante ω; le poids de la règle AB est P; $OC = AC = BC = l$.

Rép. Le vecteur résultant des forces extérieures est parallèle à CO et vaut en module $\frac{P}{g} l\omega^2$.

35.3. Calculer le vecteur résultant des forces extérieures agissant sur une roue de poids P descendant un plan incliné, si son centre des masses C se déplace suivant la loi: $x_C = at^2/2$.

Rép. Le vecteur résultant des forces extérieures est parallèle à l'axe des x, il est dirigé dans le sens du mouvement et vaut en module Pa/g.

35.4. Une roue roule en glissant suivant une droite horizontale sous l'action de la force F (cf. schéma). Trouver la loi du mouvement du



Probl. 35.3 Probl. 35.4 Probl. 35.5

centre des masses C de la roue si le coefficient de frottement est f, et $F=5fP$, où P est le poids de la roue. A l'instant initial la roue était à l'arrêt.

Rép. $x_C=2fgt^2$.

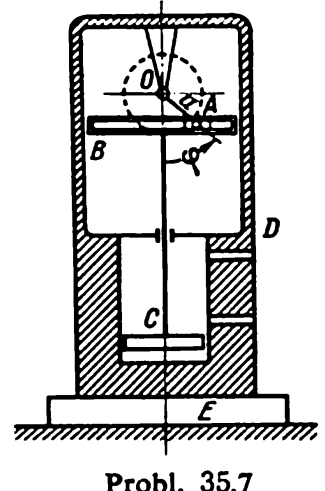
35.5. Une roue roule avec glissement suivant une droite horizontale sous l'action d'un couple de rotation. Trouver la loi du mouvement du centre des masses C de la roue, si le coefficient de frottement est f. A l'instant initial la roue était à l'arrêt. (Voir fig. p. 303.)

Rép. $x_C=\frac{fgt^2}{2}$.

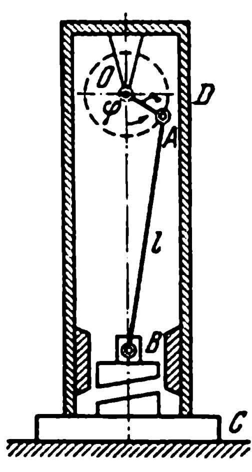
35.6. Un wagon de tramway effectue sur des ressorts des oscillations harmoniques verticales d'amplitude 2,5 cm et de période $T=0{,}5$ s. Le poids de la caisse avec la charge est de 10 t, le bogie avec les roues pèse 1 t. Calculer la pression qu'exerce le wagon sur les rails.

Rép. La pression varie de 7 à 15 t.

35.7. Calculer la pression d'une pompe à eau sur le sol lorsqu'elle travaille à vide, sachant que le poids des parties fixes du bâti D et du fondement E est P_1, le poids de la manivelle $OA=a$ est P_2, le poids de la



Probl. 35.7



Probl. 35.9

coulisse B et du piston C est P_3. La manivelle OA tournant uniformément avec la vitesse angulaire ω est considérée comme une barre homogène.

Rép. $N=P_1+P_2+P_3+\frac{a\omega^2}{2g}(P_2+2P_3)\cos\omega t$.

35.8. En utilisant les données du problème précédent, supposer que la pompe est installée sur un fondement élastique de coefficient d'élasticité c. Trouver la loi du mouvement de l'axe O de la manivelle OA suivant la verticale, sachant qu'à l'instant initial l'axe O occupait la position d'équilibre statique et que sa vitesse v_0 était dirigée verticalement vers le bas. Prendre sa position d'équilibre statique comme origine des abscisses x;

l'axe vertical Ox est dirigé vers le bas. Les forces de frottement sont négligeables.

Rép. 1) Lorsque $\frac{cg}{P_1+P_2+P_3} \neq \omega^2$,

$$x_O = -\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2-\omega^2}\cos \omega t,$$

$$\text{où } k=\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2+P_3}}, \quad h=\frac{P_2+2P_3}{P_1+P_2+P_3}\,\frac{a\omega^2}{2};$$

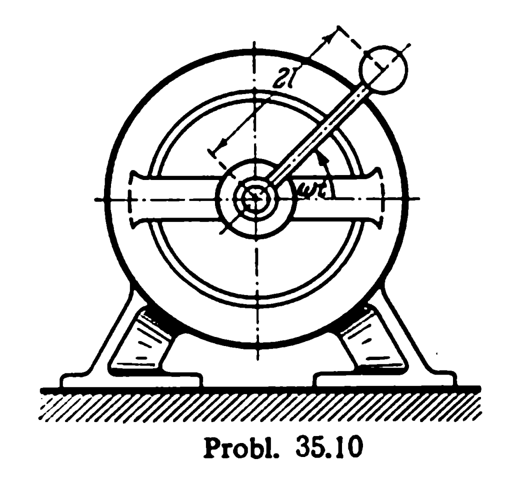
2) lorsque $\frac{cg}{P_1+P_2+P_3}=\omega^2$, $x_O=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{h}{2\omega}t\sin\omega t$.

35.9. Des ciseaux à métal comportent un mécanisme bielle-manivelle OAB; le couteau mobile est fixé au coulisseau B, le couteau fixe étant monté sur le fondement C. Calculer la pression du fondement sur le sol si la longueur de la manivelle est r, son poids P_1, la longueur de la bielle étant l, le poids du coulisseau B et du couteau mobile P_2, le poids du fondement C et du bâti D étant P_3. La masse de la bielle est négligeable. La manivelle OA tournant uniformément avec la vitesse angulaire ω est considérée comme une barre homogène.

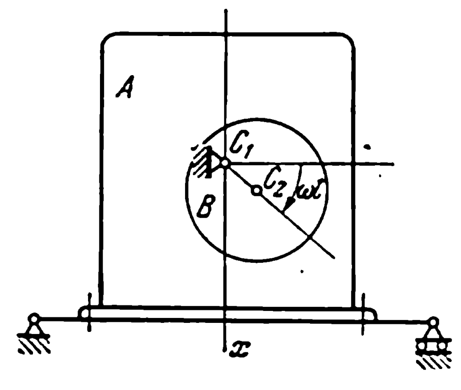
Indication. Il faut développer l'expression $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t}$ en série et négliger tous les termes contenant les puissances de (r/l) supérieures à la deuxième.

Rép. $N=P_1+P_2+P_3+\frac{r\omega^2}{2g}\left[(P_1+2P_2)\cos\omega t+2P_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right]$.

35.10. Un moteur électrique de poids P est installé sans fixations sur un fondement lisse horizontal; sur l'arbre du moteur, une barre homogène de longueur $2l$ et de poids p est fixée, sous un angle droit, par l'une de ses extrémités; une charge ponctuelle Q est fixée à son autre extrémité; la vitesse angulaire de l'arbre est ω.



Probl. 35.10



Probl. 35.12

Déterminer: 1) le mouvement horizontal du moteur; 2) le plus grand effort horizontal R agissant sur les boulons qui fixent son bâti au fondement.

Rép. 1) Des oscillations harmoniques d'amplitude

$$\frac{l(p+2Q)}{p+P+Q} \text{ et de période } \frac{2\pi}{\omega};$$

$$2)\ R=\frac{p+2Q}{g} l\omega^2.$$

35.11. Calculer, d'après les données du problème précédent, la vitesse angulaire ω de l'arbre de l'électromoteur pour laquelle, n'étant pas fixé au fondement, il sautille sur ce dernier.

Rép. $\omega > \sqrt{\frac{(p+P+Q)g}{(p+2Q)l}}$.

35.12. Lors de l'assemblage d'un électromoteur, son rotor B a été monté excentriquement sur l'axe de rotation C_1, l'excentricité étant $C_1C_2=a$ (où C_1 est le centre de gravité du stator A, C_2 le centre de gravité du rotor B). Le rotor tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω. L'électromoteur est installé au milieu d'une poutre élastique dont la flèche statique est Δ (voir fig. p. 305); le poids du stator est P_1, celui du rotor est P_2.

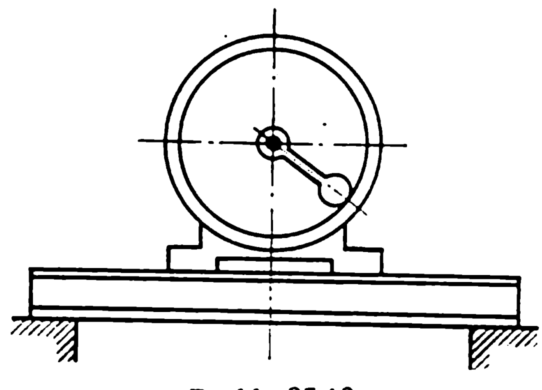
Trouver l'équation du mouvement du point C_1 suivant la verticale, si à l'instant initial il était au repos dans sa position d'équilibre statique. Négliger les forces de résistance. La position d'équilibre statique du point C_1 est prise comme origine des abscisses x.

Rép. 1) Lorsque $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \neq \omega$, $x_1=-\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin \omega t$,

où $k=\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$, $h=\frac{P_2}{P_1+P_2}a\omega^2$;

2) lorsque $\sqrt{\frac{g}{\Delta}}=\omega$, $x_1=\frac{h}{2\omega^2}\sin \omega t-\frac{h}{2\omega}t\cos \omega t$.

35.13. Un moteur électrique pesant 30 kgf est installé sur une poutre de rigidité $c=300$ kgf/cm. Un poids de 200 gf est fixé sur l'arbre du moteur à une distance de 1,3 cm de l'axe de l'arbre. La vitesse angulaire du



Probl. 35.13

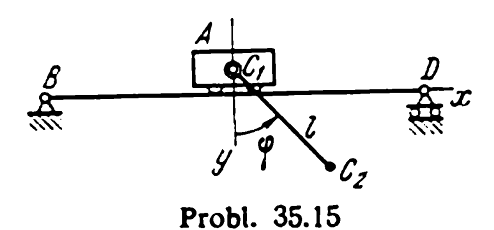
moteur $\omega=\text{const}=90\ s^{-1}$. Déterminer l'amplitude des oscillations forcées du moteur et son nombre de tr/mn critique en négligeant la masse de la poutre et la résistance au mouvement.

Rép. $a=0{,}410$ mm; $n_{cr}=950$ tr/mn.

35.14. Un moteur pesant 50 kgf est installé sur une poutre de rigidité $c=500$ kgf/cm. Lors des oscillations libres de la poutre et du moteur la diminution d'amplitudes des déviations successives de la position d'équilibre est $\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{10}{9}$. Un poids de 0,2 kgf non équilibré est fixé sur l'arbre à 6 cm de l'axe de rotation. Trouver l'amplitude et le décalage des phases des oscillations forcées du moteur lorsque la vitesse angulaire de l'arbre est $n=\text{const}=980$ tr/mn.

Rép. $a=0{,}253$ cm; $\varepsilon=137°$.

35.15. Le chariot A de poids P_1 d'un pont roulant (cf. schéma) est freiné au milieu de la poutre BD. Un câble de longueur l à l'extrémité duquel est fixée une charge C_2 de poids P_2 est attaché au centre de gravité C_1 du chariot. Le câble et la charge effectuent des oscillations harmoniques



Probl. 35.15

dans le plan vertical. Déterminer: 1) la réaction verticale totale de la poutre BD considérée comme rigide; 2) la loi du mouvement du point C_1 dans la direction verticale, si l'on suppose que la poutre est élastique, de coefficient d'élasticité c.

A l'instant initial la poutre non déformée était au repos dans la position horizontale. Les oscillations du câble étant considérées comme petites, on peut poser: $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$. La position d'équilibre statique du point C_1 est prise comme origine des ordonnées y. Négliger la masse du câble et les dimensions du chariot par rapport à la longueur de la poutre.

Rép. 1) $R_y=P_1+P_2$; 2) le point C_1 effectue des oscillations libres d'après la loi $y_1=-\frac{P_1+P_2}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2}}\,t$.

35.16. Déterminer, d'après les données du problème précédent, en supposant que la poutre BD est rigide: 1) la réaction horizontale totale des rails; 2) supposant que le chariot ne soit pas freiné, la loi du mouvement du centre de gravité C_1 de celui-ci le long de l'axe des x.

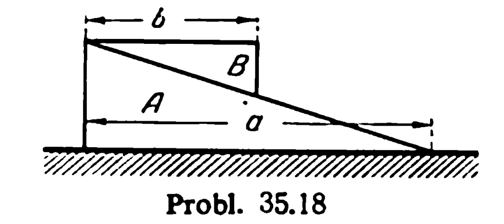
A l'instant initial le point C_1 était au repos à l'origine des abscisses x. Le câble effectue des oscillations suivant la loi: $\varphi=\varphi_0 \cos \omega t$.

Rép. 1) $R_x=-\frac{P_2}{g} l\varphi_0 \omega^2 \cos \omega t$; 2) le point C_1 effectue des oscillations d'amplitude $\frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0$ et de pulsation ω suivant la loi: $x_1=\frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0(1-\cos \omega t)$.

35.17. Deux hommes sont assis sur le banc moyen d'une barque à l'arrêt. L'un d'eux pesant 50 kgf s'est déplacé à droite vers la proue de la barque. Dans quel sens et à quelle distance doit se déplacer le second homme pesant 70 kgf pour que la barque reste au repos? La longueur de la barque est de 4 m. Négliger la résistance à l'avancement de la barque.

Rép. A gauche, vers la poupe de la barque, de 1,43 m.

35.18. On pose sur un prisme homogène A situé sur un plan horizontal un autre prisme homogène B; les sections droites des prismes sont des triangles rectangles. Le poids de A est le triple de celui de B. Supposant que les prismes et le plan horizontal sont parfaitement polis, calculer la longueur l de déplacement du prisme A lorsque le prisme B, descendant sur A, arrive au plan horizontal.



Probl. 35.18

Rép. $l=\frac{a-b}{4}$.

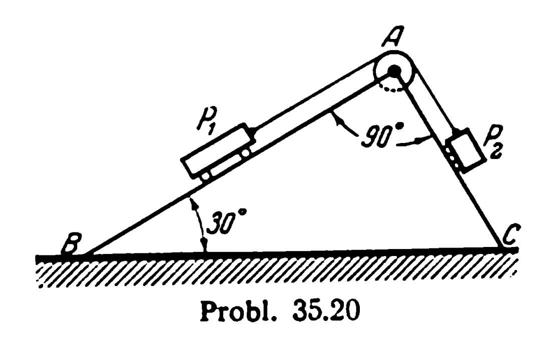
35.19. Deux ouvriers roulent un moulage lourd en acier de l'extrémité gauche d'une plate-forme horizontale longue de 6 m et pesant 2 700 kgf vers son extrémité droite. A l'instant initial la plate-forme est au repos. Dans quel sens et de combien se déplace-t-elle si le poids total de la charge et des ouvriers est de 1 800 kgf ? Négliger les forces de résistance au mouvement de la plate-forme.

Rép. A gauche, de 2,4 m.

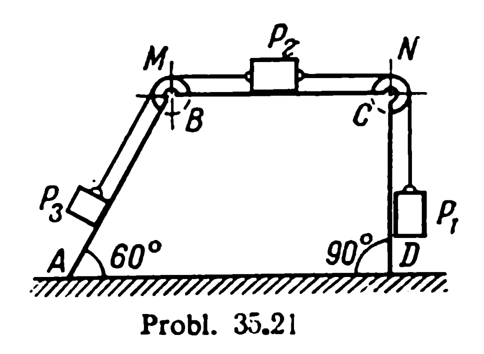
35.20. Deux poids P_1 et P_2, reliés par un fil inextensible passant sur une poulie A, glissent sur les faces latérales polies d'un prisme dont la base BC s'appuie sur un plan horizontal poli. Calculer le déplacement du prisme sur le plan horizontal lorsque le poids P_1 descend à une hauteur $h=10$ cm. Le poids du prisme $P=4P_1=16P_2$; les masses du fil et de la poulie sont négligeables.

Rép. Le prisme se déplace à droite de 3,77 cm.

35.21. Trois poids $P_1=20$ N, $P_2=15$ N et $P_3=10$ N sont reliés par un fil non pesant et inextensible passant sur des poulies fixes M et N. Lorsque le poids P_1 descend, le poids P_2 se déplace vers la droite sur la base supérieure du tronc d'une pyramide quadrangulaire $ABCD$ de poids



Probl. 35.20

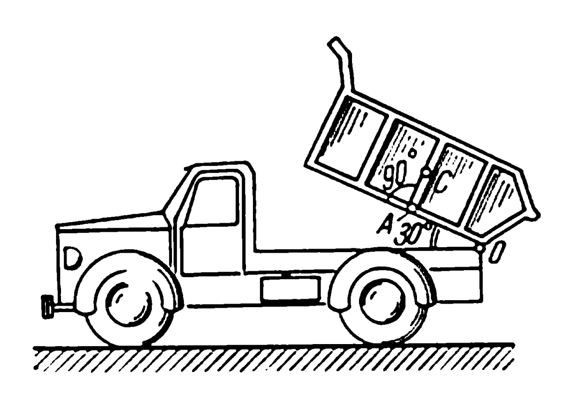


Probl. 35.21

$P=100$ N et le poids P_3 monte sur la face latérale AB. Négligeant le frottement entre le plancher et le tronc de pyramide, calculer le déplacement de ce dernier par rapport au plancher si le poids P_1 s'est abaissé de 1 m.

Rép. Il se déplace de 14 cm vers la gauche.

35.22. Calculer le déplacement d'un camion à benne basculante non freiné qui à l'instant initial était à l'arrêt, si sa benne de 4 t a tourné de 30° à partir de l'horizontale autour de l'axe O, perpendiculaire au plan du schéma. Le poids du camion sans la benne est de 1,5 t. La position du centre de gravité de la benne est indiquée sur le schéma; $OA=2$ m, $AC=50$ cm. Négliger la résistance au mouvement du camion.



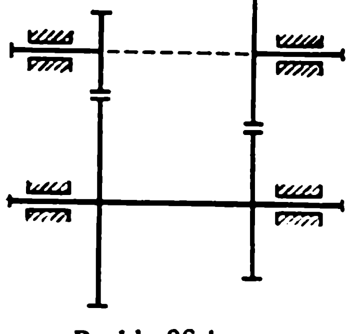
Probl. 35.22

Rép. Il se déplace de 37,8 cm vers la gauche.

§ 36. Théorème de la variation du vecteur résultant des quantités de mouvement du système matériel. Application aux milieux continus

36.1. Déterminer le vecteur résultant des quantités de mouvement d'un réducteur de vitesse en fonctionnement (cf. schéma), si les centres de gravité de chacun des quatre pignons tournants sont sur les axes de rotation.

Rép. Le vecteur résultant des quantités de mouvement est nul.

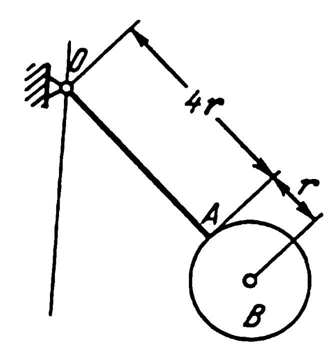

Probl. 36.1

36.2. Calculer la somme des impulsions des forces extérieures appliquées au réducteur du problème précédent dans un intervalle de temps arbitraire fini.

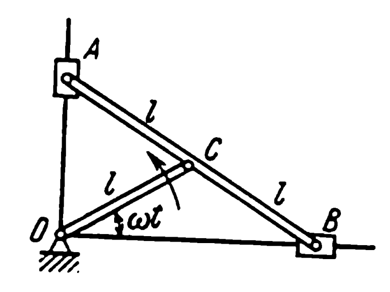
Rép. La somme des impulsions des forces extérieures est nulle.

36.3. Déterminer le vecteur résultant des quantités de mouvement d'un pendule composé d'une barre homogène OA de poids P_1, longue de $4r$ et d'un disque homogène B de poids P_2 et de rayon r, si la vitesse angulaire du pendule à l'instant considéré est ω.

Rép. Le vecteur résultant des quantités de mouvement est dirigé perpendiculairement à OA et vaut en module $\frac{2P_1+5P_2}{g} r\omega$.



Probl. 36.3

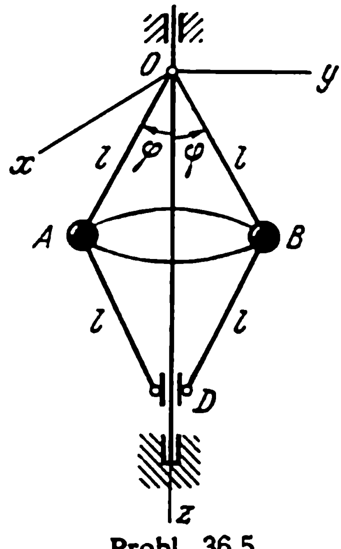


Probl. 36.4

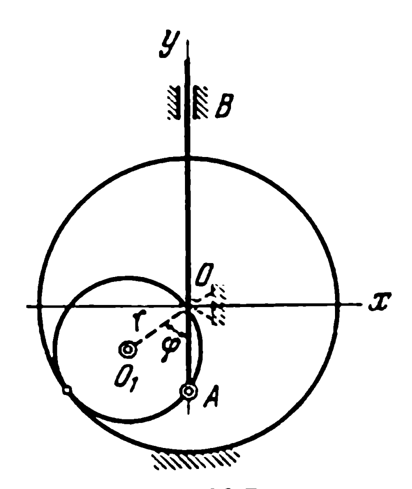
36.4. Déterminer la grandeur et la direction du vecteur résultant des quantités de mouvement du mécanisme d'un ellipsographe, si le poids de la manivelle OC est P_1, le poids de la règle AB étant $2P_1$, le poids de chacun des manchons A et B, P_2; $OC=AC=CB=l$. Les centres de gravité de la manivelle et de la règle sont situés en leurs milieux. La manivelle tourne avec la vitesse angulaire ω.

Rép. Le module du vecteur résultant est $Q=\frac{\omega l}{2g}(5P_1+4P_2)$; sa direction est perpendiculaire à la manivelle.

36.5. Déterminer le vecteur résultant des quantités de mouvement d'un régulateur centrifuge tournant avec accélération autour d'un axe vertical. Les angles φ varient alors suivant la loi $\varphi=\varphi(t)$, en tournant les



Probl. 36.5



Probl. 36.7

barres supérieures soulèvent les boules A et B. Les longueurs des barres sont: $OA=OB=AD=BD=l$.

Le centre de gravite du manchon D de poids P_2 est situé sur l'axe des z. Considérer les boules A et B comme des masses ponctuelles, chacune de poids P_1. Les masses des barres sont négligeables.

Rép. $Q_x=Q_y=0$, $Q_z=-2\frac{P_1+P_2}{g}l\dot{\varphi}\sin\varphi$, où Q est le vecteur résultant des quantités de mouvement; le plan yz est confondu avec le plan des barres du régulateur.

36.6. Déterminer la somme des impulsions des forces extérieures appliquées au régulateur du problème précédent dans l'intervalle de temps qui correspond à l'accroissement de l'angle φ de 30° à 60°, si φ varie suivant la loi $\varphi=\alpha t$, où $\alpha=\text{const}$.

Rép. Les projections de la somme des impulsions des forces extérieures sur les axes x, y, z sont:

$$S_x^e=S_y^e=0,\quad S^e=-0{,}73\frac{P_1+P_2}{g}l\alpha.$$

36.7. Dans un mécanisme (cf. schéma) le poids de la roue mobile de rayon r est p, son centre de gravité étant au point O_1; la tige rectiligne AB pèse k fois plus et son centre de gravité se trouve en son milieu. La manivelle OO_1 de masse négligeable tourne autour de l'axe O à une vitesse angulaire constante ω. Déterminer le vecteur résultant des quantités de mouvement du système.

Rép. Les projections du vecteur résultant des quantités de mouvement du système sur les axes de coordonnées sont:

1) sur l'axe Ox: $-\frac{p}{g}r\omega\cos\omega t$;

2) sur l'axe Oy: $\frac{p}{g}r\omega(1+2k)\sin\omega t$.

36.8. Un canon pèse 11 000 kgf, l'obus pèse 54 kgf. Sa vitesse à la sortie du canon $v_0=900$ m/s. Déterminer la vitesse de recul libre du canon à l'instant où l'obus le quitte.

Rép. La vitesse de recul du canon est de 4,42 m/s et est dirigée dans le sens contraire au mouvement de l'obus.

36.9. Une grenade de 12 kgf volant à la vitesse de 15 m/s explose en l'air et se désintègre en deux parties. Pendant le mouvement un fragment de 8 kgf atteint la vitesse de 25 m/s. Déterminer la vitesse du second fragment.

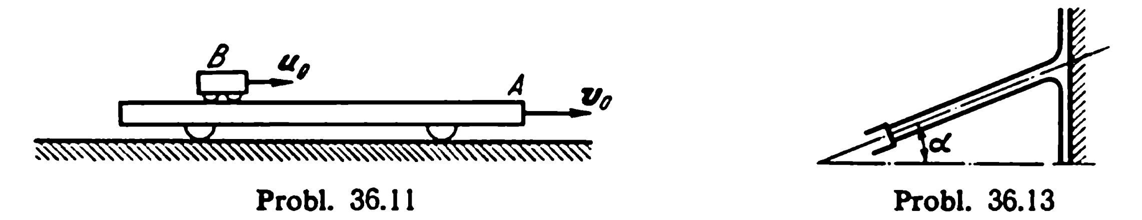
Rép. 5 m/s, dans le sens contraire au mouvement du premier fragment.

36.10. Un remorqueur de 600 t atteint la vitesse de 1,5 m/s pour que le câble de remorque se tende et entraîne une barge de 400 t. Calculer la

vitesse commune du remorqueur et de la barge si les forces motrice et de résistance de l'eau sont en équilibre.

Rép. 0,9 m/s.

36.11. Le chariot B avance avec une vitesse relative constante u_0 sur une plate-forme horizontale A se déplaçant par inertie avec la vitesse v_0. A



Probl. 36.11 Probl. 36.13

un moment donné le chariot est freiné. Déterminer la vitesse commune v de la plate-forme avec chariot après son arrêt, si la masse de la plate-forme est M et celle du chariot m.

Rép. $v = v_0 + \frac{m}{M+m} u_0$.

36.12. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, le chemin s parcouru par le chariot B sur la plate-forme A à partir de l'instant de freinage jusqu'à l'arrêt complet et le temps de freinage τ, si la force de résistance F lors du freinage est de valeur constante.

Indication. Dans l'équation différentielle du mouvement du chariot utiliser la relation $Mv + m(u+v) = \text{const}$, où u et v sont les vitesses variables.

Rép. $s = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} \cdot \frac{u_0^2}{F}$, $\tau = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{u_0}{F}$.

36.13. Un jet d'eau jaillit d'une manche à incendie à section droite de 16 cm² avec la vitesse de 8 m/s et sous un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Calculer la pression qu'exerce le jet sur un mur vertical en négligeant l'effet de la pesanteur sur la forme du jet. On suppose qu'après l'incidence du jet sur le mur les vitesses des particules d'eau sont dirigées parallèlement au mur.

Rép. 9,05 kgf.

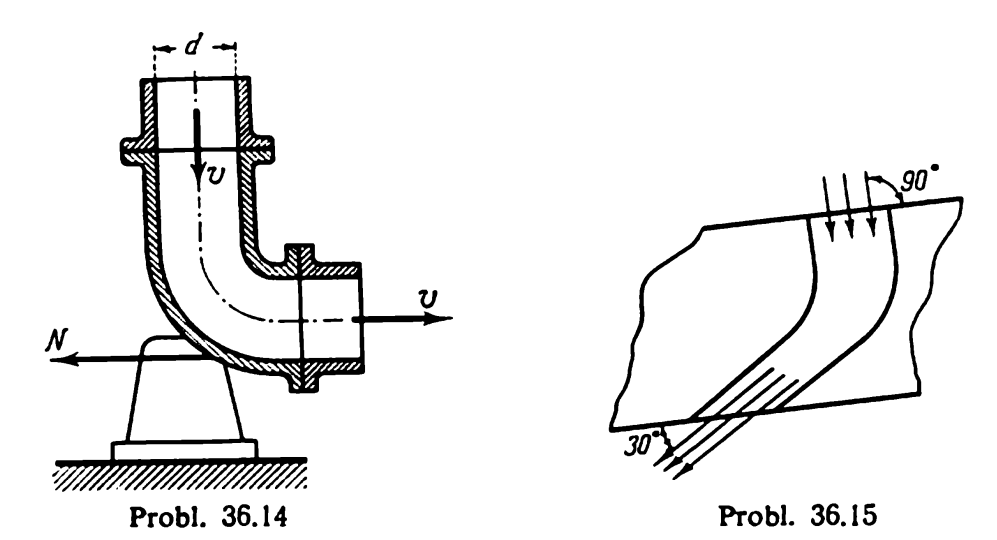
36.14. Calculer la composante horizontale N de la pression qu'exerce l'eau sur le support d'un tuyau coudé de diamètre $d = 300$ mm, dans lequel elle circule à la vitesse $v = 2$ m/s.

Rép. $N = 28{,}9$ kgf.

36.15. L'eau entre dans un canal fixe de section variable, symétrique par rapport au plan vertical, à la vitesse $v_0 = 2$ m/s et sous un angle $\alpha_0 = 90°$ par rapport à l'horizontale; l'aire de la section d'entrée du canal est de 0,02 m²; la vitesse de l'eau à la sortie du canal $v_1 = 4$ m/s et forme un angle

$\alpha_1 = 30°$ avec l'horizontale. Calculer le module de la composante horizontale de la réaction de l'eau sur la paroi du canal.

Rép. 14,1 kgf.

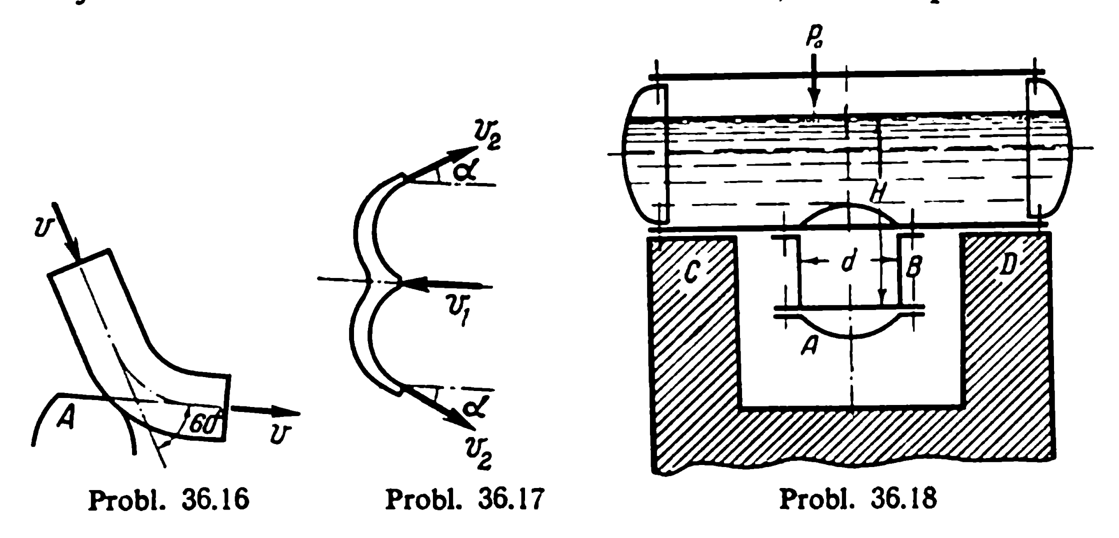


Probl. 36.14 Probl. 36.15

36.16. Calculer la pression de l'eau sur le support *A* du coude d'un tuyau de 20 cm de diamètre. L'axe du tuyau est situé dans le plan horizontal (le schéma montre la vue d'en haut). L'eau y circule à la vitesse de 4m/s, sa direction à l'entrée forme un angle de 60° avec la vitesse à la sortie du tuyau.

Rép. 51,2 kgf.

36.17. Calculer le module de la composante horizontale de la pression d'un jet d'eau sur l'aube fixe d'une roue de turbine, sachant que le débit



Probl. 36.16 Probl. 36.17 Probl. 36.18

de l'eau est Q, son poids spécifique γ, la vitesse de l'eau incidente v_1 est horizontale, la vitesse de sortie de l'eau v_2 forme un angle α avec l'horizontale.

Rép. $N = \frac{\gamma}{g} Q (v_1 + v_2 \cos \alpha)$.

36.18. Une chaudière de 10,35 t contient 15 t d'eau à la pression indiquée $p_0 = 10$ atm sur sa surface libre. A un moment donné les boulons qui fixent le couvercle A au raccord de tuyau B par une bride de fixation sautent; le couvercle est emporté et l'eau chaude commence à s'écouler; $H = 1$ m, $d = 0{,}4$ m, le poids spécifique de l'eau chaude est $\gamma = 0{,}9$. Calculer la pression de la chaudière sur les supports à l'instant où le couvercle A se détache. Négliger les résistances hydrauliques, les vitesses des particules d'eau à l'intérieur de la chaudière et le phénomène d'évaporation de l'eau à la sortie du raccord du tuyau B. La vitesse moyenne de l'écoulement de l'eau après le détachement du couvercle se détermine d'après la formule $v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\gamma}\right)}$. (Voir fig. p. 313.)

Rép. La pression sur les supports est nulle.

§ 37. Théorème de la variation du moment cinétique résultant du système matériel. Equation différentielle de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe

37.1. Un disque circulaire homogène, de poids $P = 50$ kgf et de rayon $R = 30$ cm, roule sans glisser sur un plan horizontal en faisant 60 tr/mn autour de son axe.

Calculer le moment cinétique résultant du disque: 1) par rapport à l'axe passant par le centre du disque perpendiculairement au plan du mouvement, 2) par rapport à l'axe instantané.

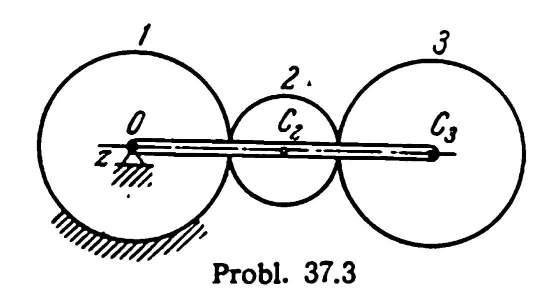
Rép. 1) 1,44 kgf m s; 2) 4,32 kgf m s.

37.2. Calculer le moment cinétique résultant de la règle AB d'un ellipsographe dans son mouvement absolu par rapport à l'axe z confondu avec l'axe de rotation de la manivelle OC, ainsi que dans son mouvement relatif par rapport à l'axe passant par le centre de gravité C de la règle, parallèlement à l'axe z. La manivelle tourne avec une vitesse angulaire dont la projection sur l'axe z est ω_z; la masse de la règle est m; $OC = AC = BC = l$ (cf. schéma du problème 34.5).

Rép. $L_{Oz} = \frac{2}{3} ml^2\omega_z$; $L_{Cz} = -\frac{ml^2\omega_z}{3}$.

37.3. Calculer le moment cinétique résultant d'une transmission planétaire par rapport à l'axe fixe z confondu avec l'axe de rotation de la manivelle OC_3. Les pignons fixe *1* et mobile *3* ont le même rayon r. La masse du pignon *3* est m, celle du pignon *2* est m_2, son rayon est r_2. La manivelle tourne avec une vitesse angulaire dont la projection sur l'axe z vaut ω_z. La masse de la manivelle est négligeable. Considérer les pignons comme des disques homogènes.

Rép. $L_{Oz} = \frac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\,\omega_z$.



Probl. 37.3

37.4. Les tensions des brins moteur et entraîné d'une courroie, faisant tourner une poulie de rayon $r=20$ cm et de poids $P=3{,}27$ kgf, sont respectivement: $T_1=10{,}1$ kgf, $T_2=5{,}05$ kgf. Quel doit être le moment des forces de résistance pour que la poulie tourne avec une accélération angulaire $\varepsilon=1{,}5\ \mathrm{s}^{-2}$? Considérer la poulie comme un disque homogène.

Rép. 1 kgfm.

37.5. Pour déterminer le moment de frottement dans des tourillons on fixe un volant de 0,5 t sur l'arbre; le rayon de giration du volant $\rho=1{,}5$ m. On communique au volant une vitesse angulaire correspondant à $n_0=$ $=240$ tr/mn, telle qu'abandonné à lui-même il s'arrête dans 10 mn. Calculer le moment de frottement en le considérant comme constant.

Rép. 4,8 kgfm.

37.6. Un disque homogène de 10 cm de diamètre et pesant 1 N fait 100 tr/mn. Une force constante de frottement appliquée à la jante du disque peut l'arrêter en 1 mn. Calculer la grandeur de cette force.

Rép. $4{,}4 \cdot 10^{-4}$ N.

37.7. Pour freiner rapidement de grands volants, on utilise un frein électrique comportant deux pôles diamétralement opposés dont les enroulements sont alimentés par un courant continu. Les courants induits dans la masse du volant pendant son mouvement à proximité des pôles créent un moment de freinage M_1 proportionnel à la vitesse v sur la jante du volant: $M_1=kv$, où k est un coefficient qui dépend du flux magnétique et des dimensions du volant. Le moment M_2 dû au frottement dans les paliers peut être considéré comme constant; le diamètre du volant est D, son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est J. Calculer le temps d'arrêt du volant s'il tourne à la vitesse angulaire ω_0.

Rép. $T=\dfrac{2J}{kD}\,\mathrm{Log}\left(1+\dfrac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

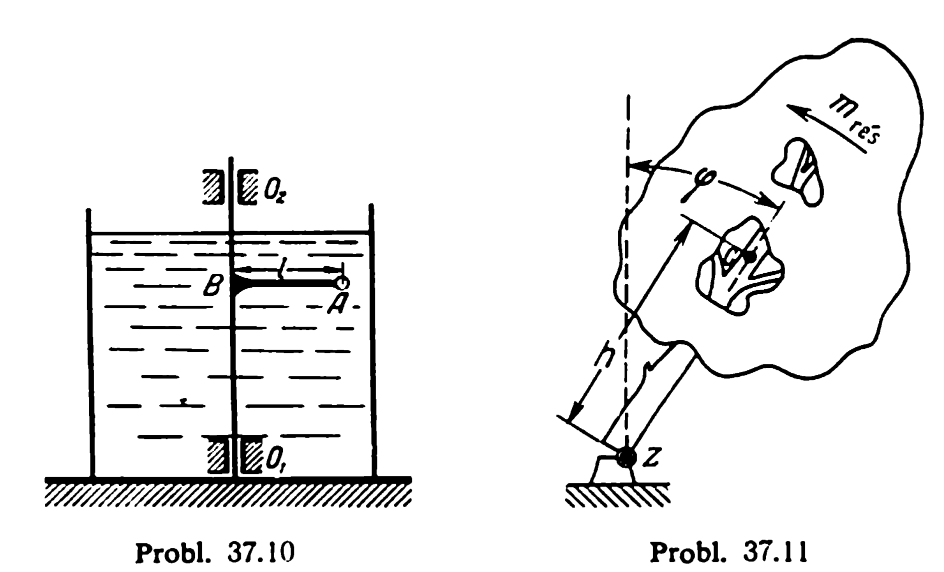
37.8. Un corps solide à l'arrêt est mis en rotation autour d'un axe vertical fixe par un couple constant M; le moment des forces de résistance M_1, qui se développe alors, est proportionnel au carré de la vitesse angulaire acquise par le corps solide: $M_1=\alpha\omega^2$. Trouver la loi de variation de la vitesse angulaire; le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe de rotation est J.

Rép. $\omega=\sqrt{\dfrac{M}{\alpha}}\,\dfrac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}$, où $\beta=\dfrac{2}{J}\sqrt{\alpha M}$.

37.9. Résoudre le problème précédent dans le cas où le moment des forces de résistance M_1 est proportionnel à la vitesse angulaire du corps solide: $M_1 = \alpha\omega$.

Rép. $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J}t}\right)$.

37.10. Une bille A, située dans un récipient contenant un liquide et fixée à l'extrémité d'une barre AB de longueur l, est mise en rotation autour d'un axe vertical O_1O_2 avec une vitesse angulaire initiale ω_0. La force de résistance du liquide est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation: $R = \alpha m\omega$, où m est la masse de la bille et α le coefficient de proportionnalité. Calculer l'intervalle de temps pendant lequel la vitesse angulaire de rotation devient deux fois plus petite que la vitesse angulaire initiale



Probl. 37.10 Probl. 37.11

ainsi que le nombre de tours que font la barre et la bille dans cet intervalle de temps. La masse de la bille est concentrée en son centre, la masse de la barre est négligeable.

Rép. $T = \frac{l}{\alpha}$ Log 2; $n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}$ tours.

37.11. Calculer la vitesse angulaire ω avec laquelle un arbre coupé, de poids G, tombe sur le sol, sachant que son centre de gravité C est situé à une distance h de sa base, les forces de résistance de l'air créant un moment de résistance de $m_{rés}$, $m_{rés\,z} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, où $\alpha = \text{const}$. Le moment d'inertie de l'arbre par rapport à l'axe z, confondu avec l'axe de rotation de l'arbre lors de sa chute, est J.

Rép. $\omega = \sqrt{\frac{2GhJ}{J^2 + 4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\frac{\alpha}{J}\right)}$.

37.12. Un arbre de rayon r est mis en rotation autour d'un axe horizontal par un poids suspendu à un fil. Pour que la grandeur de la vitesse

angulaire de l'arbre atteigne une valeur quasi constante quelque temps après le début du mouvement, on fixe à l'arbre n plaques identiques; la résistance de l'air agit perpendiculairement sur la plaque à une distance R de l'axe de l'arbre et est proportionnelle au carré de sa vitesse angulaire, le coefficient de proportionnalité étant k. La masse du poids est m, le moment d'inertie de toutes les parties tournantes par rapport à l'axe de rotation est J; négliger la masse du fil et le frottement dans les supports.

Calculer la vitesse angulaire ω de l'arbre, sachant qu'à l'instant initial elle est nulle.

Rép. $\omega=\sqrt{\frac{mgr}{knR}}\;\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, où $\alpha=\frac{2}{J+mr^2}\sqrt{mgnkrR}$;
pour des valeurs assez grandes de t la vitesse angulaire ω est proche de la grandeur constante $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

37.13. Déterminer la loi de rotation de l'arbre considéré dans le problème précédent, sachant qu'en l'absence du poids la vitesse angulaire initiale de l'arbre était ω_0. L'angle de rotation initial est nul.

Rép. $\varphi=\frac{J}{nkR}\operatorname{Log}\left(1+\frac{nkR\,\omega_0}{J}\,t\right)$.

37.14. Déterminer la loi de rotation de l'arbre considéré dans le problème 37.12, sachant que la force de résistance au mouvement est proportionnelle à la vitesse angulaire de l'arbre, l'angle de rotation initial étant nul.

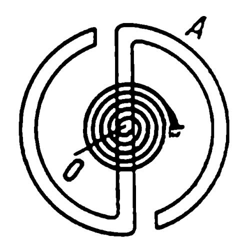
Rép. $\varphi=\sigma\left[t+\frac{1}{\gamma}\,(e^{-\gamma t}-1)\right]$, où $\sigma=\frac{mgr}{nkR}$, $\gamma=\frac{nkR}{J+mr^2}$.

37.15. Une boule homogène de rayon r et de masse m est suspendue à un fil élastique qu'on tord d'un angle φ_0 et qu'on laisse ensuite se détordre librement. Le moment nécessaire pour tordre le fil d'un radian est c.

Déterminer le mouvement en négligeant la résistance de l'air et en admettant que le moment de la force d'élasticité du fil tordu est proportionnel à l'angle de torsion φ.

Rép. $\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\;t$.

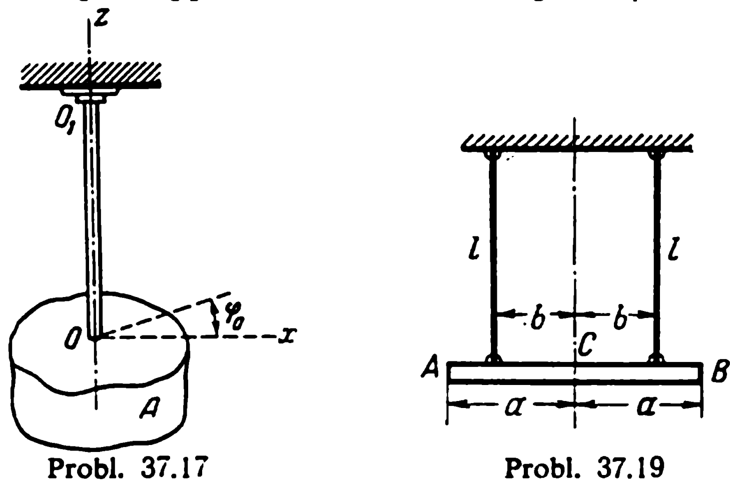
37.16. Le balancier A d'une montre peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par le centre de gravité O; le momentd'inertie du balancier par rapport à cet axe est J. Le balancier est entraîné par un ressort spiral dont une extrémité est reliée au balancier et l'autre au bâti fixe de la montre. La rotation du balancier engendre un moment des forces d'élasticité du ressort proportionnel à l'angle de rotation. Le moment nécessaire pour tordre le ressort d'un radian est c. Déterminer la loi du mouvement du balancier, sachant qu'à l'instant initial, en l'absence des forces d'élasticité, on a communiqué au balancier une vitesse angulaire initiale ω_0.



Probl. 37.16

Rép. $\varphi=\omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}\,\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\;t$.

37.17. Pour déterminer le moment d'inertie J_z d'un corps A par rapport à l'axe vertical Oz on le fixe à une barre verticale élastique OO_1 et l'on soumet cette barre à une torsion autour de l'axe Oz en tournant le corps A d'un petit angle φ_0; on la laisse ensuite osciller; la durée de 100 demi-cycles est $100T_1=2$ mn, où T_1 est la demi-période; le moment des forces d'élasticité par rapport à l'axe Oz est $m_z=-c\varphi$. Pour déterminer



Probl. 37.17 Probl. 37.19

le coefficient c on fait une seconde expérience: on fixe au point O de la barre un disque homogène de rayon $r=15$ cm et pesant 1,6 kgf; la durée d'un demi-cycle d'oscillation est alors $T_2=1,5$ s. Calculer le moment d'inertie J_z du corps.

Rép. $J_z=\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=0{,}117$ kgf m s².

37.18. Résoudre le problème précédent en supposant que la seconde expérience faite pour déterminer c se déroule autrement: un disque homogène de poids P et de rayon r est fixé au corps dont on veut déterminer le moment d'inertie. Calculer le moment d'inertie du corps J_z, sachant que sa période d'oscillation est τ_1, la période d'oscillation du corps et du disque étant τ_2.

Rép. $J_z=\frac{Pr^2}{2g}\,\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2-\tau_1^2}$.

37.19. Une barre homogène AB de longueur $2a$ est suspendue horizontalement par deux fils verticaux de longueur l et distants de $2b$. Calculer la période des oscillations de torsion de la barre; pendant le mouvement la barre reste horizontale et la tension de chacun des fils est égale à la moitié du poids de la barre.

Indication. Pour déterminer la composante horizontale de la tension de chacun des fils, supposer les oscillations du système petites et remplacer le sinus de l'angle formé entre la direction du fil et la verticale par l'angle lui-même.

Rép. $T=\frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

37.20. Un disque suspendu à un fil élastique effectue des oscillations de torsion dans un liquide. Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe du fil est J. Le moment nécessaire pour tordre le fil d'un

radian est c. Le moment de résistance au mouvement est $\alpha S\omega$, où α est le coefficient de viscosité du liquide, S la somme des aires des faces supérieure et inférieure du disque, ω sa vitesse angulaire. Calculer la période des oscillations du disque dans le liquide.

Rép. $T = \dfrac{4\pi J}{\sqrt{4cJ-\alpha^2S^2}}$.

37.21. Déterminer la loi de décroissance des amplitudes d'oscillations du disque considéré dans le problème précédent.

Rép. Les amplitudes d'oscillations du disque décroissent suivant une progression géométrique de raison $e^{-\frac{\alpha\pi S}{\sqrt{4cJ-\alpha^2S^2}}}$.

37.22. Un corps solide suspendu à un fil élastique effectue des oscillations de torsion sous l'action du moment extérieur m_e, $m_{e_z}=m_1 \sin \omega t + m_3 \sin 3\omega t$, où m_1, m_3 et ω sont des constantes, z étant l'axe dirigé suivant le fil. Le moment d'élasticité du fil est $m_{él}$, $m_{él\,z} = -c\varphi$, où c est le coefficient d'élasticité et φ l'angle de torsion. Déterminer la loi des oscillations forcées du corps solide si son moment d'inertie par rapport à l'axe des z est J_z. Négliger les forces de résistance. Supposer que $\sqrt{\dfrac{c}{J_z}} \neq \omega$ et $\sqrt{\dfrac{c}{J_z}} \neq 3\omega$.

Rép. $\varphi = \dfrac{h_1}{k^2-\omega^2} \sin \omega t + \dfrac{h_3}{k^2-9\omega^2} \sin 3\omega t$, où $k^2 = \dfrac{c}{J_z}$;

$h_1 = \dfrac{m_1}{J_z}$; $h_3 = \dfrac{m_3}{J_z}$.

37.23. Résoudre le problème précédent en tenant compte du moment de résistance $m_{rés}$ proportionnel à la vitesse angulaire du corps solide, $m_{rés\,z} = -\beta\dot{\varphi}$, où β est un coefficient constant.

Rép. $\varphi = A_1 \sin (\omega t - \varepsilon_1) + A_3 \sin (3\omega t - \varepsilon_3)$,

où $A_1 = \dfrac{h_1}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}$,

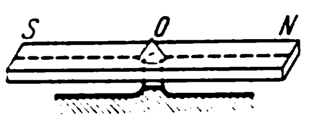
$A_3 = \dfrac{h_3}{\sqrt{(k^2-9\omega^2)^2+36n^2\omega^2}}$, $\varepsilon_1 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2n\omega}{k^2-\omega^2}$,

$\varepsilon_3 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{6n\omega}{k^2-9\omega^2}$, $n = \dfrac{\beta}{2J_z}$.

37.24. Pour déterminer le coefficient de viscosité du liquide on observe les oscillations d'un disque suspendu dans ce liquide à un fil élastique. Le disque est soumis au moment extérieur $M_0 \sin pt$ ($M_0 = \text{const}$) pour lequel se produit le phénomène de résonance. Le moment de résistance au mouvement du disque dans le liquide est $\alpha S\omega$, où α est le coefficient de viscosité du liquide, S la somme des aires des faces supérieure et inférieure du disque, ω sa vitesse angulaire. Déterminer le coefficient α de viscosité du liquide, sachant que l'amplitude des oscillations forcées du disque en résonance est φ_0.

Rép. $\alpha = \dfrac{M_0}{\varphi_0 S p}$.

37.25. Un aimant prismatique de masse m g long de $2a$ et large de $2b$ cm peut tourner autour d'un axe vertical, passant par son centre de gravité dans le champ magnétique terrestre. Ayant dévié l'aimant de sa position d'équilibre SN d'un très petit angle on l'abandonne à lui-même. Déterminer le mouvement de l'aimant, sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre agit sur l'unité de magnétisme avec une force de H dyn; le moment magnétique de l'aimant, c'est-à-dire le produit de la quantité de magnétisme concentrée aux pôles par leur distance $2a$, est égal à A unités dans le système CGS.



Probl. 37.25

Rép. Des oscillations harmoniques de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2+b^2)}{3AH}}.$$

37.26. La rotation d'un obus autour de son axe de symétrie se ralentit pendant son vol sous l'action du moment de la force de résistance de l'air égale à $k\omega$, où ω est la vitesse angulaire de rotation de l'obus, k un coefficient de proportionnalité constant. Déterminer la loi de décroissance de la vitesse angulaire, si la vitesse initiale est ω_0 et si le moment d'inertie de l'obus par rapport à son axe de symétrie est J.

Rép. $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$.

37.27. Pour déterminer l'accélération de la pesanteur on se sert d'un pendule réversible constitué par une barre munie de deux couteaux à trois faces A et B. L'un d'eux est fixe, l'autre peut se déplacer le long de la barre. En suspendant la barre soit par l'un soit par l'autre couteau et en changeant la distance AB entre eux, on peut arriver à ce que les périodes des oscillations du pendule autour de chacun d'eux soient égales. Calculer l'accélération de la pesanteur si la distance entre les couteaux pour laquelle les périodes des oscillations sont égales $AB = l$, la période étant T.

Rép. $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Probl. 37.27

37.28. Deux corps solides peuvent osciller autour d'un même axe horizontal, soit séparément, soit reliés. Calculer la longueur réduite du pendule composé, si les poids des corps solides sont p_1 et p_2, les distances de leurs centres de gravité à l'axe commun de rotation a_1 et a_2 et les longueurs réduites, dans le cas où ils oscillent séparément, l_1 et l_2.

Rép. $l_{réd} = \frac{p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2}$.

37.29. Pour régler la marche d'une montre on fixe au pendule de poids P, de longueur réduite l et dont la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension est a, un poids supplémentaire p, situé à une distance x de l'axe de suspension. Considérant le poids supplémentaire comme un

point matériel, calculer la variation Δl de la longueur réduite du pendule pour les valeurs données de p et x et la valeur $x = x_1$ pour laquelle la variation donnée Δl de la longueur réduite du pendule est obtenue à l'aide d'un poids supplémentaire de masse minimale.

Rép. On doit raccourcir la longueur réduite du pendule de

$$\Delta l_{\text{réd}} = \frac{px(x-l)}{Pa-px}\,; \qquad x_1 = \frac{1}{2}(l+\Delta l).$$

37.30. Pour déterminer le moment d'inertie J d'un corps donné par rapport à un certain axe AB passant par le centre de gravité G de ce corps, on le suspend par les barres AD et BE qui lui sont solidaires et fixées librement à un axe horizontal immobile DE, de sorte que l'axe AB soit parallèle à DE; en faisant ensuite osciller le corps, on détermine la durée T d'un demi-cycle d'oscillation. Calculer le moment d'inertie J si le poids du corps est p et la distance entre les axes AB et DE est h. Les masses des barres sont négligeables.

Rép. $J = hp\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$.

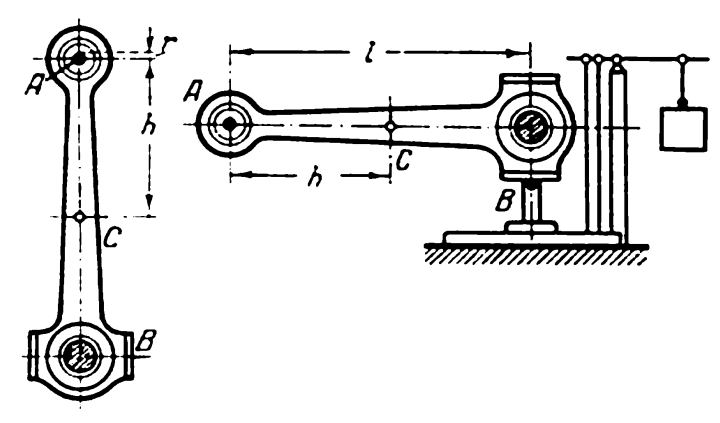
D E A G B

Probl. 37.30

37.31. Résoudre le problème précédent en tenant compte des masses des barres minces rectilignes homogènes AD et BE, sachant que le poids de chacune d'elles est Q.

Rép. $J = h\left[\frac{(P+Q)T^2}{\pi^2} - \frac{3P+2Q}{3g}h\right]$.

37.32. Pour déterminer le moment d'inertie d'une bielle on la fait osciller autour d'un axe horizontal, en faisant passer par le moyeu du pivot de la tête du piston une mince barre cylindrique. La durée de 100 demi-cycles $100T = 100$ s, où T est la demi-période. Ensuite, pour déterminer la distance $AC = h$ du centre de gravité C au centre A de l'ouverture, on place la bielle horizontalement en la suspendant au point A à un palan et en posant le point B sur le plateau d'une balance; la pression sur le plateau est alors $P = 50$ kgf. Calculer le moment d'inertie central J de la bielle par rapport à un axe perpendiculaire au plan du schéma, sachant que le poids de la bielle

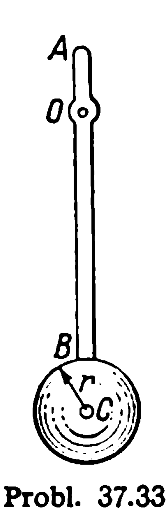


Probl. 37.32

$Q=80$ kgf, la distance entre les verticales menées par les points A et B (cf. schéma droit) $l=1$ m, le rayon du pivot de la tête de piston $r=4$ cm.

Rép. $J=\frac{Pl+Qr}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}T^2-\frac{P}{Q}l-r\right)=1{,}77$ kgf m s².

37.33. Un pendule est composé d'une barre AB de masse négligeable et d'une boule de masse m et de rayon r dont le centre C se trouve sur le prolongement de la barre. Déterminer en quel point de la barre doit se situer l'axe de suspension pour que la durée d'un demi-cycle, pour de petites oscillations, soit T.



Probl. 37.33

Rép. $OC=\frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2+\sqrt{g^2T^4-1{,}6\,\pi^4r^2}\right)$.

Etant donné que $OC\geqslant r$, la solution n'est possible que si $T^2\geqslant 1{,}4\,\frac{\pi^2}{g}r$; la solution correspondant au signe moins devant le radical est impossible.

37.34. A quelle distance de son centre de gravité doit-on suspendre un pendule physique pour que la période de ses oscillations soit minimale?

Rép. A une distance égale au rayon de giration du pendule par rapport à l'axe passant par son centre de gravité perpendiculairement au plan des oscillations.

37.35. Un pendule est composé d'une barre et de deux poids fixés sur elle, distants de l; la masse du poids supérieur est m_1, celle du poids inférieur m_2. Déterminer à quelle distance x du poids inférieur doit se situer l'axe de suspension pour que la période des petites oscillations du pendule soit minimale; négliger la masse de la barre et considérer les poids comme des points matériels.

Rép. $x=l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}}{m_1+m_2}$.

37.36. A quelle distance de l'axe de suspension doit-on fixer un poids supplémentaire à un pendule physique pour que la période de ses oscillations reste inchangée?

Rép. A une distance égale à la longueur réduite du pendule physique.

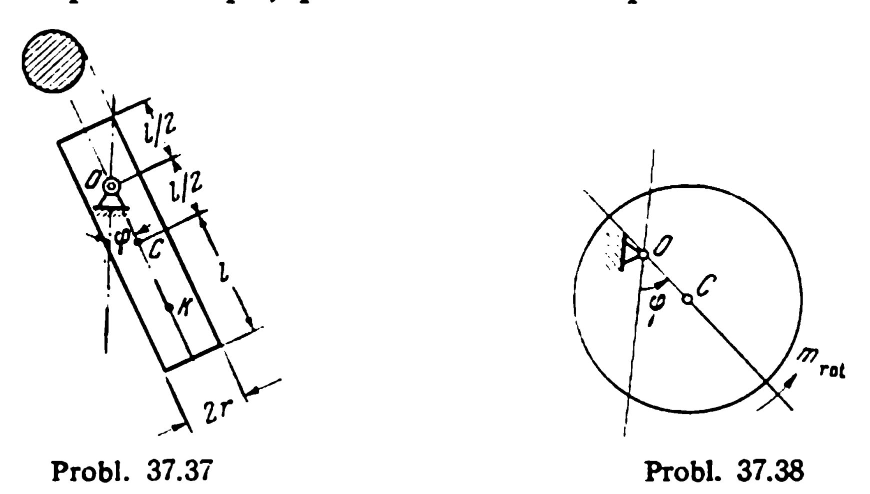
37.37. Un cylindre circulaire de masse M, de longueur $2l$ et de rayon $r=l/6$ oscille autour de l'axe O perpendiculaire au plan du schéma.

Comment varie la période des oscillations du cylindre si l'on y fixe une masse ponctuelle m à une distance $OK=\frac{85}{72}l$?

Rép. La période des oscillations ne varie pas, car la masse ponctuelle a été fixée au centre des oscillations du cylindre.

37.38. Ecrire l'équation des petites oscillations d'un disque homogène de poids P et de rayon r qui effectue des oscillations autour de l'axe horizon-

tal Oz perpendiculaire à son plan et situé à la distance de $OC=r/2$ de son centre de gravité C. Le disque est soumis à l'action d'un moment de rotation m_{rot}, $m_{rot\,z}=m_0 \sin pt$, où m_0 et p sont des constantes. A l'instant initial on communique au disque, qui se trouve dans sa position inférieure, une



Probl. 37.37 Probl. 37.38

vitesse angulaire ω_0. Les forces de résistance sont négligeables. Les oscillations étant petites poser $\sin\varphi \approx \varphi$.

Rép. 1) Lorsque $p \neq \sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $\varphi=\frac{1}{k}\left(\omega_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\right)\sin kt+$

$+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$, où $k=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $h=\frac{4gm_0}{3Pr^2}$;

2) lorsque $p=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $\varphi=\frac{1}{p}\left(\omega_0+\frac{h}{2p}\right)\sin t-$

$-\frac{h}{2p}t\cos pt$, où $h=\frac{4gm_0}{3Pr^2}$.

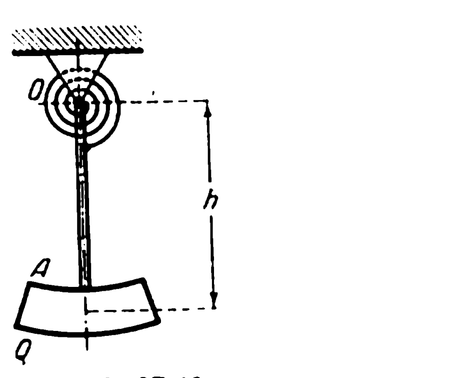
37.39. Dans les sismographes destinés à enregistrer les tremblements de terre, on utilise un pendule physique dont l'axe de suspension forme un angle α avec la verticale. La distance de l'axe de suspension au centre de gravité du pendule est a, le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe passant par son centre de gravité parallèlement à l'axe de suspension est J_C, le poids du pendule est P. Calculer la période des oscillations du pendule.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{gJ_C+Pa^2}{Pga\sin\alpha}}$.

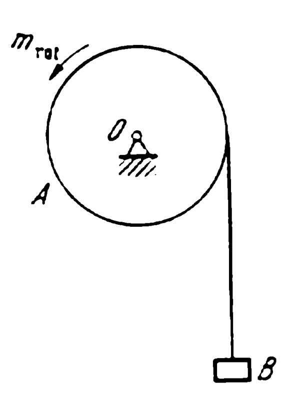
37.40. Dans un vibrographe destiné à enregistrer les oscillations horizontales des fondements des machines, le pendule OA, composé d'un levier portant un poids à son extrémité, peut osciller autour de son axe horizontal O; il est maintenu dans la position verticale d'équilibre stable par son propre poids et par un ressort spiral. Calculer la période des oscillations propres du pendule pour de petits angles de déviation, sachant que le moment maximal statique de son poids par rapport à son axe de rotation $Qh=4{,}5$ kgf cm, le moment d'inertie par rapport à ce même axe $J=$

$=0{,}03$ kgf cm s², la rigidité du ressort, dont la résistance est proportionnelle à l'angle de torsion, $c=0{,}1$ kgf cm; dans la position d'équilibre du pendule le ressort est à l'état non déformé. Négliger les résistances.

Rép. $T=0{,}5$ s.



Probl. 37.40

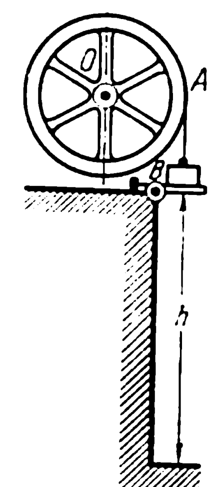


Probl. 37.42

37.41. Un vibrographe (cf. problème précédent) est fixé à un fondement effectuant des oscillations harmoniques horizontales suivant la loi: $x=a\sin 60t$ cm. Calculer l'amplitude a des oscillations du fondement, si l'amplitude des oscillations forcées du pendule du vibrographe est de 6°.

Rép. $a=6{,}5$ mm.

37.42. Lors du démarrage d'un treuil électrique le tambour A est soumis à l'action d'un couple moteur m_{rot} proportionnel au temps, $m_{rot}=at$, où a est une constante. La charge B de poids P_1 monte à l'aide d'un câble enroulé sur le tambour A de rayon r et de poids P_2. Calculer la vitesse angulaire du tambour considéré comme un cylindre plein. A l'instant initial le treuil était à l'arrêt.



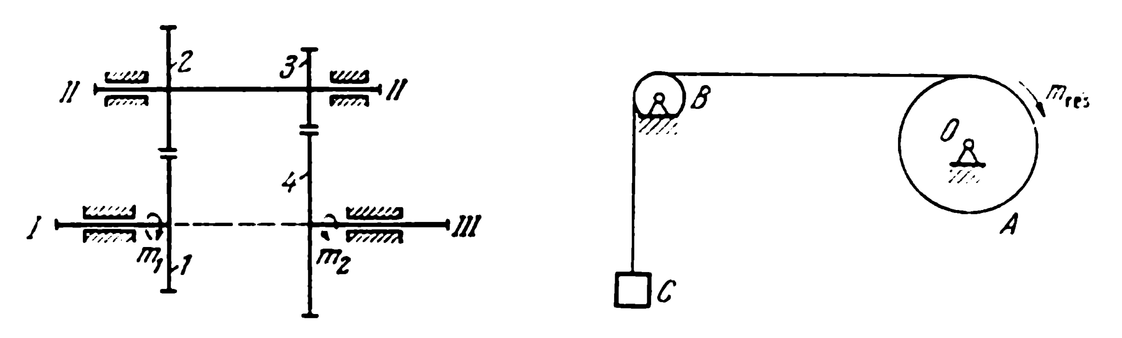
Probl. 37.43

Rép. $\omega=\dfrac{(at-2P_1r)\,gt}{r^2(2P_1+P_2)}$.

37.43. Pour déterminer le moment d'inertie J du volant A de rayon $R=50$ cm par rapport à un axe passant par son centre de gravité, on enroule sur le volant un fil fin portant un poids $p_1=8$ kgf à une extrémité. On observe la durée $T=16$ s pour la descente du poids d'une hauteur $h=2$ m. Afin d'éliminer les frottements dans les paliers, on fait une seconde expérience avec un poids $p_2=4$ kgf, la durée de descente étant alors $T_2=25$ s pour la même hauteur. Supposant le moment de la force de résistance constant et indépendant de la grandeur des poids, calculer le moment d'inertie J.

$$\textit{Rép.}\quad J=R^2\,\frac{\dfrac{1}{2h}(p_1-p_2)-\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{p_1}{T_1^2}-\dfrac{p_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2}-\dfrac{1}{T_2^2}}=108\ \text{kgf m s}^2.$$

37.44. Un moteur électrique, dont le couple moteur est m_1, est branché sur l'arbre *I*. Ce couple est transmis au moyen d'un réducteur comportant quatre pignons *1*, *2*, *3* et *4* à l'arbre *III* d'un tour auquel est appliqué un moment de résistance m_2 (ce moment est dû à la formation de copeaux lors du façonnage de l'objet). Calculer l'accélération angulaire de l'arbre *III*, si les moments d'inertie de toutes les parties tournantes fixées sur les axes *I*, *II* et *III* sont respectivement J_I, J_{II}, J_{III}. Les rayons des pignons sont r_1, r_2, r_3 et r_4.



Probl. 37.44 Probl. 37.45

Rép. $\varepsilon_{III}=\dfrac{m_1 k_{1,2}\cdot k_{3,4}-m_2}{(J_I k_{1,2}^2+J_{II})k_{3,4}^2+J_{III}}$, où $l_{1,2}=\dfrac{r_2}{r_1}$, $k_{3,4}=\dfrac{r_4}{r_3}$.

37.45. *L*e tambour *A* de poids P_1 et de rayon *r* est mis en rotation par une charge *C* de poids P_2 attachée à l'extrémité d'un câble inextensible. Le câble passe sur une poulie *B* et s'enroule sur le tambour *A* qui est soumis à l'action d'un moment de résistance $m_{rés}$ proportionnel à sa vitesse angulaire, le coefficient de proportionnalité étant α. Calculer la vitesse angulaire du tambour si à l'instant initial le système était au repos. Les masses du câble et de la poulie sont négligeables. Le tambour est considéré comme un cylindre plein homogène.

Rép. $\omega=\dfrac{P_2 r}{\alpha}\left(1-e^{-\beta t}\right)$, où $\beta=\dfrac{2g\alpha}{r^2(P_1+2P_2)}$; $\lim\limits_{t\to\infty}\omega=\dfrac{P_2 r}{\alpha}=\text{const.}$

37.46. Déterminer l'accélération angulaire ε de la roue motrice d'une automobile de poids *P* et de rayon *r*, sachant qu'un couple moteur C_m lui est appliqué. Le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe passant par le centre de gravité *C* perpendiculairement au plan de symétrie matérielle est J_C; le coefficient de résistance au roulement est f_r, la force de frottement F_{fr}. Calculer aussi la valeur du couple moteur pour laquelle la roue tourne avec une vitesse angulaire constante.

Rép. $\varepsilon=\dfrac{C_m-Pf_r-F_{fr}r}{I_C}$; $C_m=Pf_r+F_{fr}r$.

37.47. Déterminer la vitesse angulaire d'une roue entraînée d'une automobile, de poids *P* et de rayon *r*. La roue, roulant avec glissement sur une chaussée horizontale, est entraînée par une force horizontale appliquée en son centre de gravité *C*. Le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe

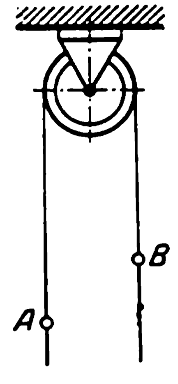
C perpendiculaire au plan de symétrie matérielle est J_C; le coefficient de résistance au roulement est f_r, le coefficient de frottement est f. A l'instant initial la roue était au repos.

Rép. $\omega = \frac{P}{J_C}(fr - f_r)\,t$.

37.48. Comment varie la vitesse angulaire de la roue considérée dans le problème précédent, si le module de la force appliquée en son centre de gravité C croît de deux fois?

Rép. Ne varie pas.

37.49. Une corde passe sur une poulie de masse négligeable. Un homme est cramponné au point A de la corde; une charge de même poids que l'homme est attachée au point B. Quel est le mouvement de la charge si l'homme commence à monter avec une vitesse a par rapport à la corde?



Probl. 37.49

Rép. La charge monte avec la corde à la vitesse de $a/2$.

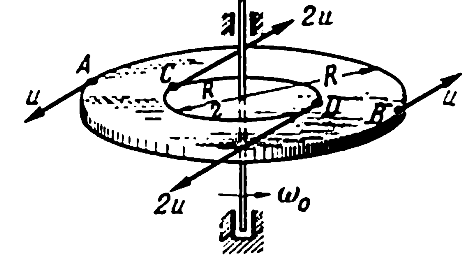
37.50. Résoudre le problème précédent en tenant compte du poids de la poulie qui est quatre fois plus petit que le poids de l'homme, la masse de la poulie étant répartie uniformément sur sa jante.

Rép. La charge monte à la vitesse de $\frac{4}{9}a$.

37.51. Une plate-forme circulaire horizontale peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical Oz passant par son centre O; un homme de poids p marche sur la plate-forme avec une vitesse relative constante u et à une distance constante r de l'axe Oz.

Quelle est la vitesse angulaire de rotation ω de la plate-forme, si l'on suppose que son poids P est uniformément réparti sur l'aire d'un cercle de rayon R et qu'à l'instant initial les vitesses de la plate-forme et de l'homme étaient nulles?

Rép. $\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2}\,u$.



Probl. 37.52

37.52. Une plate-forme circulaire horizontale tourne sans frottement autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité avec une vitesse angulaire constante ω_0; quatre hommes sont debout sur cette plate-forme, deux à son bord et deux à une distance de l'axe de rotation égale au demi-rayon de la plate-forme. Comment la vitesse angulaire de la plate-forme va-t-elle varier si les hommes situés au bord se déplacent suivant la circonférence dans le sens de rotation avec une vitesse relative linéique u et les deux autres hommes se déplacent en sens inverse suivant une circonférence avec une vitesse relative linéique $2u$? Les hommes sont considérés comme

des masses ponctuelles et la plate-forme comme un disque circulaire homogène.

Rép. La plate-forme tournera avec la même vitesse angulaire.

37.53. Résoudre le problème précédent en supposant que tous les hommes se déplacent dans le sens de rotation de la plate-forme. Le rayon de la plate-forme est R, sa masse est quatre fois plus grande que la masse de chacun des hommes et se trouve uniformément répartie sur toute son aire. Calculer également la valeur de la vitesse relative linéique u pour laquelle la plate-forme cesse de tourner.

Rép. $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$; $u = \frac{9}{8} R\omega_0$.

37.54. On communique à un homme debout, les bras tendus, sur un tabouret de Joukovski la vitesse angulaire initiale de 15 tr/mn; le moment d'inertie de l'homme sur le tabouret par rapport à l'axe de rotation est alors égal à 0,8 kgf m s^2. Avec quelle vitesse angulaire le tabouret se met-il à tourner avec l'homme, si ce dernier, approchant les bras du corps, abaisse le moment d'inertie du système à 0,12 kgf m s^2 ?

Rép. 100 tr/mn.

37.55. Deux corps solides tournent indépendamment l'un de l'autre autour d'un même axe fixe avec des vitesses angulaires constantes ω_1 et ω_2. Les moments d'inertie de ces corps par rapport à l'axe sont respectivement J_1 et J_2. Avec quelle vitesse angulaire les deux corps se mettent-ils à tourner s'ils sont reliés pendant la rotation?

Rép. $\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$.

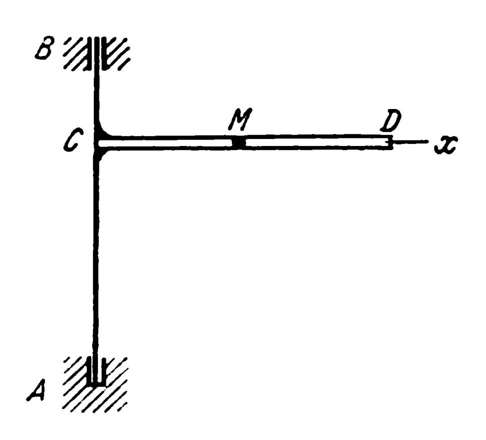
37.56. Un tube horizontal CD peut tourner librement autour de l'axe vertical AB. A l'intérieur du tube, à une distance $MC = a$ de l'axe, se trouve une bille M. A un moment donné on communique au tube une vitesse angulaire initiale ω_0. Calculer la vitesse angulaire ω du tube à l'instant où la bille quitte le tube. Le moment d'inertie du tube par rapport à l'axe de rotation est J, sa longueur est L; négliger le frottement, considérer la bille comme un point matériel de masse m. (Voir fig. p. 326.)

Rép. $\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$.

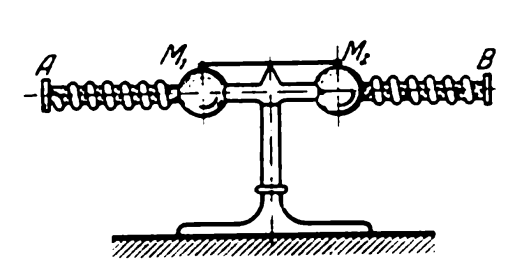
37.57. Une barre homogène AB de longueur $2L = 180$ cm et de poids $Q = 2$ N est posée sur une pointe dans une position d'équilibre stable de sorte que son axe soit horizontal. Deux boules M_1 et M_2, pesant chacune $P = 5$ N et fixées aux extrémités de deux ressorts identiques, peuvent se déplacer le long de cette barre. On communique à la barre un mouvement de rotation autour de l'axe vertical, dont la vitesse angulaire $n_1 = 64$ tr/mn, les boules étant disposées symétriquement par rapport à l'axe de rotation et leurs centres étant retenus au moyen d'un fil à une distance $2l_1 = 72$ cm l'un de l'autre. Ce fil est ensuite brûlé et les boules ayant effec-

tué quelques oscillations sous l'action des ressorts et des forces de frottement occupent leurs positions d'équilibre distantes de $2l_2=108$ cm. Considérant les boules comme des points matériels et négligeant les masses des ressorts, déterminer le nouveau nombre de tr/mn n_2 de la barre.

Rép. $n_2=\frac{6Pl_1^2+QL^2}{6Pl_2^2+QL^2}n_1=34$ tr/mn.

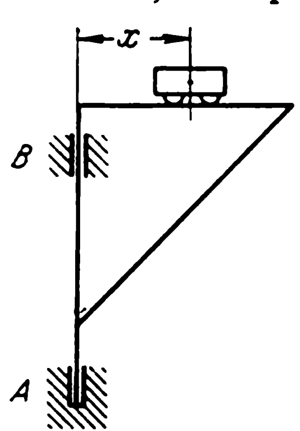


Probl. 37.56



Probl. 37.57

37.58. Le chariot d'une grue tournante se déplace avec une vitesse constante **v** par rapport à la flèche. Le moteur de la grue crée, pendant la course de celle-ci, un couple constant m_0. Calculer la vitesse angulaire ω de rotation de la grue en fonction de la distance x du chariot à l'axe de rotation AB, si le poids du chariot avec la charge est P, le moment d'inertie de la grue (sans le chariot) par rapport à l'axe de rotation étant J; la rotation commence à l'instant où la distance du chariot à l'axe AB est x_0.



Probl. 37.58

Rép. $\omega=\frac{m_0}{J+\frac{P}{g}x^2}\cdot\frac{x-x_0}{v}$.

37.59. Calculer, dans les conditions du problème précédent, la vitesse angulaire ω de rotation de la grue, si le moteur crée un couple égal à $m_0-\alpha\omega$, où m_0 et α sont des constantes positives.

Rép. $\omega=\frac{m_0}{v\left(J+\frac{P}{g}x^2\right)}e^{-\mu\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{k}}\int_{x_0}^{x}e^{\mu\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{k}}dx$, où $k=\sqrt{\frac{gJ}{P}}$,

$\mu=\frac{\alpha}{v_x}\sqrt{\frac{g}{JP}}$ (l'axe des x est dirigé horizontalement à droite le long de la flèche).

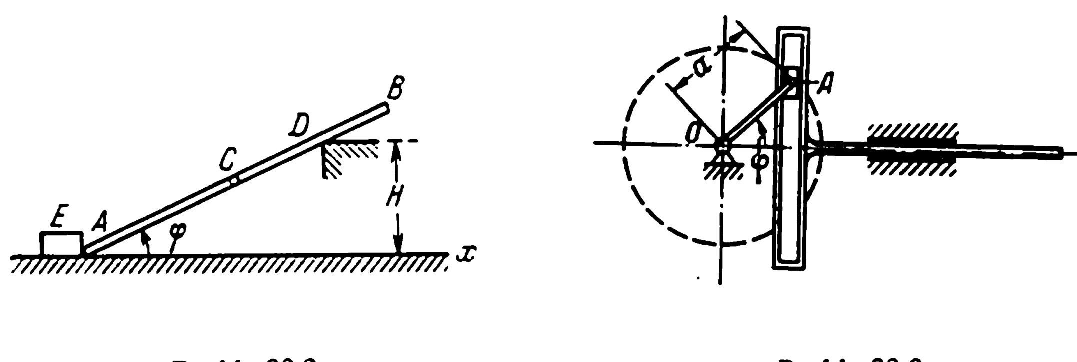
§ 38. Théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système matériel

38.1. Calculer l'énergie cinétique d'un mécanisme plan composé de trois éléments AB, BC et CD fixés au plafond par des articulations cylindriques et articulés en B et C. Le poids de chacun des éléments AB et CD, de longueur l, est P_1, le poids de l'élément BC est P_2, de plus, $BC=AD$. Les éléments AB et DC tournent avec une vitesse angulaire ω.

Rép. $T=\frac{2P_1+3P_2}{6g}\ l^2\omega^2$.

Probl. 38.1

38.2. Une barre mince homogène AB de poids P repose sur l'angle D; son extrémité A glisse dans un guide horizontal. L'appui E se déplace à droite avec une vitesse constante $\mathbf{v}$. Trouver l'énergie cinétique de la barre



Probl. 38.2 Probl. 38.3

en fonction de l'angle φ, si la longueur de la barre est $2l$, la hauteur de l'angle D au-dessus du guide horizontal étant H.

$$Rép.\ \ T=\frac{Pv^2}{2g}\left(1-2\ \frac{l}{H}\ \sin^3\varphi+\frac{4}{3}\ \frac{l^2}{H^2}\ \sin^4\varphi\right).$$

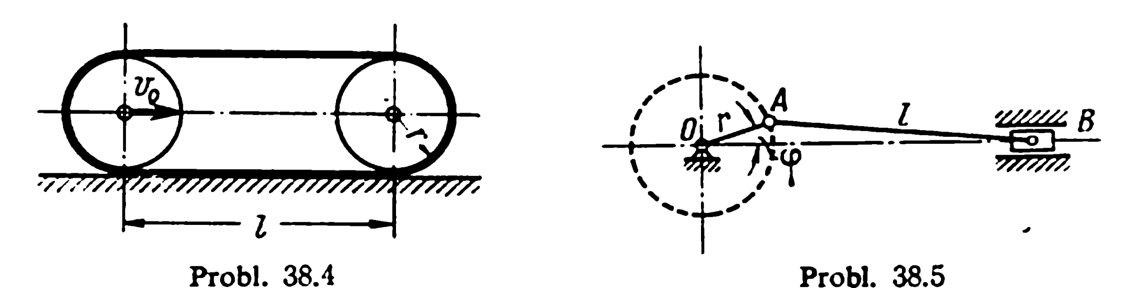
38.3. Calculer l'énergie cinétique d'un mécanisme à coulisse, si le moment d'inertie de la manivelle OA, par rapport à l'axe de rotation perpendiculaire au plan du schéma, est J_0; la longueur de la manivelle est a, la masse de la coulisse m, la masse du coulisseau A est négligeable. La manivelle OA tourne avec la vitesse angulaire ω. Pour quelles positions du mécanisme l'énergie cinétique atteint-elle sa plus grande et sa plus petite valeur?

Rép. $T=\frac{1}{2}\ (J_0+ma^2\sin^2\varphi)\ \omega^2$.

L'énergie cinétique est minimale pour les positions extrêmes de la coulisse et maximale lorsque la coulisse passe par la position moyenne.

38.4. Déterminer l'énergie cinétique de la chenille d'un tracteur se déplaçant avec la vitesse $\mathbf{v}_0$. La distance entre les axes des roues est l, le rayon de chaque roue est r, le poids spécifique de la chenille est γ kgf/m.

Rép. $T = 2\,\frac{\gamma}{g}\,(l+\pi r)\,v_0^2.$



Probl. 38.4

Probl. 38.5

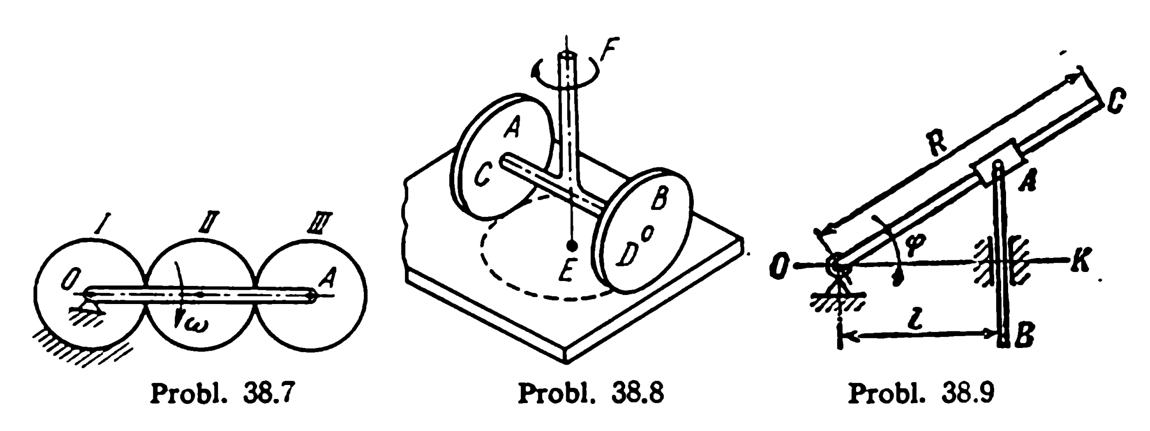
38.5. Calculer l'énergie cinétique d'un mécanisme bielle-manivelle, si la masse de la manivelle est m_1, sa longueur r, la masse du coulisseau m_2, la longueur de la bielle l, sa masse étant négligeable. Considérer la manivelle comme une barre tournant avec une vitesse angulaire ω.

$$Rép.\ T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\,m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\,\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\} r^2\omega^2.$$

38.6. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse de la bielle m_3 lorsque la manivelle OA est perpendiculaire au guide du coulisseau.

Rép. $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,m_1 + m_2 + m_3\right) r^2\omega^2.$

38.7. Un mécanisme planétaire situé dans un plan horizontal est entraîné par une manivelle OA reliant les axes de trois roues identiques I, II et III de rayon r. La roue I est fixe; la manivelle tourne avec une vitesse angulaire ω. Le poids de chacune des roues est P, le poids de la manivelle est



Probl. 38.7

Probl. 38.8

Probl. 38.9

Q. Calculer l'énergie cinétique du mécanisme en considérant les roues comme des disques homogènes et la manivelle comme une barre homogène. Calculer la grandeur du travail accompli par le couple de forces appliqué à la roue *III*.

Rép. $T=\frac{r^2\omega^2}{3g}(33P+8Q)$; le travail est nul.

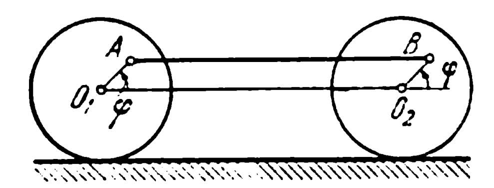
38.8. Les meules courantes A et B sont montées sur un axe horizontal CD qui tourne autour d'un axe vertical EF; chaque meule pèse 200 kgf; leurs diamètres mesurent chacun 1 m; la distance entre elles est $CD=1$ m. Déterminer l'énergie cinétique de chaque meule lorsque l'axe CD fait 20 tr/mn. En calculant les moments d'inertie des meules on peut les considérer comme des disques minces homogènes.

Rép. 39 kgf m.

38.9. Dans un mécanisme à coulisse le coulisseau A se déplace le long du levier OC pendant l'oscillation de celui-ci autour de l'axe O perpendiculaire au plan du schéma, et fait mouvoir la barre AB dans des guides verticaux K. Considérer le levier OC de longueur R comme une barre homogène de masse m_1, la masse du coulisseau est m_2, la masse de la barre AB est m_3. $OK=l$. Exprimer l'énergie cinétique du mécanisme en fonction de la vitesse angulaire et de l'angle de rotation du levier OC. Considérer le coulisseau comme une masse ponctuelle.

Rép. $T=\frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}[m_1 R^2\cos^4\varphi+3l^2(m_2+m_3)]$.

38.10. Calculer l'énergie cinétique d'un système composé de deux roues reliées par l'accouplement AB et la barre O_1O_2, si les axes des roues se déplacent avec la vitesse $\mathbf{v}_0$. Le poids de chaque roue est P_1. L'accouplement AB et la barre O_1O_2 pèsent chacun P_2. La masse des roues est uniformément répartie sur leurs jantes; $O_1A=O_2B=r/2$, où r est le rayon de la roue. Les roues tournent sans glisser sur un rail horizontal.



Probl. 38.10

Rép. $T=\frac{v_0^2}{8g}[16P_1+P_2(9+4\sin\varphi)]$.

38.11. Une automobile de poids P se déplace en ligne droite sur une route horizontale à la vitesse $\mathbf{v}$. Le coefficient de résistance au roulement des roues est f_r, le rayon des roues est r, la force de résistance aérodynamique

$R_{rés}$ de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse: $R_{rés}=\mu P v^2$, où μ est un coefficient qui dépend de la forme de l'automobile. Trouver la puissance N du moteur transmise aux roues motrices à un régime stationnaire.

Rép. $N=P\left(\frac{f_r}{r}+\mu v^2\right)v.$

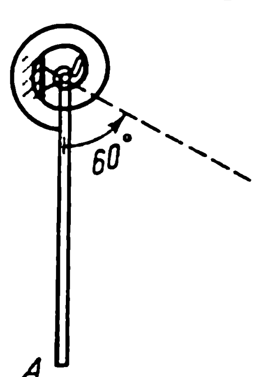
38.12. Un volant dont le diamètre est de 50 cm et faisant 180 tr/mn est monté sur un arbre dont le diamètre mesure 60 mm. Calculer le coefficient de frottement f entre les paliers et l'arbre, si après le débranchement de la transmission le volant effectue 90 tours avant de s'arrêter. Supposer que la masse du volant est uniformément répartie sur sa jante, la masse de l'arbre étant négligeable.

Rép. $f=0{,}07$.

38.13. Un volant de 2 m de diamètre et pesant 3 t est monté sur un arbre cylindrique dont le diamètre mesure 10 cm et pesant 0,5 t. A l'instant considéré l'arbre tourne avec la vitesse angulaire de 60 tr/mn, il est ensuite abandonné à lui-même. Combien de tours fait-il encore avant de s'arrêter, si le coefficient de frottement dans les paliers est de 0,05? Supposer que la masse du volant est uniformément répartie suivant sa périphérie.

Rép. 109,8 tours.

38.14. Une barre homogène OA de longueur l et de poids P peut tourner autour d'un axe horizontal fixe O passant par son extrémité perpendiculairement au plan du schéma. L'une des extrémités d'un ressort spiral, de rigidité c, est reliée à l'axe fixe O, l'autre étant reliée à la barre. La barre est au repos dans la position verticale, le ressort n'étant pas alors déformé. Quelle vitesse faut-il communiquer à l'extrémité A de la barre pour qu'elle dévie de la verticale d'un angle égal à 60°?



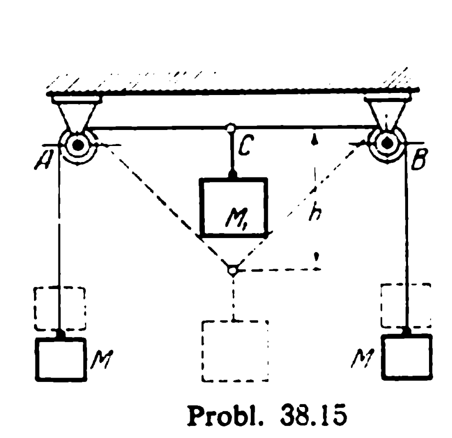
Probl. 38.14

Rép. $v=\sqrt{\frac{g(9Pl+2\pi^2 c)}{6P}}.$

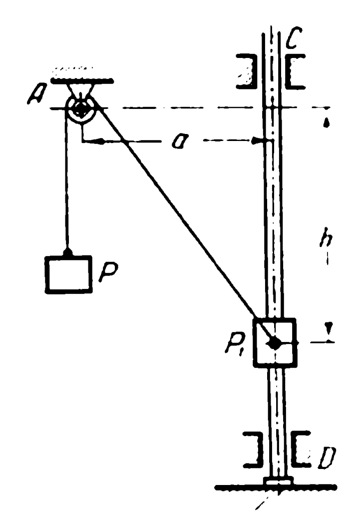
38.15. Deux charges M pesant chacune p gf sont suspendues aux extrémités d'un fil passant sur deux poulies A et B, ituées sur la même horizontale à une distance $AB=2l$ l'une de l'autre. Au point médian C entre les poulies on attache au fil une charge M_1 pesant p_1 gf et on la laisse tomber sans vitesse initiale. Calculer la distance maximale h d'abaissement de la charge M_1 en supposant que la longueur du fil est assez grande et que $p_1<2p$. Les dimensions des poulies sont négligeables.

Rép. $h=\frac{4pp_1 l}{4p^2-p_1^2}.$

38.16. Deux poids P et P_1 sont suspendus aux extrémités d'un fil flexible inextensible passant sur une poulie infiniment petite A. Le poids P_1 peut glisser le long d'une barre lisse verticale CD distante de l'axe de la



Probl. 38.15

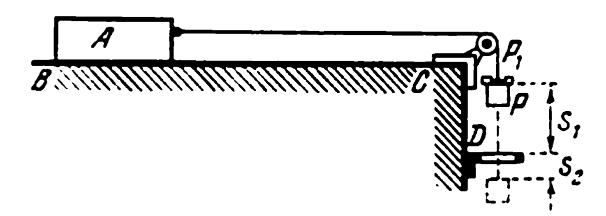


Probl. 38.16

poulie de a; à l'instant initial le centre de gravité du poids P_1 était à la hauteur de l'axe de la poulie; sous l'effet de la pesanteur le poids P_1 commence à descendre sans vitesse initiale. Trouver la relation entre la vitesse du poids P_1 et la hauteur de chute h.

Rép. $v^2 = 2g\,(a^2 + h^2)\dfrac{P_1 h - P(\sqrt{a^2+h^2} - a)}{P_1 (a^2+h^2) + Ph^2}$.

38.17. Un corps A de poids Q, à l'état de repos sur un plan horizontal rugueux BC, est mis en mouvement par un poids P avec sa surcharge P_1, à l'aide d'un fil passant sur une poulie. Ayant parcouru une distance s_1, le poids P passe par l'anneau D qui retire la surcharge P_1, après quoi le



Probl. 38.17

poids P parcourt une distance s_2 et s'arrête. Déterminer le coefficient de frottement f entre le corps A et le plan en négligeant la masse du fil et de la poulie ainsi que le frottement dans la poulie; on a: $Q = 0{,}8$ kgf, $P = 0{,}1$ kgf, $s_1 = 50$ cm, $s_2 = 30$ cm.

Rép. $f = \dfrac{s_1 (P_1 + P)(P + Q) + s_2 P (P + P_1 + Q)}{Q\,[s_1 (P + Q) + s_2 (P + P_1 + Q)]} = 0{,}2.$

38.18. Un fil homogène de longueur L dont une partie est située sur une table lisse horizontale, se déplace sous l'action du poids de l'autre partie qui pend de la table. Calculer l'intervalle de temps T au cours duquel

le fil quitte la table, sachant qu'à l'instant initial la longueur de la partie pendante est l, la vitesse initiale étant nulle.

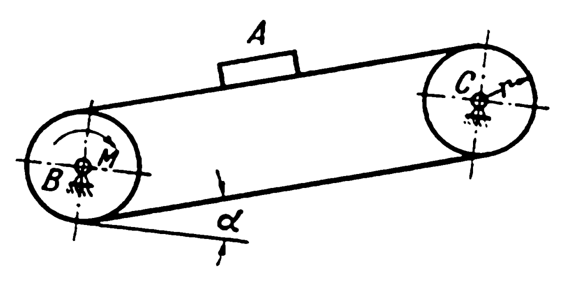
Rép. $T=\sqrt{\frac{L}{g}}\ \mathrm{Log}\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right).$

38.19. Un fil homogène pesant, de longueur $2a$, qui à l'état de repos pendait d'une goupille, commence à se mouvoir avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$.

Calculer la vitesse du fil à l'instant où il quitte la goupille.

Rép. $v=\sqrt{ag+v_0^2}.$

38.20. Un transporteur est mis en mouvement par une transmission passant sur la poulie inférieure B et transmettant à cette poulie un couple moteur constant M.



Probl. 38.20

Exprimer la vitesse v de la bande du transporteur en fonction de son déplacement s, sachant que le poids de la charge montée A est P, les poulies B et C de rayon r et de poids Q chacune étant considérées comme des cylindres circulaires homogènes.

La bande du transporteur dont la masse est négligeable forme un angle α avec l'horizontale. La bande ne glisse pas sur les poulies.

Rép. $v=\sqrt{\frac{2g\,(M-Pr\sin\alpha)}{r\,(P+Q)}s}.$

38.21. Un tube horizontal CD de longueur L peut tourner librement autour d'un axe vertical AB (cf. schéma du problème 37.56). A l'intérieur du tube, à une distance $MC=x_0$ à l'axe, se trouve une bille M. A un moment donné on communique au tube une vitesse angulaire initiale ω_0.

Déterminer la vitesse v de la bille M par rapport au tube à l'instant où elle quitte le tube. Le moment d'inertie du tube par rapport à l'axe de rotation est J; négliger le frottement. Considérer la bille comme un point matériel de masse m.

Indication. Utiliser la réponse du problème 37.56.

Rép. $v=\omega_0\sqrt{\frac{J+mx_0^2}{J+mL^2}(L^2-x_0^2)}.$

38.22. Un corps B se déplace avec une vitesse relative constante $\mathbf{u}_0$ sur une plate-forme horizontale A se déplaçant sans frottement (cf. schéma

du problème 36.11). Le freinage du corps B engendre une force de frottement entre ce corps et la plate-forme A. Calculer le travail accompli par les forces intérieures de frottement entre le corps B et la plate-forme A à partir de l'instant de freinage jusqu'à l'arrêt complet du corps B par rapport à la plate-forme A, si leurs masses sont respectivement m et M.

Indication. Utiliser la réponse du problème 36.11.

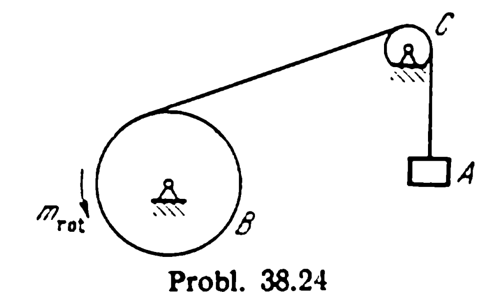
Rép. $A=-\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}u_0^2$.

38.23. Lors du démarrage d'un treuil à l'aide d'un électromoteur, ce dernier transmet à l'axe du tambour A de rayon r et de poids P_1 un couple m_{rot} proportionnel à l'angle de rotation φ du tambour, le coefficient de proportionnalité étant a (cf. schéma du problème 37.42). Calculer la vitesse de la charge levée B de poids P_2 en fonction de la hauteur h de montée. Considérer le tambour A comme un cylindre homogène. Négliger la masse du câble. A l'instant initial le système était au repos.

Rép. $v=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2gh(ah-2P_2r^2)}{P_1+2P_2}}$.

38.24. Une charge A de poids P_1 est soulevée à l'aide d'un câble passant sur une poulie C et enroulé sur le tambour B de rayon r et de poids P_2 (cf. schéma du treuil). Le tambour est soumis à l'action d'un couple proportionnel au carré de l'angle de rotation φ du tambour dès l'instant initial: $m_{rot}=a\varphi^2$, où a est un coefficient constant. Trouver la vitesse de la charge A à l'instant où elle monte à la hauteur h. Supposer que la masse du tambour est uniformément répartie sur sa jante. La poulie C est un disque homogène de poids P_3. Négliger la masse du câble. A l'instant initial le système était au repos.

Rép. $v=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{gh(ah^2-3P_1r^3)}{3r(2P_1+2P_2+P_3)}}$.



Probl. 38.24

38.25. Quelle vitesse initiale, parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale, doit-on communiquer à l'axe d'une roue de rayon r pour qu'en roulant sans glisser suivant ce plan elle puisse monter à une hauteur h? Le coefficient de résistance au roulement est f_r. Considérer la roue comme un disque homogène.

Rép. $v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\frac{f_r}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$.

38.26. Deux cylindres de même poids et de même rayon descendent sans glisser sur un plan incliné. Le premier cylindre est continu, la masse du second peut être considérée comme uniformément répartie sur sa périphérie. Trouver la relation entre les vitesses de leurs centres de gravité

lorsqu'ils descendent d'une même hauteur. A l'instant initial les cylindres étaient à l'arrêt.

Rép. $v_2 / v_1 = \sqrt{3}/2$.

38.27. Un mécanisme épicyclique situé dans le plan horizontal est mis en mouvement à partir de l'état de repos par un couple constant M appliqué à la manivelle OA. Calculer la vitesse angulaire de la manivelle en fonction de son angle de rotation, si le rayon de la roue fixe I est r_1, celui de la roue mobile II étant r_2 et son poids P, le poids de la manivelle OA est Q. Considérer la roue II comme un disque homogène et la manivelle comme une barre homogène.

Rép. $\omega = \frac{2}{r_1+r_2} \sqrt{\frac{3gM}{9P+2Q} \varphi}$.



Probl. 38.27

Probl. 38.28

38.28. Dans un mécanisme à came, situé dans le plan horizontal, l'excentrique A anime un galet B et une barre D d'un mouvement de translation alternatif. Le ressort E relié à la barre assure le contact permanent du galet à l'excentrique. Le poids de l'excentrique est p, l'excentricité e est égale à la moitié du rayon; la rigidité du ressort est c. Le ressort n'est pas déformé pour la position extrême gauche de la barre. Quelle vitesse angulaire doit-on communiquer à l'excentrique pour qu'il déplace la barre de la position extrême gauche à la position extrême droite? Négliger la masse du galet, de la barre et du ressort. Considérer l'excentrique comme un disque circulaire homogène.

Rép. $\omega = 2 \sqrt{\frac{cg}{3p}}$.

38.29. Quel chemin un cycliste parcourt-il sans pédaler jusqu'à l'arrêt, si sa vitesse initiale était 9 km/h? Le poids total du cycliste et de la bicyclette est de 80 kgf, celui de chaque roue de 5 kgf. La masse de la roue est supposée uniformément répartie sur une circonférence de rayon de 50 cm. Le coefficient de résistance au roulement des roues est de 0,5 cm.

Rép. 35,6 m.

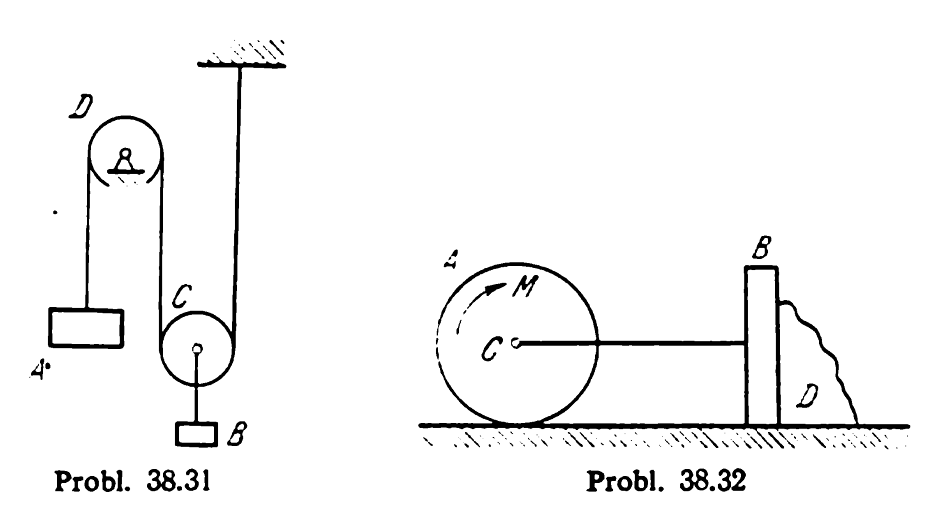
38.30. La vitesse d'atterrissage d'un avion est de 20 m/s. Calculer le chemin qu'il parcourt jusqu'à l'arrêt, si la résistance de l'air vaut approximativement 60 kgf; le poids de chacune des deux roues avant est 100 kgf, le rayon des roues est de 0,5 m, l'avion sans les roues pèse 1 100 kgf, le coef-

ficient de résistance au roulement sur le sol est de 1 cm. Les roues sont supposées être des disques circulaires homogènes. Négliger la masse de la roue arrière et la présence des freins.

Rép. 332,1 m.

38.31. En descendant, une charge A de poids P_1 fait monter au moyen d'un fil passant sur la poulie fixe D une charge B de poids P_2 fixée à l'axe de la poulie mobile C. Considérer les poulies C et D comme des disques homogènes continus de poids P_3 chacun. Calculer la vitesse de la charge A lorsqu'ele descend d'une hauteur h. Négliger la masse du fil, le glissement dans les jantes des poulies et les forces de résistance. A l'instant initial le système était au repos.

Rép. $v=2\sqrt{2gh\,\dfrac{2P_1-P_2-P_3}{8P_1+2P_2+7P_3}}$.



Probl. 38.31 Probl. 38.32

38.32. Un couple constant M est appliqué à la roue motrice (au tambour A) d'un chasse-neige. La masse du tambour A est supposée uniformément répartie suivant sa jante. Le poids total de la neige D, du soc B et de toutes les autres parties en mouvement de translation est constant et vaut P_2. Le coefficient de frottement de la neige et du soc sur le sol est f, le coefficient de résistance au roulement du tambour est f_r. Le poids du tambour est P_1, son rayon r.

Déterminer la relation entre le chemin s parcouru par le soc B du chasse-neige et le module de sa vitesse $\mathbf{v}$, si à l'instant initial le système était à l'arrêt.

Rép. $s=\dfrac{r}{2g}\,\dfrac{2P_1+P_2}{M-P_1f_r-fP_2r}\,v^2$.

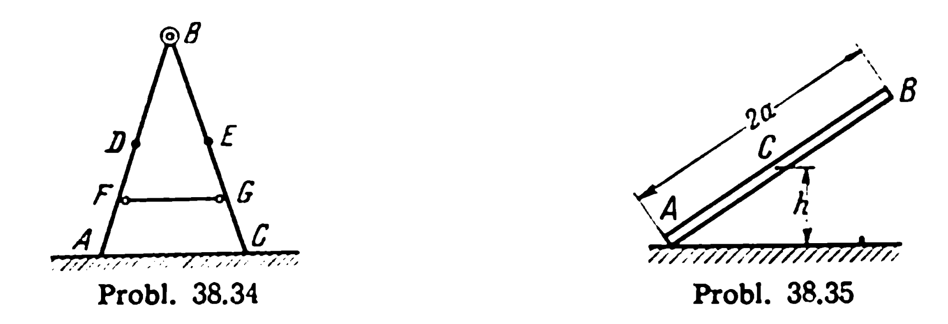
38.33. La vitesse d'une automobile se déplaçant sur une route rectiligne horizontale croît de $\mathbf{v}_1$ à $\mathbf{v}_2$ lorsqu'on augmente la puissance du moteur. Le chemin parcouru est alors s. Calculer le travail accompli par le moteur sur cette distance, si le poids de chacune des quatre roues est P_1, celui de la carrosserie étant P_2; le rayon des roues est r, le coefficient de résistance au roulement f_r. Les roues, roulant sans glisser, sont considérées comme des

disques homogènes continus. Négliger l'énergie cinétique de toutes les parties sauf celle des roues et de la carrosserie.

$$Rép.\ \ A=\frac{6P_1+P_2}{2g}\,(v_2^2-v_1^2)+\frac{f_r}{r}\,(4P_1+P_2)\,s.$$

38.34. L'échelle double ABC comportant une articulation B est posée sur un plancher lisse horizontal; $AB=BC=2l$; les centres de gravité sont aux milieux D et E des barres, le rayon de giration de chaque échelle par rapport à l'axe passant par le centre de gravité est ρ, la distance de l'articulation B au plancher est h. A un moment donné les deux parties de l'échelle commencent à glisser à cause de la rupture de la tige FG. Négligeant le frottement dans l'articulation, calculer: 1) la vitesse du point B à l'instant de son choc sur le plancher; 2) la vitesse du point B à l'instant où sa distance au plancher est $\frac{1}{2}\,h$.

$$Rép.\ \ 1)\ v=2l\sqrt{\frac{gh}{l^2+\rho^2}};\quad 2)\ v=\frac{1}{2}\sqrt{gh\,\frac{16l^2-h^2}{2(l^2+\rho^2)}}\,.$$



Probl. 38.34

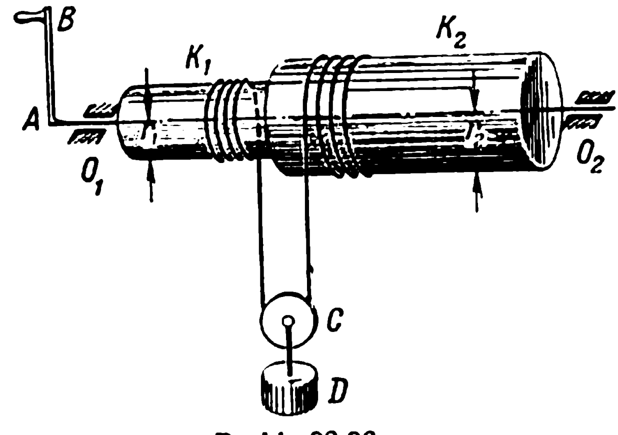
Probl. 38.35

38.35. La barre AB de longueur $2a$ tombe, son extrémité A glissant sur un plancher lisse horizontal. A l'instant initial la barre occupait une position verticale et était au repos. Exprimer la vitesse de son centre de gravité en fonction de sa hauteur h au-dessus du plancher.

$$Rép.\ \ v=(a-h)\sqrt{\frac{6g\,(a+h)}{4a^2-3h^2}}\,.$$

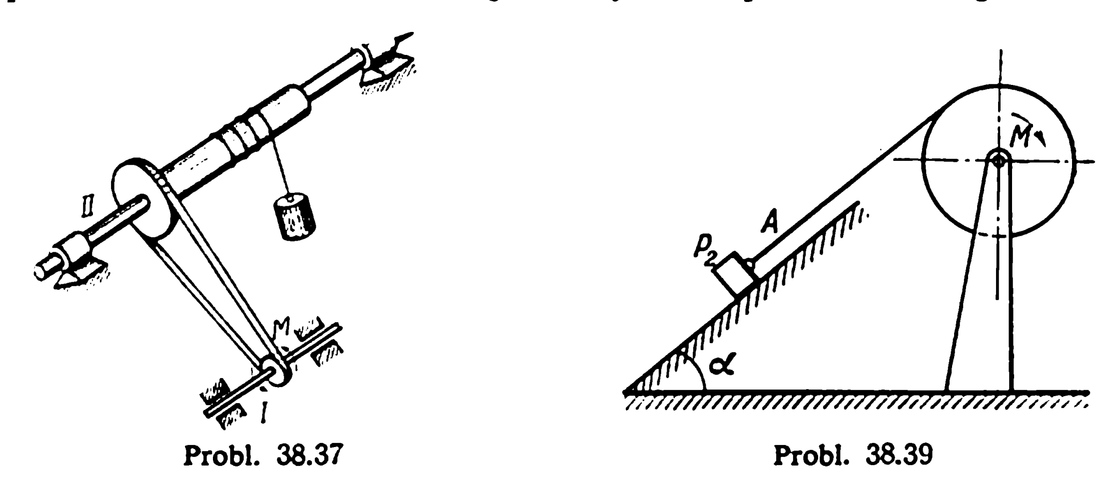
38.36. Un treuil différentiel, composé de deux arbres solidaires K_1 et K_2 de rayons r_1 et r_2 et dont les moments d'inertie par rapport à l'axe O_1O_2 sont respectivement J_1 et J_2, est mis en rotation par le levier AB. La poulie mobile C est suspendue par un fil non pesant inextensible dont le brin gauche est enroulé sur l'arbre K_1 et le brin droit sur l'arbre K_2. Lorsqu'on tourne le levier AB, le brin gauche du fil se déroule à partir de l'arbre K_1 et le brin droit s'enroule sur l'arbre K_2. Un couple constant M est appliqué au levier AB. Une charge D de poids P est accrochée à la poulie C. Calculer la vitesse angulaire du levier à l'instant correspondant à la montée de la charge D à une hauteur s. A l'instant initial le système était au repos. Négliger les masses du levier et de la poulie.

$$Rép.\ \ \omega=2\sqrt{2gs\,\frac{2M-P(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)\,[P\,(r_2-r_1)^2+4g\,(J_1+J_2)]}}\,.$$



Probl. 38.36

38.37. Le treuil est mis en mouvement à l'aide d'une transmission à courroie reliant la poulie II fixée sur l'arbre du treuil à la poulie I fixée sur l'arbre du moteur. Un couple constant M est appliqué à la poulie I de poids P_1 et de rayon r. Le poids de la poulie II est P_2, son rayon R; le poids du tambour du treuil est P_3, son rayon r, le poids de la charge à lever



Probl. 38.37 Probl. 38.39

étant P_4. Le treuil est mis en mouvement à partir de l'état de repos. Trouver la vitesse du poids P_4 à l'instant où il monte à la hauteur h. Négliger les masses de la courroie et du câble ainsi que le frottement dans les paliers. Considérer les poulies et le tambour comme des cylindres homogènes circulaires.

$$Rép.\ v=2\sqrt{\frac{gh\left(M\frac{R}{r^2}-P_4\right)}{P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2+P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2+P_3+2P_4}}.$$

38.38. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse du câble auquel est attaché le poids P_4. La longueur du câble est l, son poids spécifique p. A l'instant initial la longueur de la partie pendante du câble était $2h$.

$$Rép.\ v=2\sqrt{\frac{gh\left(M\frac{R}{r^2}-P_4-\frac{3}{2}ph\right)}{P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2+P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2+P_3+2P_4+2pl}}.$$

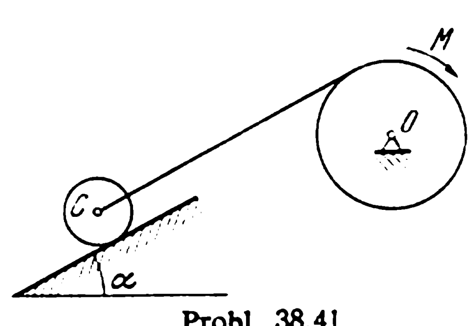
38.39. Un couple constant M est appliqué au tambour d'un treuil de rayon r et de poids P_1. A l'extrémité A du câble qui s'enroule sur le tambour est attaché un poids P_2 montant suivant un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Quelle est la vitesse angulaire du tambour lorsqu'il tourne d'un angle φ? Le coefficient de frottement du poids P_2 sur le plan incliné est f. Négliger la masse du câble et considérer le tambour comme un cylindre homogène circulaire. A l'instant initial le système était au repos. (Voir fig. p. 339.)

Rép. $\omega = \frac{2}{r}\sqrt{g\frac{M-P_2 r(\sin\alpha+f\cos\alpha)}{P_1+2P_2}\varphi}$.

38.40. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse du câble auquel est attaché le poids P_2. La longueur du câble est l, son poids spécifique p. A l'instant initial la longueur de la partie pendante du câble était a. Négliger la variation de l'énergie potentielle du câble enroulé sur le tambour.

Rép. $\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2g\frac{2M-2P_2 r(\sin\alpha+f\cos\alpha)-pr(2a-r\varphi)\sin\alpha}{P_1+2P_2+2pl}\varphi}$.

38.41. Un couple constant M est appliqué au tambour de rayon r_1 et de poids P_1 d'un treuil. L'axe C d'une roue de poids P_2 est fixé à l'extrémité du câble enroulé sur le tambour. La roue roule sans glisser et monte sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Quelle est la vitesse angulaire du tambour après n tours? Considérer le tambour et la roue comme des cylindres circulaires homogènes. A l'instant initial le système était au repos. Négliger la masse du câble et le frottement.



Probl. 38.41

Rép. $\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi ng\frac{M-P_2 r_1\sin\alpha}{P_1+3P_2}}$.

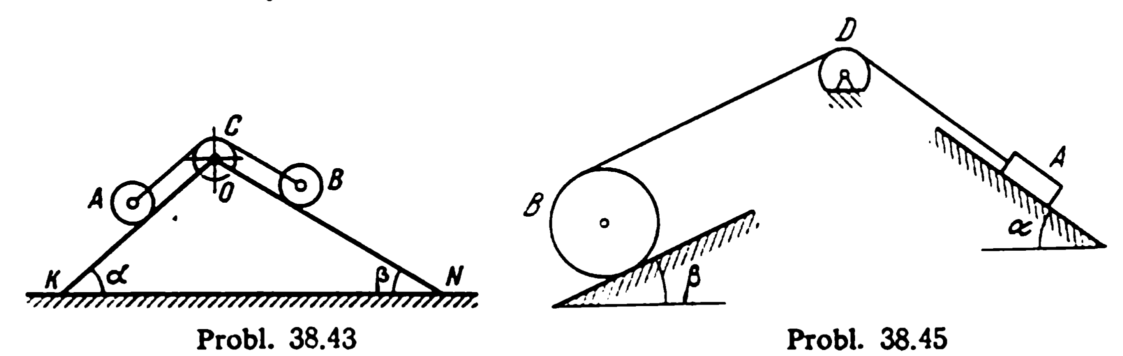
38.42. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse du câble et du frottement de roulement de la roue sur le plan incliné, si l est la longueur du câble, p son poids spécifique, a la longueur de la partie du câble non enroulée sur le tambour à l'instant initial, f_r le coefficient de résistance au roulement, r_2 le rayon de la roue. Négliger la variation de l'énergie potentielle du câble enroulé sur le tambour.

$$Rép.\ \omega = \frac{2}{r}\sqrt{2\pi ng\frac{M-r_1\left[P_2\left(\sin\alpha+\frac{f_r}{r_2}\cos\alpha\right)+p(a-\pi nr_1)\sin\alpha\right]}{P_1+3P_2+2pl}}.$$

38.43. La roue A descend sans glisser suivant un plan incliné OK et fait monter à l'aide d'un câble inextensible la roue B qui roule sans glisser sur le plan incliné ON. Le câble passe sur la poulie C tournant autour de l'axe horizontal fixe O. Calculer la vitesse de l'axe de la roue A lors de son déplacement parallèle à la ligne de plus grande pente OK du plan incliné à une distance s. A l'instant initial le système était au repos. Considérer

les deux roues et la poulie comme des disques homogènes de même poids et de même rayon. Le poids du câble est négligeable.

Rép. $v=2\sqrt{\frac{1}{7}gs(\sin\alpha-\sin\beta)}$.



Probl. 38.43 Probl. 38.45

38.44. Résoudre le problème précédent en tenant compte du frottement de roulement des roues sur les plans inclinés. Le coefficient de résistance au roulement est f_r, les rayons des roues r.

$$Rép.\ v=2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[\sin\alpha-\sin\beta-\frac{f_r}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}.$$

38.45. Un fil inextensible passant sur une poulie D de poids P_2 est attaché à un corps A de poids P_1 et s'enroule sur la surface latérale d'un rouleau cylindrique B de poids P_3. Lorsque le corps A descend un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale, la poulie D tourne et le rouleau B monte sans glisser sur le plan incliné formant un angle β avec l'horizontale.

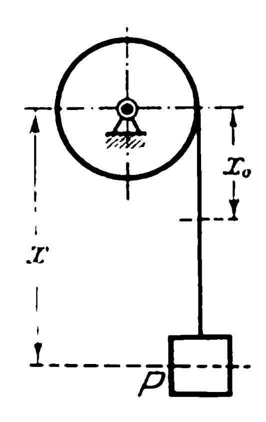
Calculer la vitesse du corps A en fonction du chemin parcouru s, si à l'instant initial le système était au repos. Considérer la poulie D et le rouleau B comme des cylindres circulaires homogènes. Négliger les forces de frottement et la masse du fil.

$$Rép.\ v=2\sqrt{2gs\frac{2P_1\sin\alpha-P_3\sin\beta}{8P_1+4P_2+3P_3}}.$$

38.46. Résoudre le problème précédent en supposant que les coefficients de frottement et de résistance au roulement sont respectivement f et f_r. Le rayon du rouleau B est r.

$$Rép.\ v=2\sqrt{2gs\frac{2P_1(\sin\alpha-f\cos\alpha)-P_3\left(\sin\beta+\frac{f_r}{r}\cos\beta\right)}{8P_1+4P_2+3P_3}}.$$

38.47. Un poids P est suspendu à un câble inextensible homogène de longueur l qui s'enroule sur un tambour cylindrique dont l'axe de rotation est horizontal. Le moment d'inertie du tambour par rapport à l'axe de rotation est J, son rayon est R, le poids spécifique du câble p. Déterminer la vitesse du poids à l'instant où la longueur de la partie pendante du câble est x, si à l'instant initial la vitesse du poids $v_0=0$, la longueur de la partie pen-



Probl. 38.47

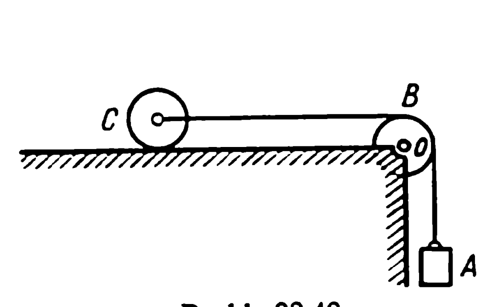
dante du câble étant x_0. Négliger le frottement de l'axe du tambour, l'épaisseur du câble et la variation de l'énergie potentielle du câble enroulé sur le tambour.

Rép. $v = R\sqrt{\dfrac{g[2P+p(x+x_0)](x-x_0)}{Jg+(P+pl)R^2}}$.

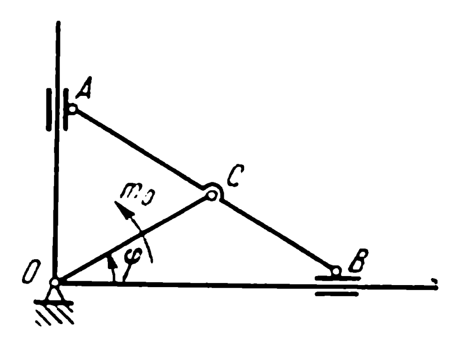
38.48. Un corps A de poids P_1 est suspendu à un câble homogène inextensible de longueur L et de poids Q. Le câble passe sur une poulie B tournant autour de l'axe O perpendiculaire au plan du schéma. L'autre extrémité du câble est fixée à l'axe du rouleau C roulant sans glisser sur un plan fixe. La poulie B et le rouleau C sont des disques homogènes circulaires chacun de rayon r et de poids P_2. Le coefficient de résistance au roulement du rouleau C sur le plan horizontal est f_r. A l'instant initial le système était au repos, et la longueur de la partie du câble qui pendait de la poulie était l. Calculer la vitesse du corps A en fonction de son déplacement vertical h.



Rép. $v = \sqrt{\dfrac{2gh\left[P_1 + \dfrac{Q}{2L}(2l+2r+h) - P_2\dfrac{f_r}{r}\right]}{P_1+2P_2+Q}}$.



Probl. 38.48



Probl. 38.49

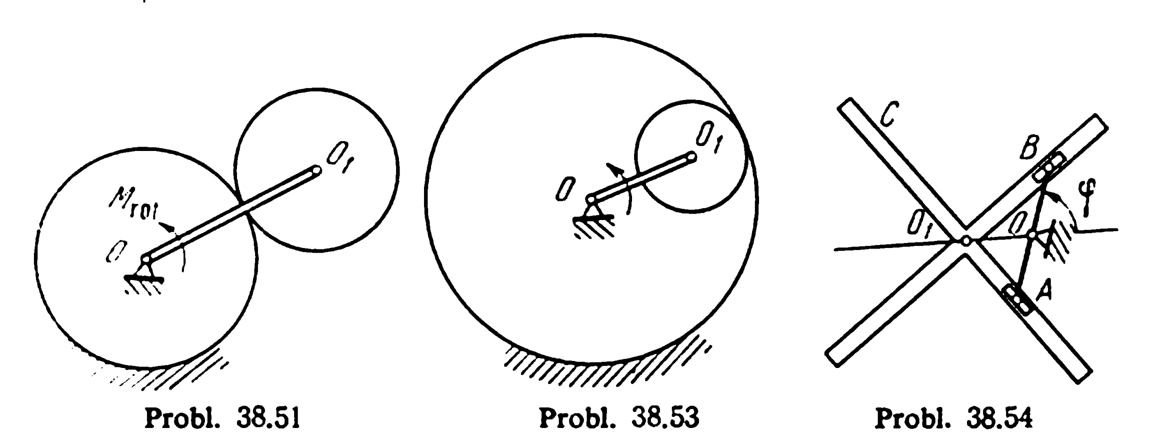
38.49. Le mécanisme d'un ellipsographe situé dans un plan horizontal est mis en mouvement sous l'action d'un couple constant m_0 appliqué à la manivelle OC. A l'instant initial, lorsque $\varphi = 0$, le mécanisme était au repos. Trouver la vitesse angulaire de la manivelle OC à l'instant où elle effectue 1/4 de tour. La masse de la barre AB est M, les masses des coulisseaux A et B sont $m_A = m_B = m$, $OC = AC = BC = l$; la masse de la manivelle OC et les forces de résistance sont négligeables.

Rép. $\omega = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{3\pi m_0}{M+3m}}$.

38.50. Résoudre le problème précédent en tenant compte du couple constant de résistance m_C dans l'articulation C.

Rép. $\omega = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{3\pi(m_0-2m_C)}{M+3m}}$.

38.51. La manivelle OO_1 d'un mécanisme épicyclique situé dans un plan horizontal est soumise à l'action d'un couple $M_{rot}=M_0-\alpha\omega$, où M_0 et α sont des constantes positives et ω la vitesse angulaire de la manivelle. La masse de la manivelle est m, la masse du satellite (de la roue mobile) M. Considérant la manivelle comme une barre mince homogène et le satellite



Probl. 38.51 Probl. 38.53 Probl. 38.54

comme un disque circulaire homogène de rayon r, calculer la vitesse angulaire ω de la manivelle en fonction du temps. A l'instant initial le système était au repos. Le rayon du pignon fixe est R; négliger les forces de résistance.

Indication. Appliquer le théorème de la variation de l'énergie cinétique sous forme différentielle.

$$Rép.\quad \omega=\frac{M_0}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{J_{réd}}t}\right),\ \text{où}\ J_{réd}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3}{2}M\right)(R+r)^2.$$

38.52. Résoudre le problème précédent en tenant compte du couple constant de frottement M_{fr} dans l'axe O_1 du satellite.

$$Rép.\quad \omega=\frac{M_0-\frac{R}{r}M_{fr}}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{J_{réd}}t}\right),\ \text{où}\ J_{réd}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3}{2}M\right)(R+r)^2.$$

38.53. La manivelle OO_1 d'un mécanisme hypocyclique situé dans un plan horizontal tourne avec une vitesse angulaire constante ω_0. A un moment donné on débranche le moteur, et sous l'action du couple constant M_{fr} des forces de frottement dans l'axe du satellite le mécanisme s'arrête.

Calculer le temps τ de freinage et l'angle φ de rotation de la manivelle pendant ce temps, sachant que son poids est P, le poids du satellite G et les rayons correspondants sont R et r. Considérer la manivelle comme une barre mince homogène et le satellite comme un disque homogène.

Indication. Appliquer le théorème de la variation de l'énergie cinétique sous forme différentielle.

$$Rép.\quad \tau=\frac{rJ_{réd}}{RM_{fr}}\omega_0;$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\frac{rJ_{réd}}{RM_{fr}}\omega_0^2,\ \text{où}\ J_{réd}=\frac{1}{g}\left(\frac{P}{3}+\frac{3}{2}G\right)(R-r)^2.$$

38.54. Une croix C est mise en rotation autour de l'axe fixe O_1 au moyen de la barre homogène AB tournant autour de l'axe fixe O (les axes O et O_1 sont perpendiculaires au plan du schéma). Les coulisseaux A et B articulés à la barre AB glissent alors le long de deux fentes orthogonales de la croix C. La barre tourne sous l'action du couple constant m_{rot}. Calculer la vitesse angulaire de la barre AB à l'instant où elle a effectué 1/4 de tour, si à l'instant initial, lorsque $\varphi=0$, sa vitesse angulaire était ω_0. La valeur du couple de résistance dans chacune des articulations des coulisseaux A et B est deux fois plus petite que m_{rot}. Les autres forces de résistance sont négligeables. La masse de la barre est m; le moment d'inertie de la croix C par rapport à l'axe O_1 est J; $OO_1=OA=OB=l$ (voir fig. p. 343).

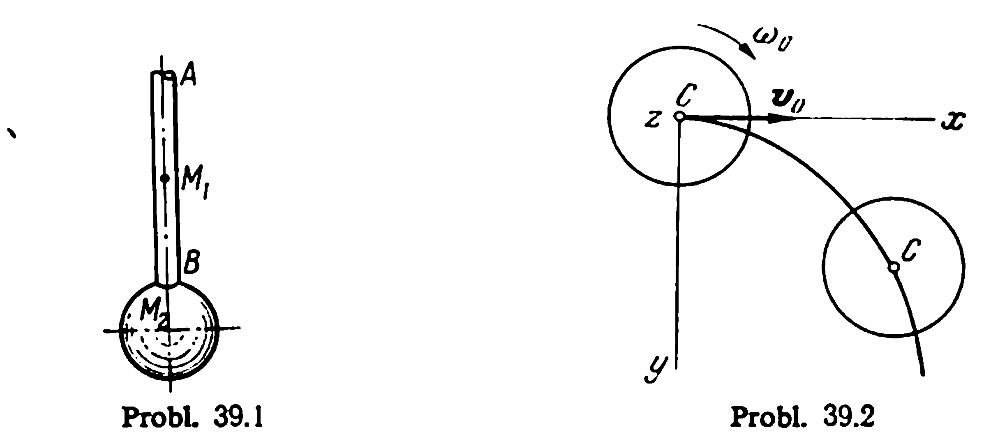
Rép. $\omega=\sqrt{\dfrac{6\pi m_{rot}}{4ml^2+3J}+\omega_0^2}$.

§ 39. Mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe

39.1. Un corps pesant est composé de la barre AB longue de 80 cm et pesant 1 N et d'un disque solidaire de cette barre d'un rayon de 20 cm et pesant 2 N. A l'instant initial, lorsque la position de la barre est verticale, on anime le corps d'un mouvement tel que la vitesse du centre de gravité de la barre M_1 soit nulle, et que la vitesse du centre de gravité du disque M_2 soit de 360 cm/s et soit dirigée vers la droite suivant l'horizontale.

Déterminer le mouvement ultérieur du corps en tenant compte de la seule force de la pesanteur.

Rép. Le corps tourne uniformément avec la vitesse angulaire 6 s^{-1} autour de son centre de gravité qui décrit la parabole $y^2=117{,}5x$ (l'origine des coordonnées est au point B, l'axe des y est dirigé vers la droite suivant l'horizontale, l'axe des x vers le bas).



Probl. 39.1 Probl. 39.2

39.2. Un disque tombe verticalement sous l'action de la pesanteur. A l'instant initial on a communiqué au disque une vitesse angulaire ω_0, et la vitesse $\mathbf{v}_0$ de son centre de gravité C situé à l'origine des coordonnées était horizontale.

Trouver les équations du mouvement du disque. Les axes de coordonnées sont indiqués sur le schéma. Négliger les forces de frottement.

Rép. $x_C = v_0 t,\ y_C = \frac{gt^2}{2},\ \varphi = \omega_0 t,$

où φ est l'angle de rotation du disque formé par l'axe des x et le diamètre qui occupait à l'instant initial une position horizontale.

39.3. Résoudre le problème précédent en supposant que le moment m_C de résistance au mouvement par rapport àl 'axe horizontal mobile passant par le centre de gravité C du disque perpendiculairement au plan de son mouvement est proportionnel au premier degré de la vitesse angulaire du disque $\dot{\varphi}$, le coefficient de proportionnalité étant β. Le moment d'inertie du disque par rapport à cet axe est J_C.

Rép. $x_C = v_0 t,\ y_C = \frac{gt^2}{2},\ \varphi = \frac{J_C \omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{J_C} t}\right),$

où φ est l'angle de rotation du disque formé par l'axe des x et le diamètre qui à l'instant initial occupait une position horizontale.

39.4. La roue motrice d'une automobile de rayon r et de poids P se déplace suivant une ligne droite horizontale. La roue est soumise à un couple moteur M. Le rayon de giration de la roue par rapport à l'axe passant par le centre de gravité perpendiculairement à son plan est ρ. Le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f. Quelle condition le couple moteur doit-il vérifier pour que la roue roule sans glissement? Négliger la résistance au roulement.

Rép. $M \leqslant fP \frac{r^2 + \rho^2}{r}$.

39.5. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la résistance au roulement, si le coefficient de résistance est f_r.

Rép. $M \leqslant fP \frac{r^2 + \rho^2}{r} + Pf_r$.

39.6. L'axe de la roue entraînée d'une automobile se déplace suivant une ligne droite horizontale. Une force motrice F horizontale est appliquée à l'axe de la roue. Le rayon de giration de la roue par rapport à l'axe passant par le centre de gravité perpendiculairement à son plan est ρ. Le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f. Le rayon de la roue est r et son poids P. Quelle condition la valeur de la force F doit-elle remplir pour que la roue tourne sans glissement? Négliger la résistance au roulement.

Rép. $F \leqslant fP \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}$.

39.7. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la résistance au roulement si son coefficient est f_r.

Rép. $F \leqslant \frac{fP(r^2 + \rho^2) - Pf_r r}{\rho^2}$.

39.8. Une force horizontale F, constante en module, est appliquée à l'axe d'une roue de poids P et de rayon r. Trouver la relation qui existe entre cette force et la force de frottement, sachant que le centre de gravité C de la roue est fixe ou animé d'un mouvement uniforme rectiligne. Déterminer aussi la vitesse angulaire de la roue, si à l'instant initial elle était à l'arrêt. La masse de la roue est supposée uniformément répartie sur sa jante. Négliger la résistance au roulement.

Rép. $F_{fr} = F$; $\dot{\varphi} = \frac{Fg}{Pr} t$.

39.9. Une roue de rayon r roule sur un rail rectiligne horizontal sous l'action du couple $m_{rot} = \frac{5}{2} fPr$, où f est le coefficient de frottement, P le poids de la roue. Calculer la vitesse du point de la roue tangent au rail (la vitesse de glissement). La masse de la roue est uniformément répartie sur sa jante. Négliger la résistance au roulement. A l'instant initial la roue était à l'arrêt.

Rép. $\frac{fg}{2} t$.

39.10. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la résistance au roulement si son coefficient $f_r = \frac{1}{4} fr$.

Rép. $\frac{1}{4} fgt$.

39.11. Un cylindre homogène d'axe horizontal descend sous l'action de son propre poids sur un plan incliné rugueux avec un coefficient de frottement f. Déterminer l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontale et l'accélération de l'axe du cylindre en supposant que son mouvement a lieu sans glissement. Négliger la résistance au roulement.

Rép. $\alpha \leqslant \operatorname{arc\,tg} 3f$; $w = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

39.12. Deux cylindres de même poids descendent sans glissement sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. La masse du premier cylindre est uniformément répartie sur sa surface latérale, le second cylindre est continu. Calculer la différence entre les accélérations des centres de gravité du second et du premier cylindre. Négliger la résistance au roulement.

Rép. L'accélération du centre de gravité du second cylindre est plus grande que l'accélération du centre de gravité du premier cylindre de $1/6 g \sin \alpha$.

39.13. Un disque homogène continu descend sans glisser sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. L'axe du disque forme un angle β avec la ligne de plus grande pente. Trouver l'accélération du centre de gravité du disque si son roulement a lieu dans un seul plan vertical.

Rép. $w_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha \sin \beta$.

39.14. Un cylindre homogène d'axe horizontal descend en glissant sous l'action de son poids sur un plan incliné, le coefficient de frottement étant f. Déterminer l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontale et l'accélération de l'axe du cylindre.

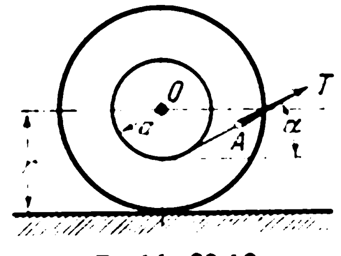
Rép. $\alpha > \operatorname{arc\,tg} 3f$; $w = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

39.15. Une roue homogène de rayon r descend sans glisser sur un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Pour quelle valeur du coefficient de résistance au roulement f_r le centre de gravité de la roue se déplace-t-il uniformément et la roue tourne-t-elle uniformément autour de l'axe passant par le centre de gravité perpendiculairement à son plan?

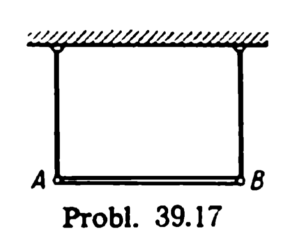
Rép. $f_r = r \operatorname{tg} \alpha$.

39.16. Une force T est appliquée, sous un angle α par rapport à l'horizontale, à l'extrémité d'un fil enroulé sur le tambour d'un rouleau homogène de poids P et de rayon r, posé sur un plancher horizontal rugueux. Le rayon du tambour est a, le rayon de giration du rouleau est ρ. Déterminer la loi de mouvement de l'axe O du rouleau, s'il est à l'arrêt à l'instant initial et roule ensuite sans glissement.

Rép. $x = \frac{T}{P}\,\frac{rg(r\cos\alpha - a)}{2(\rho^2 + r^2)}\,t^2$, l'axe des x est dirigé de gauche à droite.



Probl. 39.16



Probl. 39.17

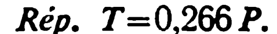
39.17. Une barre homogène AB de poids P est suspendue horizontalement au plafond au moyen de deux fils verticaux fixés à ses extrémités. Calculer la tension de l'un des fils à l'instant de la rupture de l'autre.

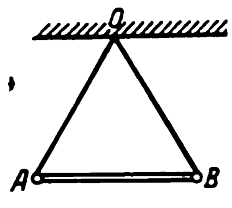
Indication. Ecrire les équations différentielles du mouvement de la barre pour un intervalle de temps très petit après la rupture du fil en négligeant les variations de la direction de la barre et de la distance du centre de gravité de la barre à l'autre fil.

Rép. $T = \frac{P}{4}$.

39.18. Une barre homogène AB de poids P est suspendue au point O par deux fils de même longueur qu'elle.

Déterminer la tension de l'un des fils à l'instant de la rupture de l'autre (cf. indication du problème 39.17).


Rép. $T = 0{,}266\,P$.

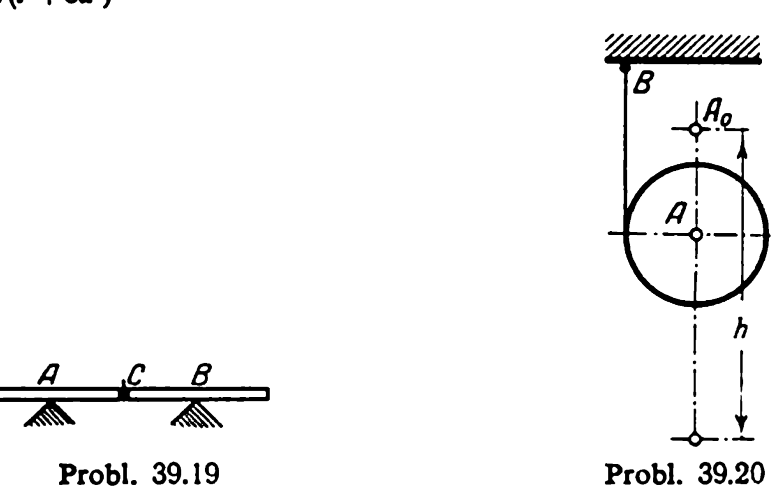


Probl. 39.18

39.19. Une barre mince homogène de longueur $2l$ et de poids P est posée sur deux appuis A et B; le centre de gravité de la barre C est situé à égales distances des appuis, $CA=CB=a$; la pression sur chaque appui est $1/2P$. Comment varie la pression sur l'appui A à l'instant où l'appui B est retiré (cf. indication du problème 39.17)?

Rép. La pression sur l'appui A croît de

$$\frac{l^2-3a^2}{2(l^2+3a^2)}\,P.$$



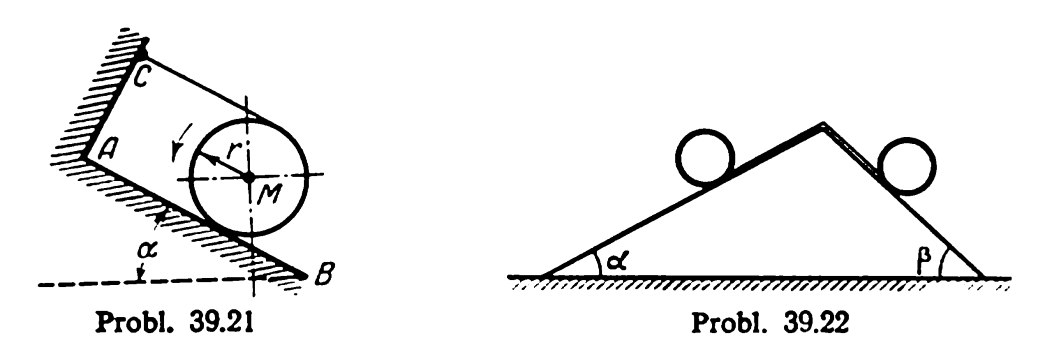
Probl. 39.19 Probl. 39.20

39.20. Un fil fin dont l'extrémité B est fixée s'enroule autour du milieu d'un cylindre circulaire pesant A de masse m. Le cylindre tombe sans vitesse initiale en déroulant le fil.

Calculer la vitesse de l'axe du cylindre après qu'il a descendu une hauteur h, et trouver la tension T du fi.

Rép. $v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $T=\frac{1}{3}\,mg$.

39.21. Deux fils flexibles sont enroulés sur un cylindre circulaire homogène M de poids P et de rayon r de sorte que leurs spires soient disposées symétriquement par rapport au plan médian parallèle aux bases. Le cylindre est posé sur un plan incliné AB de manière que ses génératrices soient perpendiculaires à la ligne de plus grande pente, les extrémités C des fils étant fixées symétriquement par rapport au plan médian susmentionné à une distance $2r$ du plan AB. Le cylindre commence à se mouvoir sans vitesse



Probl. 39.21 Probl. 39.22

initiale sous l'action de la pesanteur en surmontant le frottement sur le plan incliné; le coefficient d'adhérence est f.

Déterminer le chemin s parcouru par le centre de gravité du cylindre au cours du temps t et la tension T des fils; on suppose que dans l'intervalle de temps considéré aucun des fils ne se déroule jusqu'au bout.

Rép. $s=\frac{1}{3}g(\sin\alpha-2f\cos\alpha)t^2$;

$$T=\frac{1}{6}P(\sin\alpha+f\cos\alpha).$$

Le cylindre reste au repos lorsque $\operatorname{tg}\alpha<2f$.

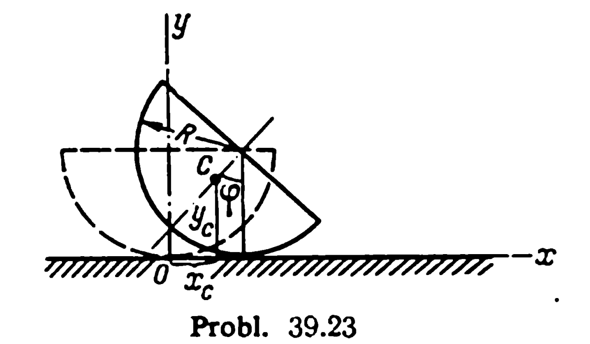
39.22. Deux arbres cylindriques de poids P_1 et P_2 descendent sur deux plans inclinés formant respectivement des angles α et β avec l'horizontale. Les arbres sont reliés par un fil inextensible dont les extrémités sont enroulées sur eux et y sont fixées.

Déterminer la tension du fil et son accélération lors du mouvement sur les plans inclinés. Considérer les arbres comme des cylindres circulaires homogènes. Le poids du fil est négligeable.

Rép. $T=\frac{P_1P_2(\sin\alpha+\sin\beta)}{3(P_1+P_2)}$; $\quad w=g\frac{P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta}{P_1+P_2}$.

39.23. Déterminer la période des petites oscillations d'un demi-disque circulaire homogène de rayon R situé sur un plan horizontal rugueux sur lequel il peut rouler sans glissement.

Rép. $T=\frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi-16)R}$.

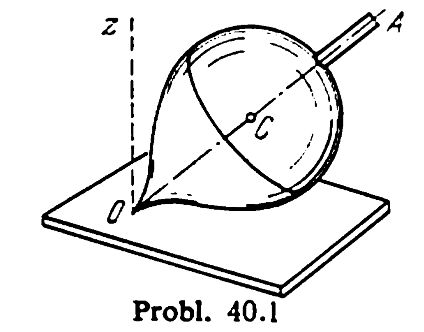


Probl. 39.23

§ 40. Théorie approchée des gyroscopes

40.1. Une toupie tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour de son axe OA avec une vitesse angulaire constante $\omega=600\ s^{-1}$; l'axe OA est incliné par rapport à la verticale; la pointe O reste fixe; le centre de gravité C de la toupie est sur l'axe OA à une distance $OC=30$ cm du point O; le rayon de giration de la toupie par rapport à l'axe est de 10 cm.

Etudier le mouvement de l'axe OA de la toupie, si son moment cinétique résultant est $J\omega$.



Probl. 40.1

Rép. L'axe OA tourne autour de la verticale Oz dans le sens des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire constante $\omega_1 = 0{,}49\ s^{-1}$, en décrivant un cône circulaire.

40.2. Une toupie formée par un disque de 30 cm de diamètre tourne avec la vitesse angulaire $80\ s^{-1}$ autour de son axe de symétrie. Le disque est monté sur un axe long de 20 cm, disposé le long de l'axe de symétrie de la toupie.

Calculer la vitesse angulaire de précession régulière de la toupie, si son moment cinétique résultant est $J\omega$.

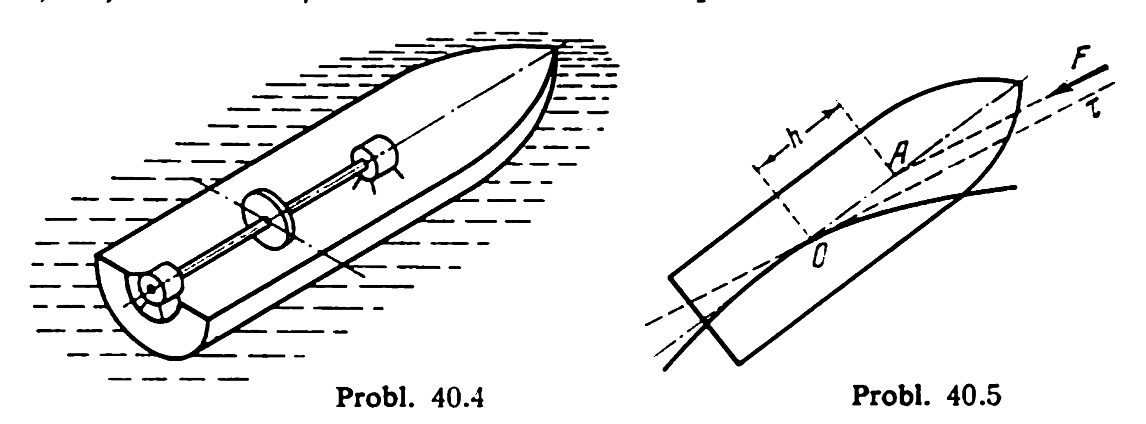
Rép. $2{,}18\ s^{-1}$.

40.3. Une turbine dont l'axe est parallèle à l'axe longitudinal du bateau fait 1 500 tr/mn. Le poids des parties tournantes est de 6 t, le rayon de giration $\rho = 0{,}7$ m.

Déterminer les pressions gyroscopiques sur les paliers, si le bateau tourne autour de l'axe vertical à raison de 10° par seconde. La distance entre les paliers $l = 2{,}7$ m.

Rép. 3 050 kgf.

40.4. Déterminer les pressions gyroscopiques maximales sur les paliers d'une turbine rapide installée sur un bateau. Le bateau est soumis à un tangage d'amplitude 9° et de période 15 s autour de l'axe perpendiculaire à l'axe du rotor. Le rotor de la turbine pesant 3 500 kgf, de rayon de giration 0,6 m, fait 3 000 tr/mn. La distance entre les paliers est de 2 m.



Probl. 40.4 Probl. 40.5

Rép. 1 320 kgf.

40.5. Calculer le temps T d'un tour complet de l'axe de symétrie d'un obus autour de la tangente à la trajectoire de son centre de gravité. Ce mouvement est dû à l'action de la force de résistance de l'air $F = 2\ 140$ kgf approximativement parallèle à la tangente et appliquée à l'axe de l'obus à une distance $h = 0{,}2$ m de son centre de gravité. Le moment cinétique de l'obus par rapport à son axe de symétrie est de 590 kgf m s.

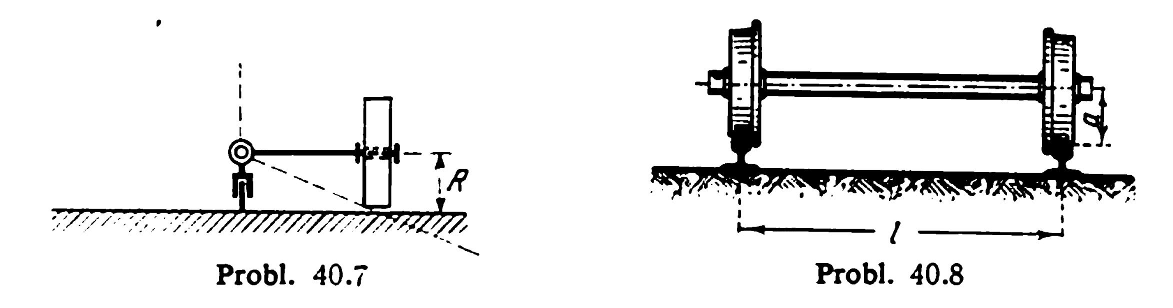
Rép. 8,66 s.

40.6. Une locomotive à turbine est actionnée par une turbine à gaz dont l'axe est parallèle aux axes des roues et tourne dans le même sens que les roues en faisant 1 500 tr/mn. Le moment d'inertie des parties tournantes de la turbine par rapport à l'axe de rotation $J=20$ kgf m s^2.

Quelle est la grandeur de la surpression sur les rails, si la locomotive à turbine se déplace suivant une trajectoire curviligne de rayon de 250 m à la vitesse de 15 m/s? La largeur de la voie est de 1,5 m.

Rép. Sur un rail 126 kgf vers le bas, sur l'autre 126 kgf vers le haut.

40.7. Le poids de chacune des molettes d'un concasseur est de 1 200 kgf, le rayon de giration par rapport à son axe $\rho=0{,}4$ m, leur rayon $R=0{,}5$ m, l'axe instantané de rotation passe par le milieu de la ligne de tangence de la molette avec le fond de la cuvette.



Probl. 40.7 Probl. 40.8

Déterminer la pression de la molette sur le fond horizontal de la cuvette, si la vitesse angulaire d'entraînement autour de l'axe vertical correspond à $n=60$ tr/mn.

Rép. $N=2\ 740$ kgf.

40.8. Les roues d'un wagon, avec l'essieu, de poids total $P=1\ 400$ kgf, de rayon $a=75$ cm et de rayon de giration par rapport à leur axe $\rho=\sqrt{0{,}55}\,a$ se déplacent uniformément avec la vitesse $v=20$ m/s suivant une trajectoire curviligne de rayon $R=200$ m située dans le plan horizontal.

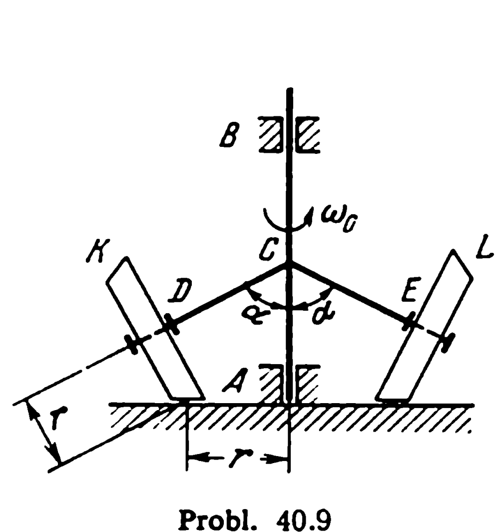
Calculer la pression des roues sur les rails si la largeur de la voie est de 1,5 m.

Rép. $N=(700\pm79)$ kgf.

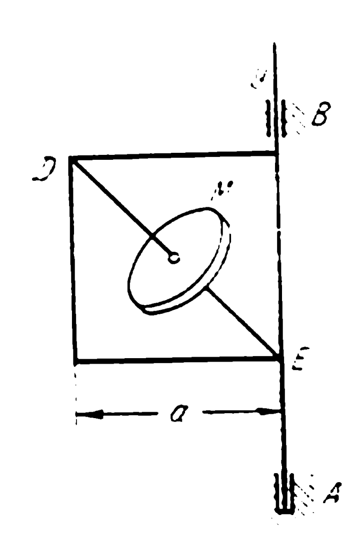
40.9. Le schéma montre le mécanisme d'un pont tournant. L'arbre AB avec les barres solidaires CD et CE inclinées sous un angle α par rapport à celui-ci tournent avec une vitesse angulaire ω_0. Les pignons coniques montés librement sur les barres CD et DE roulent alors sans glisser sur un pignon plan horizontal fixe.

Déterminer les surpressions dynamiques des pignons K et L, de poids P chacun, sur le pignon horizontal fixe, si les rayons de tous les pignons sont égaux à r. Considérer les pignons mobiles comme des disques continus homogènes.

Rép. $\dfrac{Pr\omega_0^2 \sin\alpha}{2g}$.



Probl. 40.9



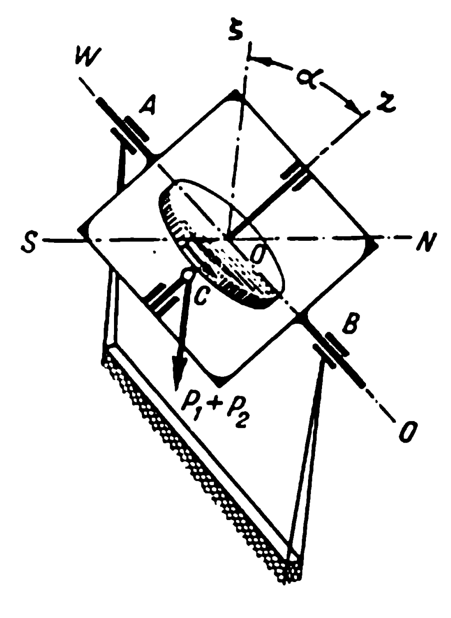
Probl. 40.10

40.10. Un cadre carré de masse négligeable et de côté $a=20$ cm tourne autour de l'axe vertical AB avec la vitesse angulaire $\omega_1=2\text{s}^{-1}$. Un disque M de rayon $r=10$ cm tourne autour de l'axe ED confondu avec la diagonale du cadre, et sa vitesse angulaire $\omega=300\ \text{s}^{-1}$.

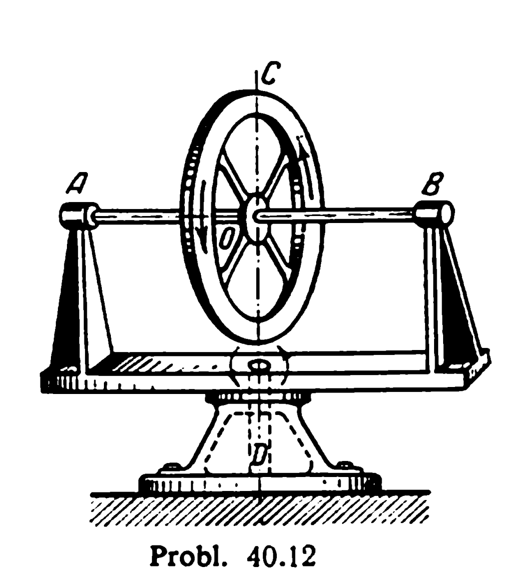
Calculer le rapport des surpressions latérales sur les appuis A et B aux pressions statiques correspondantes. La masse du disque est supposée uniformément répartie sur la jante.

Rép. 4,32.

40.11. L'axe AB du cadre d'un gyroscope est installé horizontalement à la latitude $\varphi=30°$ suivant la ligne O-W. Le rotor du gyroscope de poids $p_1=2$ kgf et de rayon $r=4$ cm tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega=3\ 000\ \text{s}^{-1}$. Le centre de gravité commun C du rotor et du cadre est



Probl. 40.11



Probl. 40.12

situé sur l'axe Oz du rotor, à une distance $OC=h$ à l'axe AB. Le moment statique du gyroscope $H=(p_1+p_2)h=1{,}3$ gf cm.

Déterminer la position d'équilibre du cadre, autrement dit, l'angle α de déviation de l'axe du rotor Oz de la verticale $O\zeta$ du lieu dans le plan du méridien.

Considérer le rotor comme un disque homogène.

Rép. $\alpha=45°$.

40.12. Une roue de rayon a et de poids $2p$ tourne autour de l'axe horizontal AB avec une vitesse angulaire constante ω_1; l'axe AB tourne autour de l'axe vertical CD passant par le centre de la roue, avec une vitesse angulaire constante ω_2; les sens de rotation sont indiqués par des flèches.

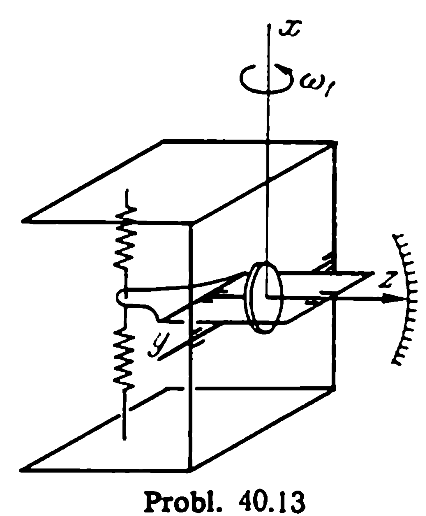
Calculer les pressions N_A et N_B sur les paliers A et B, si la longueur $AO=OB=h$, la masse de la roue étant uniformément répartie sur sa jante.

Rép. $N_A=p\left(1+\frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$; $N_B=p\left(1-\frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$.

40.13. Le gyrotachymètre le plus simple est composé d'un gyroscope dont le cadre est supporté par deux ressorts fixés au bâti de l'instrument. Le moment d'inertie du gyroscope par rapport à son axe de révolution est J, sa vitesse angulaire ω.

Calculer l'angle α par lequel tourne l'axe du gyroscope avec son cadre, si l'instrument est installé sur une plate-forme tournant avec une vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe x perpendiculaire à l'axe y de rotation du cadre. Les rigidités des ressorts sont c; l'angle α est supposé petit; la distance de l'axe de rotation du cadre aux ressorts est a.

Rép. $\alpha=\frac{J\omega}{2ca}\omega_1$.



Probl. 40.13

§ 41. Méthode de la cinétostatique

41.1. Calculer le poids d'un disque circulaire homogène d'un rayon de 20 cm tournant autour d'un axe suivant la loi $\varphi=3t^2$. L'axe passe par le centre de gravité du disque perpendiculairement à son plan; le moment résultant des forces d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation est de 4 N cm.

Rép. 3,27 N.

41.2. Une barre mince rectiligne homogène de longueur l et de poids P tourne, suivant la loi $\varphi=at^2$, autour de l'axe passant perpendiculairement à la barre par son extrémité.

Trouver les grandeurs, les directions et les points d'application des résultantes J_n et J_τ des forces centrifuges et de rotation d'inertie des particules de la barre.

Rép. La résultante des forces de rotation d'inertie $J_\tau = \frac{Pal}{g}$, dirigée perpendiculairement à la barre, est appliquée au point distant de $\frac{2}{3} l$ de l'axe de rotation; la résultante des forces centrifuges d'inertie $J_n = \frac{2Pa^2lt^2}{g}$ est dirigée suivant la barre à partir de l'axe de rotation.

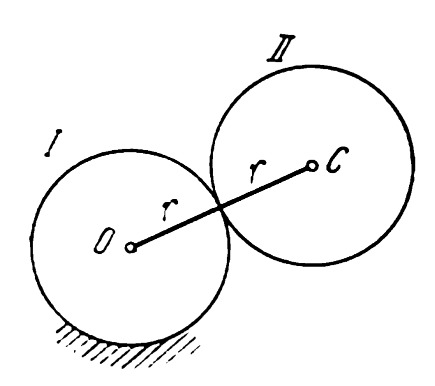
41.3. Une roue de poids P et de rayon r roule sans glissement sur un rail rectiligne horizontal.

Déterminer le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de la roue perpendiculairement au plan du mouvement. Considérer la roue comme un disque continu homogène. Le centre de gravité C se déplace suivant la loi $x_C = \frac{at^2}{2}$, où a est une constante positive. L'axe des x est dirigé suivant le rail.

Rép. Le vecteur résultant des forces d'inertie vaut en module $\frac{P}{g} a$ et est dirigé parallèlement à l'axe des x; le moment résultant des forces d'inertie vaut en valeur absolue $\frac{Par}{2g}$.

41.4. Déterminer le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie de la roue mobile *II* d'un mécanisme planétaire par rapport à l'axe passant par le centre de gravité C perpendiculairement au plan du mouvement. La manivelle OC tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Le poids de la roue *II* est P. Les rayons des roues sont r.

Rép. Le vecteur résultant des forces d'inertie est parallèle à la manivelle OC et vaut $\frac{2Pr\omega^2}{g}$; le moment résultant des forces d'inertie est nul.



Probl. 41.4

41.5. L'extrémité A d'une barre mince homogène de longueur $2l$ et de poids G se déplace suivant un guide horizontal à l'aide d'un appui E avec une vitesse constante $\mathbf{v}$ tout en s'appuyant sur l'angle D.

Calculer le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie de la barre par rapport à l'axe passant par son centre de gravité C, perpendiculairement au plan du mouvement, en fonction de l'angle φ.

Rép. $V_x^{(J)} = 3\,\frac{G}{g}\,\frac{v^2}{H^2}\,l\sin^4\varphi\cos\varphi$;

$V_y^{(J)} =$

$= \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{H^2}\,l\,(1-3\cos^2\varphi)\sin^3\varphi$;

$m_{Cz}^{(J)} =$

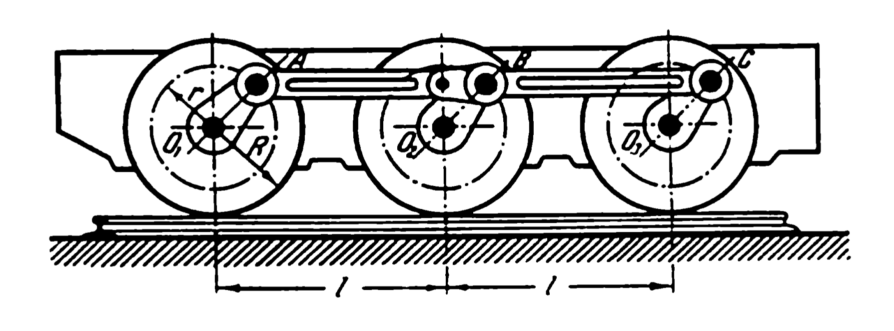
$= -\frac{2}{3}\,\frac{G}{g}\,l^2\frac{v^2}{H^2}\,\sin^3\varphi\cos\varphi$.

Probl. 41.5

41.6. Déterminer, d'après les données du problème précédent, la pression dynamique N_D de la barre sur l'angle D.

Rép. $N_D = \frac{8}{3}\,\frac{v^2 l^2}{H^2 g}\,G\sin^4\varphi\cos\varphi$.

41.7. Une locomotive se déplace sur une voie rectiligne avec la vitesse $v=72$ km/h.



Probl. 41.7

Déterminer la surpression sur le rail, due à la force d'inertie de l'accouplement ABC dans sa position inférieure en l'absence des contrepoids. L'accouplement pèse 200 kgf, sa masse est uniformément répartie suivant sa longueur. La longueur $r=0{,}3$ m, le rayon des roues $R=1$ m; les roues roulent sans glisser.

Rép. 2,45 t.

41.8. Une locomotive à vapeur est animée d'un mouvement uniformément accéléré sur une voie rectiligne horizontale et atteint la vitesse de 72 km/h 20 s après le début du mouvement.

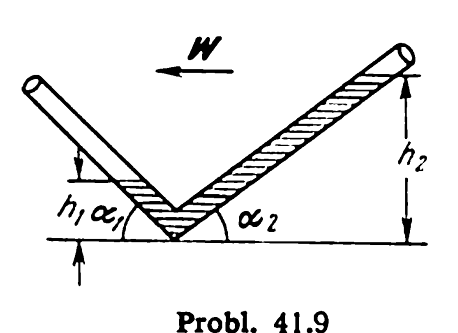
Déterminer la position de la surface libre de l'eau dans le tender.

Rép. Un plan incliné sur l'horizontale d'un angle

$$\alpha = \text{arc tg } 0{,}102 = 5°50'.$$

41.9. Pour déterminer expérimentalement le ralentissement d'un trolleybus on utilise un accéléromètre à liquide composé d'un tube coudé rempli d'huile et situé dans le plan vertical.

Calculer le ralentissement du trolleybus si, lors du freinage, le niveau du liquide s'élève jusqu'à la hauteur h_2 dans la partie du tube se trouvant dans la direction du mouvement et descend jusqu'à la hauteur h_1 dans la partie opposée. La position de l'accéléromètre est indiquée sur le schéma:



Probl. 41.9

$$\alpha_1=\alpha_2=45°,\ h_1=25 \text{ mm},$$

$$h_2=75 \text{ mm}.$$

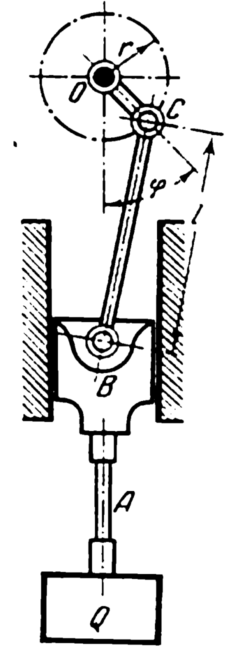
Rép. $w=g\,\dfrac{(h_2-h_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{h_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2+h_2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}=0{,}5\,g.$

41.10. Avec quelle accélération un prisme dont la face latérale forme un angle α avec l'horizontale doit-il se déplacer sur un plan horizontal pour qu'un poids situé sur cette face ne se déplace pas par rapport au prisme?

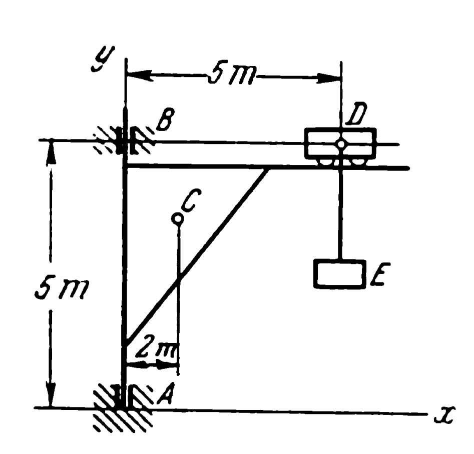
Rép. $w=g\ \mathrm{tg}\,\alpha.$

41.11. Afin d'étudier l'effet des forces de traction et de compression rapidement alternées sur une barre métallique (essai de fatigue), on fixe son extrémité supérieure A au coulisseau B d'un mécanisme à manivelle BCO et on suspend un poids Q à son extrémité inférieure.

Trouver la force de traction dans le cas où la manivelle OC tourne autour de l'axe O avec une vitesse angulaire constante ω.



Probl. 41.11



Probl. 41.12

Indication. Développer l'expression $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}$ en série et négliger tous les termes renfermant $\frac{r}{l}$ à la puissance supérieure à deux.

Rép. $Q+\frac{Q}{g} r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right)$.

41.12. Déterminer les réactions d'appui de la crapaudine A et du palier B d'une grue tournante lorsqu'on monte une charge E pesant 3 t avec une accélération $\frac{1}{3}$ g. Le poids de la grue est de 2 t et est appliqué en son centre de gravité C. Le poids du chariot est de 0,5 t. La grue et le chariot sont à l'arrêt. Les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. $X_A = -X_B = 5{,}3$ t; $Y_A = 6{,}5$ t.

41.13. Déterminer les réactions d'appui de la crapaudine A et du palier B de la grue tournante considérée dans le problème précédent lorsque, la charge E étant absente, le chariot se déplace vers la gauche avec une accélération de 0,5 g. Le centre de gravité du chariot est au niveau de l'appui B.

Rép. $X_A = 1{,}3$ t; $X_B = -1{,}55$ t; $Y_A = 2{,}5$ t.

41.14. Un camion pesant 7 t monte à la vitesse de 12 km/h sur un bac attaché au quai par deux câbles parallèles; les freins arrêtent le camion sur une distance de 3 m.

En supposant que la force de frottement des roues sur le revêtement du bac est constante, calculer la tension des câbles. La masse et l'accélération du bac sont négligeables.

Rép. $T = 0{,}66$ t.

41.15. Une automobile de poids P se déplace en ligne droite avec l'accélération w.

Déterminer la pression verticale des roues avant et arrière de l'automobile, si la hauteur de son centre de gravité C de la surface du sol est h. Les distances des axes avant et arrière de l'automobile à la verticale passant par le centre de gravité sont respectivement a et b. Négliger les masses des roues.

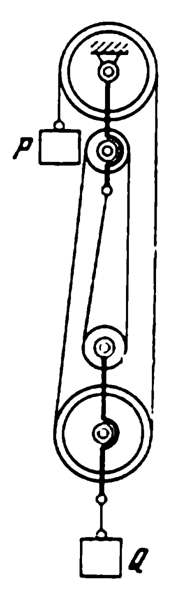
Comment l'automobile doit-elle se déplacer pour que les pressions des roues avant et arrière soient égales?

Rép. $N_1 = \frac{P(gb-wh)}{g(a+b)}$; $N_2 = \frac{P(ga+wh)}{g(a+b)}$; lorsque le freinage de l'automobile s'effectue avec une décélération $w = g\frac{a-b}{2h}$.

41.16. Avec quelle accélération w le poids P descend-il en faisant monter le poids Q à l'aide du palan indiqué sur le schéma? Quelles sont les conditions d'un mouvement uniforme du poids P? Négliger les masses des poulies et du câble.

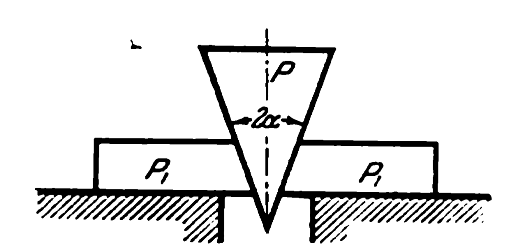
Indication. L'accélération du poids Q est quatre fois plus petite que celle du poids P.

Rép. $w = 4g\,\dfrac{4P-Q}{16P+Q}$; $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{1}{4}$.





Probl. 41.16



Probl. 41.17

41.17. Un coin lisse de poids P et d'angle au sommet 2α écarte deux plaques pesant chacune P_1 et se trouvant au repos sur une table horizontale lisse.

Ecrire les équations du mouvement du coin et des plaques et calculer la pression du coin sur chacune des plaques.

Rép. L'équation du mouvement du coin:

$$s = \frac{wt^2}{2}, \text{ où } w = g\,\frac{P \operatorname{ctg} \alpha}{P \operatorname{ctg} \alpha + 2P_1 \operatorname{tg} \alpha};$$

l'équation du mouvement des plaques:

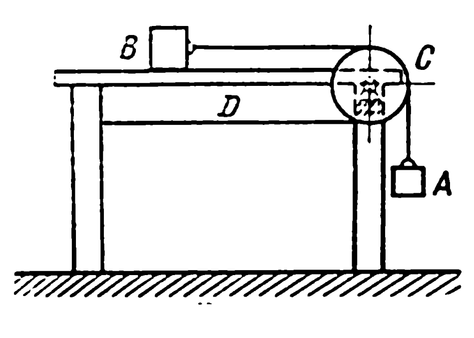
$$s_1 = \frac{w_1 t^2}{2}, \text{ où } w_1 = w \operatorname{tg} \alpha;$$

la pression du coin:

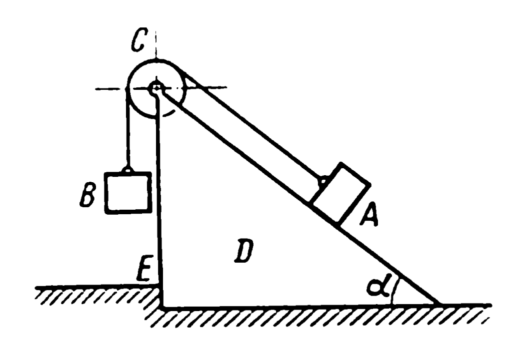
$$N = \frac{P_1 w_1}{g \cos \alpha}.$$

41.18. Un corps A de poids P_1 descend et entraîne le corps B de poids P_2 au moyen d'un fil non pesant et inextensible passant sur la poulie C.
Calculer la pression de la table D sur le plancher, si le poids de la table est P_3.

Rép. $N = P_1 + P_2 + P_3 - \dfrac{P_1^2}{P_1+P_2}$.



Probl. 41.18



Probl. 41.19

41.19. Un corps A de poids P_1 descend sur un plan incliné D formant un angle α avec l'horizontale et entraîne, au moyen d'un fil non pesant et inextensible passant sur la poulie C, le corps B de poids P_2.

Déterminer la composante horizontale de la pression du plan incliné D sur la saillie E du plancher.

Rép. $N = P_1 \dfrac{P_1 \sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2} \cos\alpha.$

41.20. Pour atténuer le ballottement d'un bateau on y a installé trois stabilisateurs; la partie principale de chacun d'eux est constituée par un volant de 110 t. Les volants effectuent 910 tr/mn lors du fonctionnement des stabilisateurs.

Calculer la surpression latérale sur les paliers de guidage de l'arbre du volant provoquée par un déplacement de son centre de gravité de 1,08 mm par rapport à l'axe de rotation dû à la non-homogénéité du métal et aux défauts de fabrication du volant.

Rép. La surpression $N = 109{,}7$ t, elle est dirigée suivant la droite passant par l'axe de rotation et le centre de gravité.

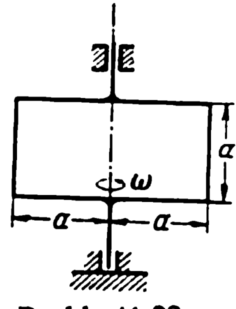
41.21. Une barre homogène de poids P et de longueur l tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe fixe vertical, perpendiculaire à la barre et passant par son extrémité.

Déterminer la force de traction dans la section droite de la barre à une distance a de l'axe de rotation.

Rép. $F = \dfrac{P(l^2 - a^2)\,\omega^2}{2gl}$.

41.22. Une plaque rectangulaire homogène de poids P tourne uniformément autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω.

Déterminer la force de rupture de la plaque dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation au niveau de la section droite passant par l'axe de rotation.



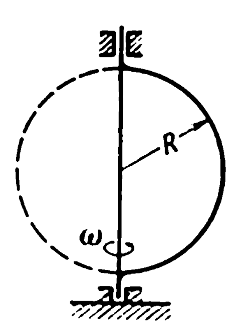
Probl. 41.22

Rép. $\dfrac{Pa\omega^2}{4g}$.

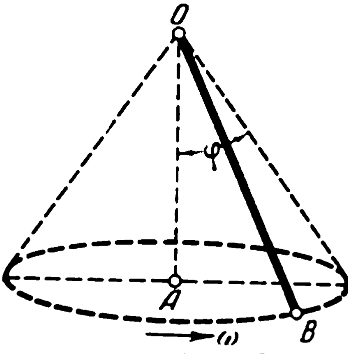
41.23. Un disque circulaire homogène de rayon R et de poids P tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical.

Déterminer la force de rupture du disque suivant le diamètre.

Rép. $\frac{2PR\omega^2}{3\pi g}$.



Probl. 41.23



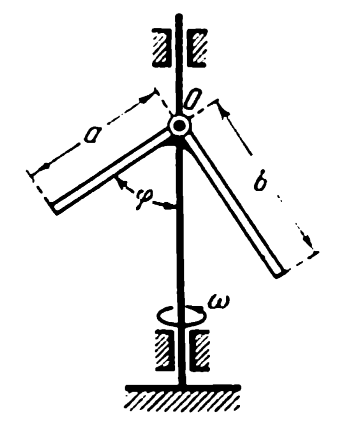
Probl. 41.24

41.24. Une barre mince rectiligne homogène de longueur l et de poids P tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un point fixe O (articulation sphérique) en décrivant une surface conique d'axe OA et de sommet en O.

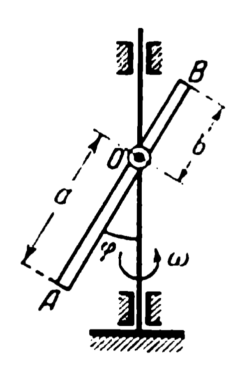
Calculer l'angle de déviation de la barre par rapport à la verticale, ainsi que la pression N qu'exerce la barre sur l'articulation O.

Rép. $\varphi = \arccos \frac{3g}{2l\omega^2}$; $N = \frac{1}{2} \frac{P}{g} l\omega^2 \sqrt{1 + \frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.

41.25. Dans un tachymètre centrifuge deux barres minces rectilignes homogènes de longueurs a et b sont soudées sous un angle droit dont le sommet O est articulé à un arbre vertical; l'arbre tourne avec une vitesse angulaire constante ω.



Probl. 41.25



Probl. 41.26

Trouver la relation entre ω et l'angle de déviation φ formé entre la direction de la barre de longueur a et la verticale.

Rép. $\omega^2 = 3g \frac{b^2 \cos\varphi - a^2 \sin\varphi}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}$.

41.26. Une barre mince rectiligne homogène AB est articulée au point O d'un arbre vertical tournant avec une vitesse angulaire constante ω.

Calculer l'angle de déviation φ de la barre par rapport à la verticale si $OA=a$ et $OB=b$.

Rép. $\cos\varphi=\frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2}\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$.

§ 42. Pression du corps solide tournant sur l'axe de rotation

42.1. Le centre de gravité d'un volant pesant 3 000 kgf est à une distance de 1 mm de l'axe horizontal de l'arbre; les distances des paliers au volant sont égales.

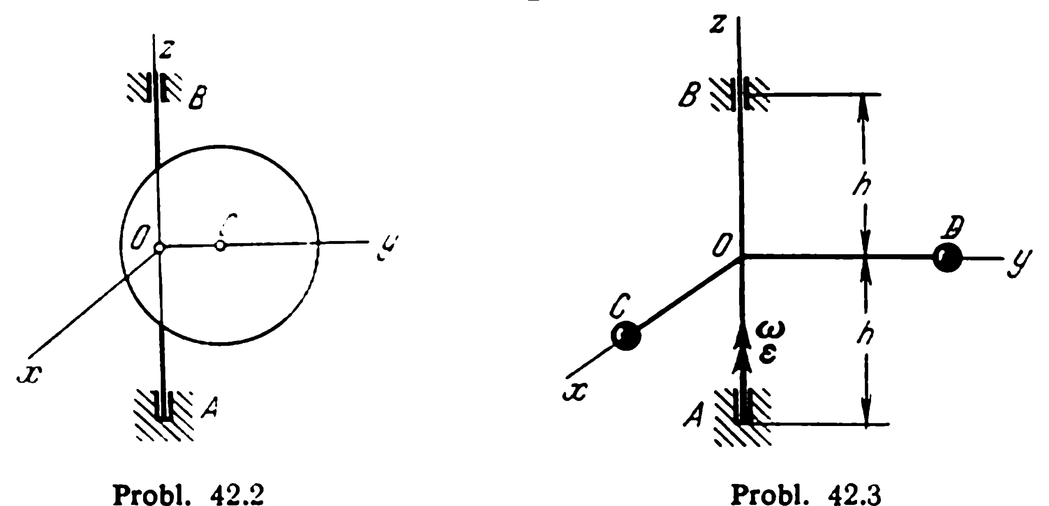
Trouver la pression sur les paliers lorsque l'arbre fait 1 200 tr/mn. Le plan de symétrie du volant est perpendiculaire à l'axe de rotation.

Rép. La pression sur chacun des paliers est la résultante de deux forces dont l'une vaut 1 500 kgf et est dirigée suivant la verticale et l'autre, de 2 400 kgf, est dirigée parallèlement à la droite joignant le centre géométrique du volant situé sur l'axe de l'arbre à son centre de gravité.

42.2. Un disque circulaire homogène de masse M tourne uniformément avec la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe situé dans le plan du disque et distant de $OC=a$ de son centre de gravité C.

Calculer la pression dynamique de l'axe sur la crapaudine A et le palier B si $OB=OA$. Les axes Ox et Oy sont toujours invariablement liés au disque.

Rép. $X_A=X_B=0$; $Y_A=Y_B=\frac{Ma\omega^2}{2}$.



Probl. 42.2 Probl. 42.3

42.3. Deux poids C et D sont fixés à un axe vertical AB animé d'une rotation uniformément accélérée, d'accélération angulaire ε, au moyen de deux barres orthogonales perpendiculaires à AB; $OC=OD=r$.

Calculer la pression dynamique de l'axe AB sur la crapaudine A et le palier B. Considérer les poids C et D comme des masses ponctuelles pesant

chacune P. Négliger les masses des barres. A l'instant initial le système était au repos. Les axes Ox et Oy sont invariablement liés aux barres.

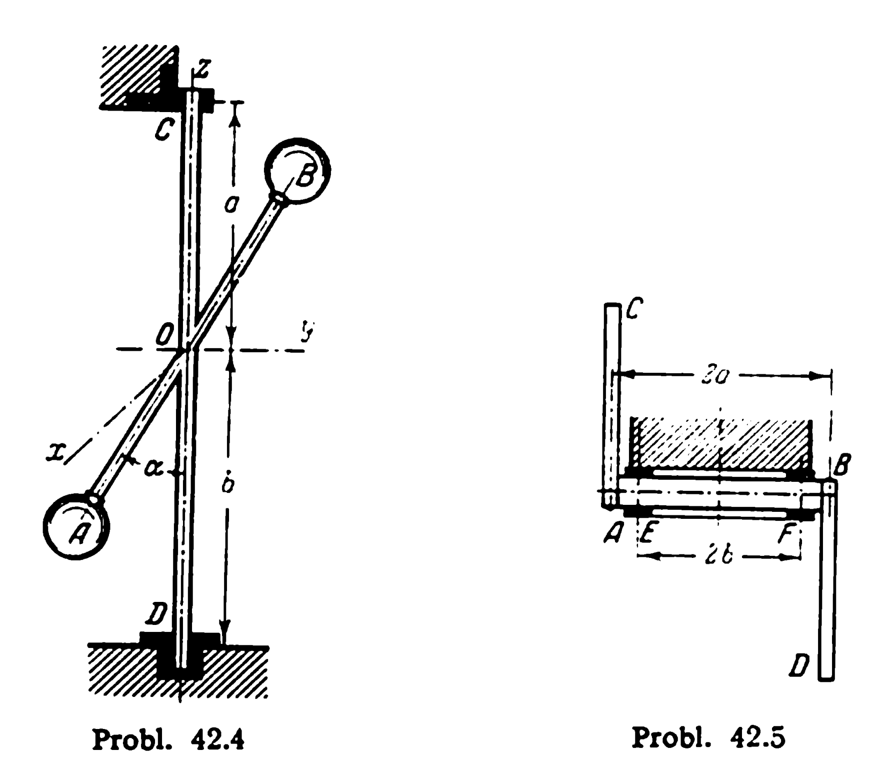
Rép. $X_A = X_B = \frac{P}{2g} r\varepsilon (\varepsilon t^2 + 1)$;

$Y_A = Y_B = \frac{P}{2g} r\varepsilon (\varepsilon t^2 - 1)$.

42.4. Une barre AB de longueur $2l$, dont les extrémités supportent des charges de même poids P, tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical Oz passant par le milieu O de la barre. La distance du point O au palier C est a et à la crapaudine D est b. L'angle α entre la barre AB et l'axe Oz est constant.

Négligeant le poids de la barre et les dimensions des charges, déterminer les projections des pressions sur le palier C et la crapaudine D à l'instant où la barre se trouve dans le plan Oyz.

Rép. $X_C = X_D = 0$; $Y_C = -Y_D = \frac{Pl^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}$; $Z_D = -2P$.



Probl. 42.4 Probl. 42.5

42.5. Deux manivelles identiques AC et BD, de longueur l et de poids Q, sont fixées aux extrémités de l'axe AB sous un angle de 180° l'une par rapport à l'autre. L'axe de longueur $2a$ et de poids P tourne avec une vitesse angulaire constante ω dans les paliers E et F disposés symétriquement à une distance $2b$ l'un de l'autre.

Calculer les pressions N_E et N_F sur les paliers à l'instant où la manivelle AC est dirigée verticalement vers le haut. La masse de chacune des manivelles peut être considérée comme uniformément répartie suivant son axe.

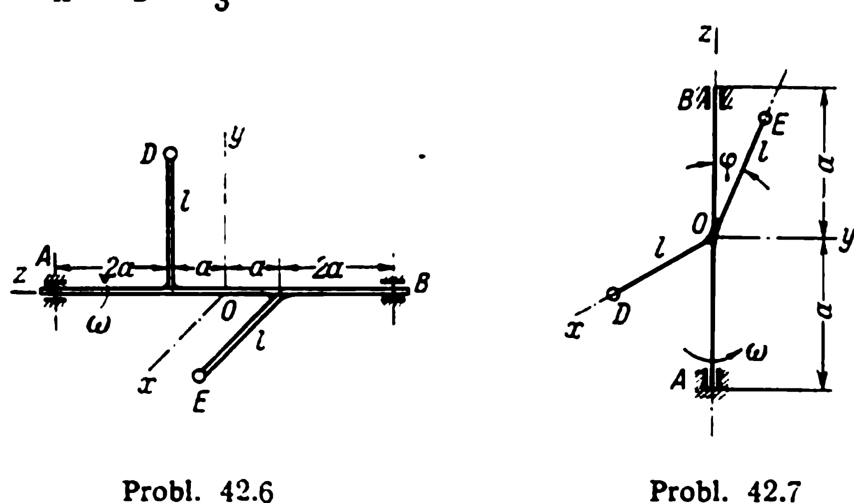
Rép. La pression $N_E = \frac{1}{2} P + Q - \frac{al\omega^2}{2bg} Q$, pour $N_E > 0$ elle est dirigée verticalement vers le bas, pour $N_E < 0$ vers le haut.

La pression $N_F = \frac{1}{2} P + Q + \frac{al\omega^2}{2bg} Q$ est dirigée vers le bas suivant la verticale.

42.6. Deux barres identiques de masses négligeables de longueurs l, situées dans des plans orthogonaux, sont fixées perpendiculairement à un arbre horizontal AB tournant avec une vitesse angulaire constante ω (cf. schéma). Les barres portent à leurs extrémités des billes E et D de masse m chacune.

Déterminer la pression dynamique de l'arbre sur les appuis A et B. Considérer les billes comme des points matériels.

Rép. $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$.



Probl. 42.6

Probl. 42.7

42.7. Deux barres sont solidaires d'un arbre AB, tournant avec une vitesse angulaire constante ω. La barre OE forme avec l'arbre un angle φ, la barre OD est perpendiculaire au plan contenant l'arbre et la barre OE. Les dimensions sont: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. Deux billes E et D de masse m chacune sont fixées aux extrémités des barres.

Calculer la pression dynamique de l'arbre sur les appuis A et B. Considérer les billes D et E comme des masses ponctuelles; négliger les masses des barres.

Rép. $X_A = X_B = \frac{ml\omega^2}{2}$; $\quad Y_A = \frac{ml\omega^2 (a - l \cos\varphi) \sin\varphi}{2a}$;

$$Y_B = \frac{ml\omega^2 (a + l \cos\varphi) \sin\varphi}{2a}.$$

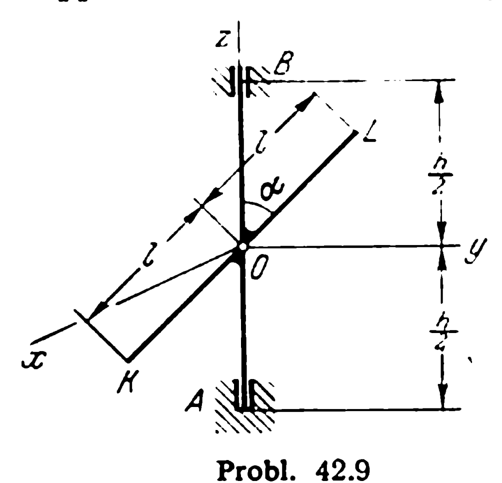
42.8. Calculer d'après les données du problème 34.1 la pression dynamique du vilebrequin sur les paliers K et L. Le vilebrequin tourne uniformé-

ment avec la vitesse angulaire ω. On peut faire usage des réponses des problèmes 34.1 et 34.24.

Rép. $X_K = -X_L = \frac{3}{2} md \frac{a+b}{4a+3b} \omega^2$;

$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2} md \frac{a+b}{4a+3b} \omega^2$.

42.9. Une barre homogène KL fixée en son centre sous un angle α par rapport à un axe vertical AB, est animée d'une rotation uniformément accélérée autour de cet axe, son accélération angulaire est ε.



Probl. 42.9

Déterminer la pression dynamique de l'axe AB sur la crapaudine A et sur le palier B, si P est le poids de la barre, $2l$ sa longueur, $OA=OB=h/2$; $OK=OL=l$. A l'instant initial le système était au repos.

Rép. $X_B = -X_A = \frac{Pl^2}{6gh} \varepsilon \sin 2\alpha$;

$Y_B = -Y_A =$

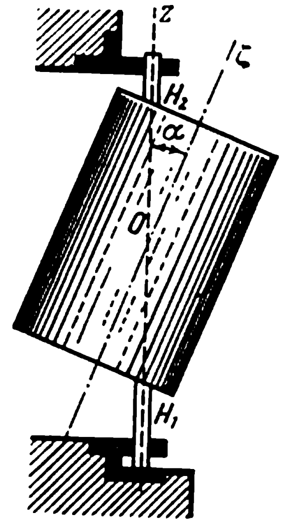
$= \frac{Pl^2}{6gh} \varepsilon^2 t^2 \sin 2\alpha$.

42.10. Un cylindre droit circulaire homogène de poids P, de longueur $2l$ et de rayon r tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz passant par son centre de gravité O, l'angle α entre l'axe du cylindre $O\zeta$ et l'axe Oz étant constant. La distance H_1H_2 entre la crapaudine et le palier est h.

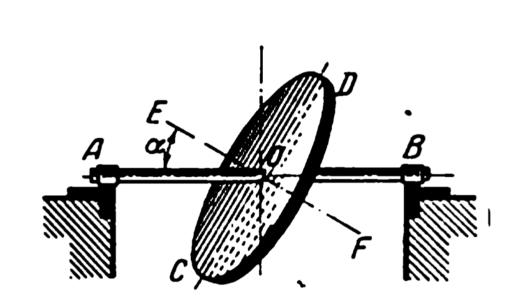
Calculer les pressions latérales: N_1 sur la crapaudine et N_2 sur le palier.

Rép. Les pressions N_1 et N_2 sont de sens opposé et égales en grandeur à

$$P \frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2gh} \left(\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} r^2\right).$$



Probl. 42.10



Probl. 42.11

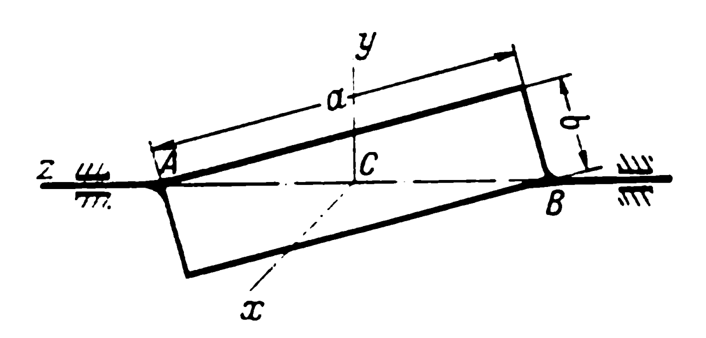
42.11. Calculer les pressions sur les paliers A et B lors de la rotation d'un disque mince circulaire homogène CD d'une turbine à vapeur autour de l'axe AB, en supposant que l'axe AB passe par le centre O du disque mais par suite de l'alésage incorrect du moyeu forme avec la perpendiculaire au plan du disque un angle $\widehat{AOE}=\alpha=0{,}02$ rd. Le disque pèse 3,27 kgf, son rayon est de 20 cm, la vitesse angulaire correspond à 30 000 tr/mn, la distance $AO=50$ cm, $OB=30$ cm; considérer l'axe AB comme parfaitement rigide et poser $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$.

Rép. Les pressions dues au poids du disque sont: 1,23 kgf sur le palier A et 2,04 kgf sur le palier B; les pressions sur les paliers dues à la rotation du disque sont de sens opposé et égales en grandeur à 822 kgf.

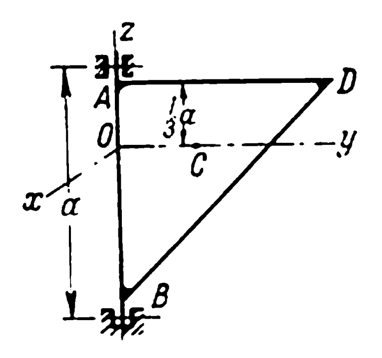
42.12. Une plaque homogène rectangulaire de côtés a et b et de poids P tourne uniformément autour de sa diagonale AB avec la vitesse angulaire ω. Trouver les pressions dynamiques de la plaque sur les appuis A et B.

Rép. $X_A=0;\quad Y_A=\dfrac{-Pab\omega^2(a^2-b^2)}{12g(a^2+b^2)^{3/2}};$

$X_B=0;\quad Y_B=\dfrac{Pab\omega^2(a^2-b^2)}{12g(a^2+b^2)^{3/2}}.$



Probl. 42.12



Probl. 42.13

42.13. Avec quelle vitesse angulaire une plaque homogène ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle ABD doit-elle tourner autour du côté $AB=a$ pour que la pression latérale sur l'appui inférieur B soit nulle? Supposer que la distance entre les appuis est égale à la longueur du côté AB.

Rép. $\omega=2\sqrt{\dfrac{g}{a}}.$

42.14. La partie tournante d'une grue est composée d'une flèche CD de longueur L et de poids G, d'un contrepoids E et d'une charge K de même poids P (cf. schéma problème 34.34). Lorsqu'on branche le couple constant de freinage, la grue, qui jusque-là tournait avec la vitesse angulaire $n=1{,}5$ tr/mn, s'arrête en 2 s.

Considérant la flèche comme une poutre mince homogène et le contrepoids avec la charge comme des masses ponctuelles, calculer les réactions

dynamiques des appuis A et B de la grue à la fin du freinage. La distance entre les appuis de la grue $AB=3$ m, $P=5$ t, $G=8$ t, $\alpha=45°$, $L=30$ m, $l=10$ m, le centre de gravité du système se trouve sur l'axe de rotation; négliger la déviation de la charge par rapport au plan de la grue. Les axes x, y sont reliés à la grue. La flèche CD se trouve dans le plan yz.

Indication. Utiliser la réponse du problème 34.34 (poser $Q=P$).

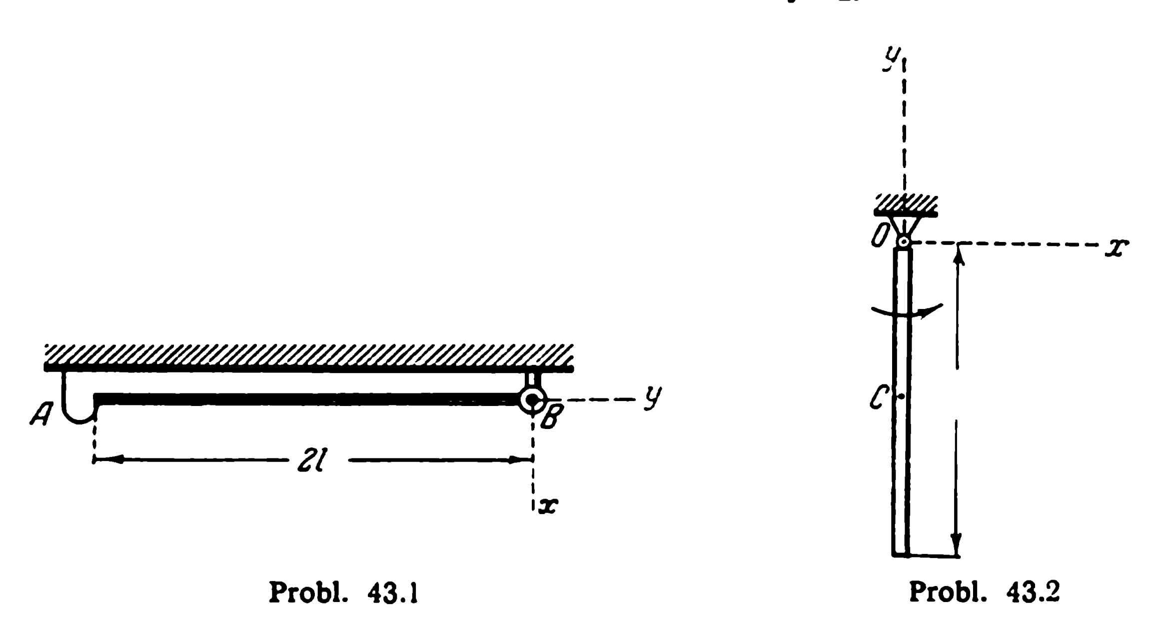
Rép. $Y_A=-Y_B=0$; $X_B=-X_A\cong 6{,}2$ t.

§ 43. Problèmes mixtes

43.1. Une poutre homogène AB de longueur $2l$ et de poids Q, aux extrémités fixées, se trouve dans une position horizontale. A un instant donné on libère l'extrémité A et la poutre commence à tomber en tournant autour de l'axe horizontal passant par l'extrémité B; à l'instant où la poutre devient verticale on libère aussi l'extrémité B.

Déterminer la trajectoire du centre de gravité de la poutre dans son mouvement ultérieur et sa vitesse angulaire ω.

Rép. 1) La parabole $y^2=3lx-3l^2$; 2) $\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$.



Probl. 43.1 Probl. 43.2

43.2. Une barre homogène pesante de longueur l est suspendue par son extrémité supérieure à un axe horizontal O. On communique à cette barre, dans sa position verticale, une vitesse angulaire $\omega_0=3\sqrt{\frac{g}{l}}$. Après avoir effectué un demi-tour elle se détache de l'axe O.

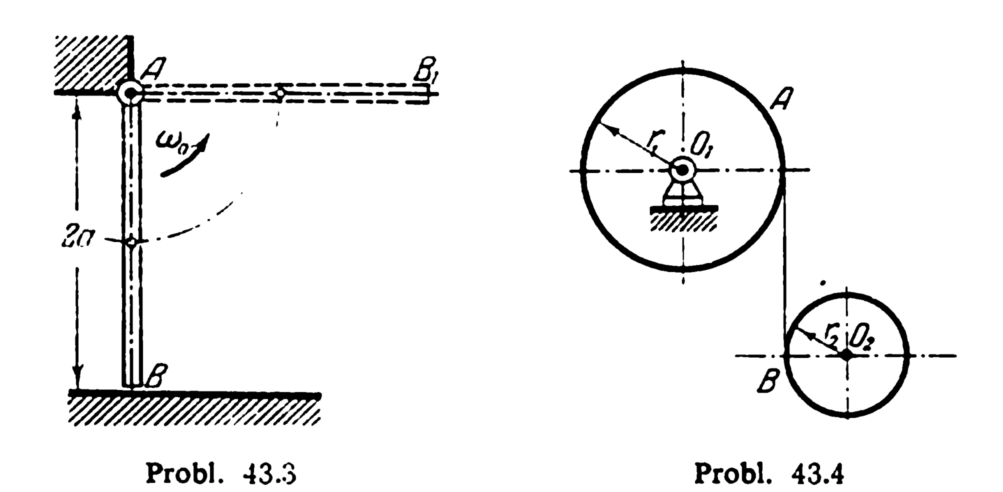
Déterminer la trajectoire du centre de gravité de la barre dans son mouvement ultérieur et la vitesse angulaire ω.

Rép. 1) La parabole $y_C=\frac{l}{2}-\frac{2}{3l}x_C^2$; 2) $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$.

43.3. Une barre homogène AB de longueur $2a$ est suspendue par son extrémité A; l'autre extrémité B est à même le plancher. Ayant communiqué à la barre une vitesse angulaire initiale ω_0 on libère l'extrémité A à l'instant où la barre est dans la position horizontale. Le mouvement de la barre se poursuit sous l'action de la pesanteur.

Trouver pour quelle vitesse initiale ω_0 la barre tombe sur le plancher dans la position verticale.

Rép. $\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2(2k+1)^2}{\pi(2k+1)+2}\right]$, où $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$



Probl. 43.3 Probl. 43.4

43.4. Deux fils flexibles sont enroulés sur deux cylindres circulaires homogènes A et B pesant respectivement P_1 et P_2 et de rayons r_1 et r_2; les spires sont disposées symétriquement par rapport aux plans médians parallèles aux bases des cylindres; les axes des cylindres sont horizontaux, leurs génératrices étant perpendiculaires aux lignes de plus grande pente. L'axe du cylindre A est fixe, le cylindre B tombe à partir de l'état de repos sous l'action de la pesanteur.

Calculer à l'instant t après le début du mouvement, en supposant que les fils sont encore enroulés sur les deux cylindres: 1) les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 des cylindres, 2) le chemin s parcouru par le centre de gravité du cylindre B, 3) la tension T des fils.

Rép. 1) $\omega_1 = \frac{2gP_2}{r_1(3P_1+2P_2)}\, t$, $\omega_2 = \frac{2gP_1}{r_2(3P_1+2P_2)}\, t$;

2) $s = \frac{g(P_1+P_2)}{3P_1+2P_2}\, t^2$; 3) $T = \frac{P_1P_2}{2(3P_1+2P_2)}$.

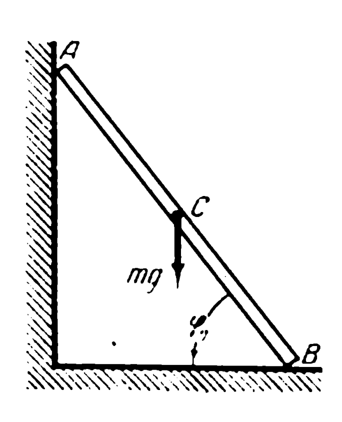
43.5. Une barre homogène AB de longueur a se trouve dans un plan vertical sous un angle φ_0 par rapport à l'horizontale de sorte que son extrémité A repose sur un mur lisse vertical et l'extrémité B sur un plancher lisse horizontal; on laisse tomber la barre sans vitesse initiale.

1) Calculer sa vitesse et son accélération angulaires.

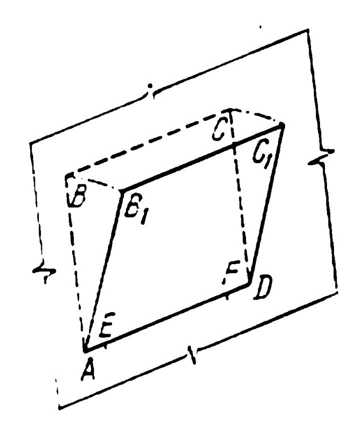
2) Trouver l'angle φ_1 que forme la barre avec l'horizontale à l'instant où elle quitte le mur.

Rép. 1) $\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$, $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a}\cos\varphi$;

2) $\sin\varphi_1 = \frac{2}{3}\sin\varphi_0$.



Probl. 43.5



Probl. 43.7

43.6. Calculer, d'après les données du problème précédent, la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ de la barre et la vitesse de son extrémité inférieure à l'instant où elle tombe sur le plancher.

Rép. $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}$;

$v_A = \frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}$.

43.7. Une planche mince homogène $ABCD$ de forme rectangulaire et de hauteur $AB=2l$ est adossée contre un mur vertical et repose sur deux clous lisses E et F sans têtes; la distance $AE=FD$. A un moment donné la planche commence à tomber, avec une vitesse angulaire initiale infiniment petite, en tournant autour de la droite AD.

Déterminer l'angle α que forme la planche avec le mur à l'instant où elle se détache des clous. Le cas où la planche glisserait sur les clous ne s'en détachant pas est exclu.

Rép. $\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

43.8. Deux disques tournent autour d'un même axe avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2; leurs moments d'inertie par rapport à cet axe sont J_1 et J_2.

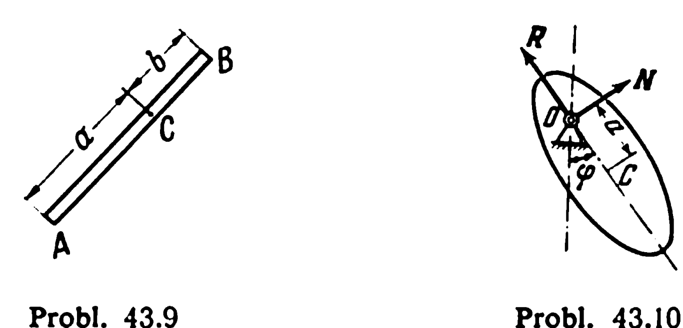
Déterminer la perte de l'énergie cinétique dans le cas où les disques sont brusquement couplés par un embrayage à friction de masse négligeable.

Rép. $\Delta T = \frac{1}{2} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} (\omega_1 - \omega_2)^2$.

43.9. L'accélération angulaire d'une barre AB de masse m dans un mouvement plan est, à l'instant considéré, ε. Le rayon de giration de la barre par rapport à l'axe passant par son centre de gravité C perpendiculairement au plan de mouvement de la barre est ρ; les distances du centre de gravité C aux extrémités A et B de la barre sont respectivement a et b. La masse de la barre est remplacée par deux masses ponctuelles concentrées aux extrémités A et B de telle sorte que leur somme soit égale à la masse de la barre et que les centres d'inertie des masses réduites soient confondus avec le centre de gravité de la barre.

Déterminer si le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie des masses réduites sont respectivement égaux au vecteur résultant et au moment résultant des forces d'inertie de la barre.

Rép. Les vecteurs résultants des forces d'inertie des masses réduites et de la barre sont geométriquement égaux, les moments résultants diffèrent de $m(ab - \rho^2)\varepsilon$.



Probl. 43.9

Probl. 43.10

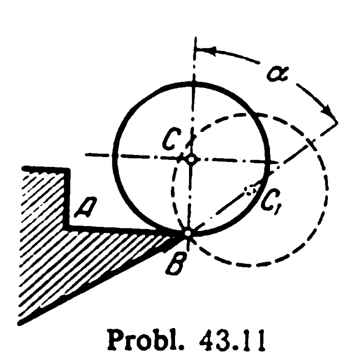
43.10. Un corps solide de poids P oscille autour d'un axe horizontal O perpendiculairement au plan du schéma. La distance de l'axe de suspension au centre de gravité C est a; le rayon de giration du corps par rapport à l'axe passant par le centre de gravité, perpendiculairement au plan du schéma, est ρ. A l'instant initial le corps a été dévié de sa position d'équilibre d'un angle φ_0 et abandonné sans vitesse initiale.

Déterminer les deux composantes R et N de la réaction de l'axe, l'une suivant la direction passant par le point de suspension et le centre de gravité du corps et l'autre perpendiculaire à celle-ci. Exprimer ces composantes en fonction de l'angle φ de déviation du corps par rapport à la verticale.

Rép. $R = P \cos\varphi + \frac{2Pa^2}{\rho^2 + a^2} (\cos\varphi - \cos\varphi_0)$;

$$N = P \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2} \sin\varphi.$$

43.11. Un cylindre pesant homogène, sous l'effet d'une vitesse initiale infiniment petite, tombe sans glisser d'un palier horizontal AB dont le bord B est pointu et parallèle à la génératrice du cylindre. Le rayon de la base du cylindre est r. A l'instant où le cylindre se détache du palier, le plan passant par son axe et le bord B forme avec sa position verticale un angle $\widehat{CBC_1}=\alpha$.



Probl. 43.11

Déterminer la vitesse angulaire du cylindre à l'instant où il se détache du palier ainsi que l'angle α. Négliger la résistance au roulement et la résistance de l'air.

Rép. $\omega=2\sqrt{\frac{g}{7r}}$;

$\alpha=\arccos\frac{4}{7}=55°,1.$

43.12. Sur la surface latérale d'un cylindre circulaire d'axe vertical, autour duquel il peut tourner sans frottement, on a pratiqué une rainure lisse hélicoïdale dont l'angle d'hélice est α. A l'instant initial le cylindre est à l'arrêt; on met dans la rainure une bille pesante qui tombe suivant cette rainure sans vitesse initiale et fait tourner le cylindre. Etant donné que la masse du cylindre est M, son rayon R, la masse de la bille m et si l'on sait que la distance de la bille à l'axe est égale à R et que le moment d'inertie du cylindre est $\frac{MR^2}{2}$, calculer la vitesse angulaire ω du cylindre à l'instant où la bille descend d'une hauteur h.

Rép. $\omega=\frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}.$

§ 44. Choc

44.1. Un mouton de sonnette A tombe d'une hauteur de 4,905 m et frappe l'enclume B fixée à un ressort. Le mouton pèse 10 kgf, l'enclume 5 kgf.

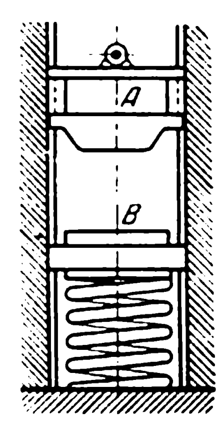
Déterminer la vitesse avec laquelle commence le mouvement de l'enclume après le choc, si le mouton se déplace avec elle.

Rép. 6,54 m/s.

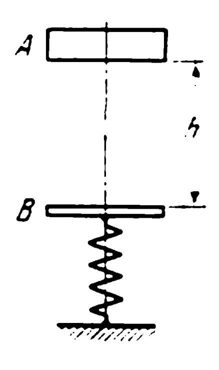
44.2. Un corps A de poids P tombe sans vitesse initiale d'une hauteur h sur une plaque B de poids p, fixée à un ressort de rigidité c.

Calculer la compression s du ressort après le choc en supposant que le coefficient de restitution est nul.

Rép. $s=\frac{P}{c}+\sqrt{\frac{P^2}{c^2}+2h\frac{P^2}{c(P+p)}}.$



Probl. 44.1



Probl. 44.2

44.3. Dans l'instrument qui sert à déterminer expérimentalement le coefficient de restitution, la bille faite du matériau à essayer tombe sans vitesse initiale à l'intérieur d'un tube vertical en verre d'une hauteur donnée $h_1 = 50$ cm sur une plaque horizontale fixe faite de matériau correspondant.

Trouver le coefficient de restitution si la hauteur h_2 à laquelle a rebondi la bille après le choc est de 45 cm.

Rép. $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0{,}95.$

44.4. Une bille élastique tombe verticalement d'une hauteur h sur une plaque horizontale, rebondit, retombe, etc.

Calculer le chemin parcouru par la bille jusqu'à l'arrêt, le coefficient de restitution lors du choc étant k.

Rép. $s = \frac{1+k^2}{1-k^2} h.$

44.5. Un marteau à vapeur pesant 12 t tombe avec une vitesse de 5 m/s sur une enclume dont le poids, avec la pièce à forger, est de 250 t.

Calculer le travail A_1 absorbé par la pièce à forger et le travail A_2 absorbé par le fondement ainsi que le rendement η du marteau; le choc est non élastique.

Rép. $A_1 = 14\ 600$ kgf m; $A_2 = 700$ kgf m; $\eta = 0{,}95$.

44.6. Trouver les vitesses finales après le choc parfaitement élastique de deux billes identiques se déplaçant à la rencontre l'une de l'autre avec des vitesses v_1 et v_2.

Rép. Après le choc les billes échangent leurs vitesses.

44.7. Deux billes identiques élastiques A et B se déplacent à la rencontre l'une de l'autre.

Pour quel rapport des vitesses (avant le choc) la bille A s'arrête-t-elle après le choc? Le coefficient de restitution lors du choc est k.

Rép. $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}$.

44.8. Déterminer le rapport des masses m_1 et m_2 de deux billes dans les deux cas suivants: 1) la première est à l'arrêt, un choc central a lieu entre les deux, après quoi la seconde reste au repos; 2) les billes se rencontrent avec des vitesses égales et de sens opposé, après le choc central la seconde bille reste au repos. Le coefficient de restitution est k.

Rép. 1) $\frac{m_2}{m_1}=k$; 2) $\frac{m_2}{m_1}=1+2k$.

44.9. Trois billes parfaitement élastiques de masses m_1, m_2 et m_3 se trouvent dans une rainure lisse à une certaine distance l'une de l'autre. La première bille lancée avec une certaine vitesse initiale heurte la seconde au repos, laquelle se mettant en mouvement heurte à son tour la troisième bille au repos.

Pour quelle grandeur de la masse m_2 de la seconde bille la vitesse de la troisième sera-t-elle maximale?

Rép. $m_2=\sqrt{m_1 m_3}$.

44.10. Une bille de masse m_1 se déplaçant uniformément avec la vitesse v_1 rencontre une bille de masse m_2 au repos, de sorte que lors du choc sa vitesse forme un angle α avec la ligne joignant les centres des billes.

Déterminer: 1) la vitesse de la première bille après le choc en supposant le choc parfaitement inélastique; 2) la vitesse de chacune des billes après le choc en supposant le choc élastique, de coefficient de restitution k.

Rép. 1) $u_1=v_1\sqrt{\sin^2\alpha+\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}$;

2) $u_1=v_1\sqrt{\sin^2\alpha+\left(\frac{m_1-km_2}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}$,

$u_2=v_1\frac{m_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}$.

44.11. Une bille parfaitement élastique dont le centre se déplace en ligne droite avec la vitesse v rencontre sous un angle α un plan vertical lisse.

Calculer la vitesse de la bille après le choc.

Rép. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, les vitesses avant et après le choc sont égales en module.

44.12. Une bille d'acier tombe sur une plaque horizontale en acier sous un angle de 45° et rebondit en formant un angle de 60° avec la verticale.

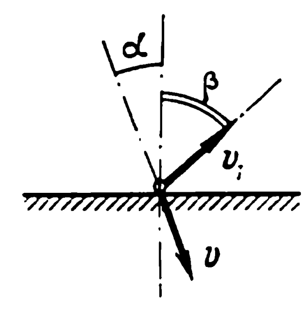
Calculer le coefficient de restitution lors du choc.

Rép. $k=0,58$.

44.13. Une bille tombe obliquement sur un plan horizontal fixe avec la vitesse v et rebondit avec la vitesse $v_1=\frac{v\sqrt{2}}{2}$.

Déterminer l'angle d'incidence α et l'angle de réflexion β, si le coefficient de restitution $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rép. $\alpha=\frac{\pi}{6}$; $\beta=\frac{\pi}{4}$.

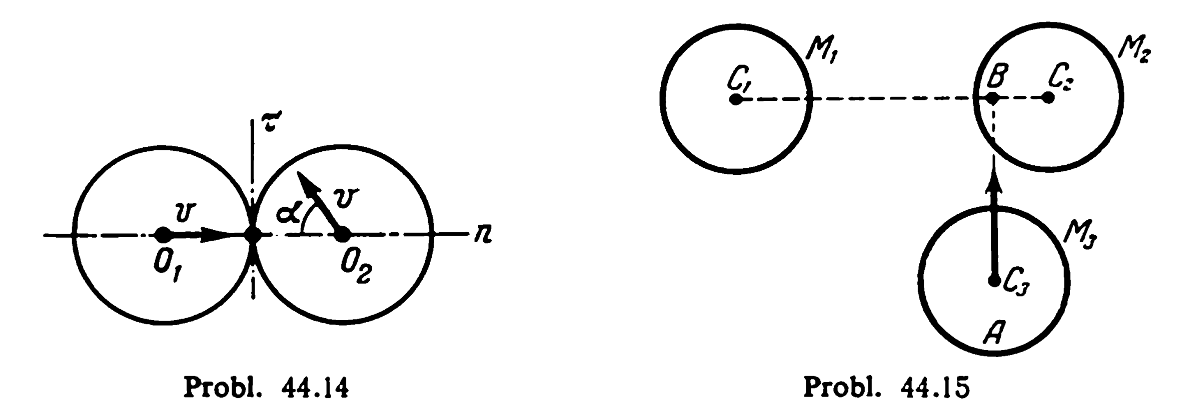


Probl. 44.13

44.14. Deux billes identiques parfaitement élastiques animées de mouvements de translation se heurtent avec des vitesses v égales en module. Avant le choc, la vitesse de la bille gauche est dirigée suivant la ligne des centres vers la droite, celle de la bille droite forme un angle α avec la ligne des centres (cf. schéma).

Calculer les vitesses des billes après le choc.

Rép. $u_{1n}=-v\cos\alpha$; $u_{1\tau}=0$; $u_{2n}=v$; $u_{2\tau}=v\sin\alpha$. L'axe n est dirigé suivant la ligne des centres vers la droite, l'axe τ vers le haut.



Probl. 44.14 Probl. 44.15

44.15. On a trois billes identiques: M_1, M_2, M_3 de rayons R, la distance des centres C_1C_2 étant a.

Déterminer sur quelle droite AB perpendiculaire à la ligne C_1C_2 doit se trouver le centre C_3 de la troisième bille pour que celle-ci, ayant reçu une vitesse initiale dans la direction AB, après le choc avec la bille M_2, se heurte avec la bille M_1 suivant la ligne de leurs centres; les billes sont parfaitement élastiques et animées de mouvements de translation.

Rép. La distance de la droite AB au centre C_2 est $BC_2=\frac{4R^2}{a}$.

44.16. Pour consolider le sol sous le fondement d'un bâtiment on enfonce des pilotis de poids $P=50$ kgf avec une sonnette dont le mouton, pesant 450 kgf, tombe sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 m; pendant les dix derniers coups le pilotis s'est enfoncé de 5 cm.

Déterminer la résistance moyenne du sol à son enfoncement. Les chocs sont inélastiques.

Rép. $S=16{,}2$ t.

44.17. Deux billes de masses m_1 et m_2 sont suspendues par des fils parallèles de longueurs l_1 et l_2 de manière à ce que leurs centres soient situés à une même hauteur. La première bille a été déviée de la verticale d'un angle α_1, puis abandonnée sans vitesse initiale.

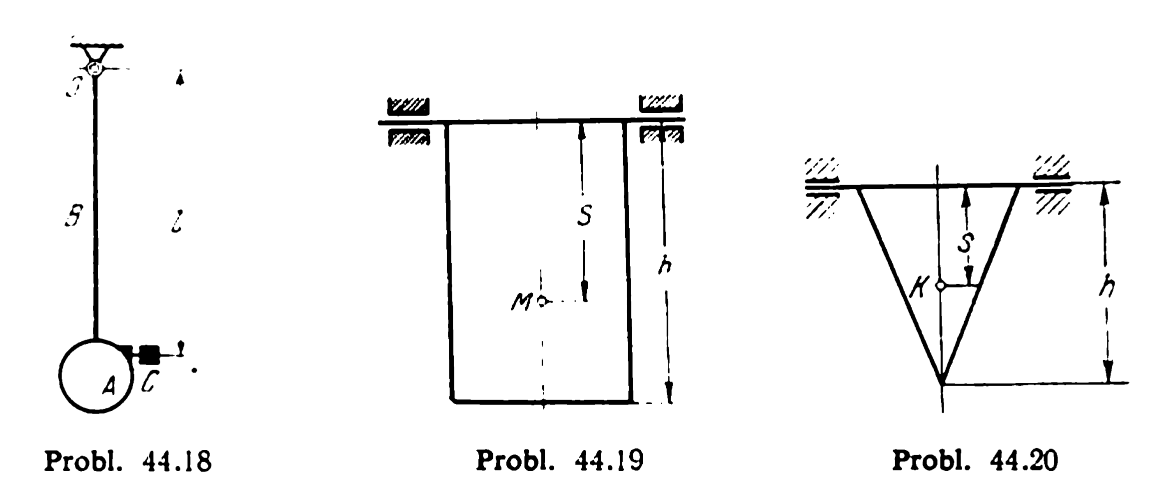
Déterminer l'angle de déviation limite α_2 de la seconde bille, si le coefficient de restitution est k.

Rép. $\sin\frac{\alpha_2}{2}=\frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}$.

44.18. Le pendule d'un percuteur comporte un disque en acier A de rayon 10 cm et d'épaisseur 5 cm et une barre en acier B de section droite circulaire de diamètre de 2 cm et longue de 90 cm.

A quelle distance l du plan horizontal, où se trouve l'axe de rotation O, doit-on mettre la pièce à casser C pour que l'axe ne subisse pas de choc? L'impulsion de choc est située dans le plan du schéma et est dirigée horizontalement.

Rép. $l=97{,}5$ cm.



Probl. 44.18 Probl. 44.19 Probl. 44.20

44.19. Déterminer la position du centre de l'impact d'une cible rectangulaire. La hauteur de la cible est h.

Rép. $s=\frac{2}{3}h$.

44.20. Déterminer la position du centre de l'impact K d'une cible triangulaire. La hauteur de la cible est h.

Rép. $s=\frac{1}{2}h$.

44.21. Deux poulies tournent dans un même plan autour de leurs axes avec des vitesses angulaires ω_{10} et ω_{20}.

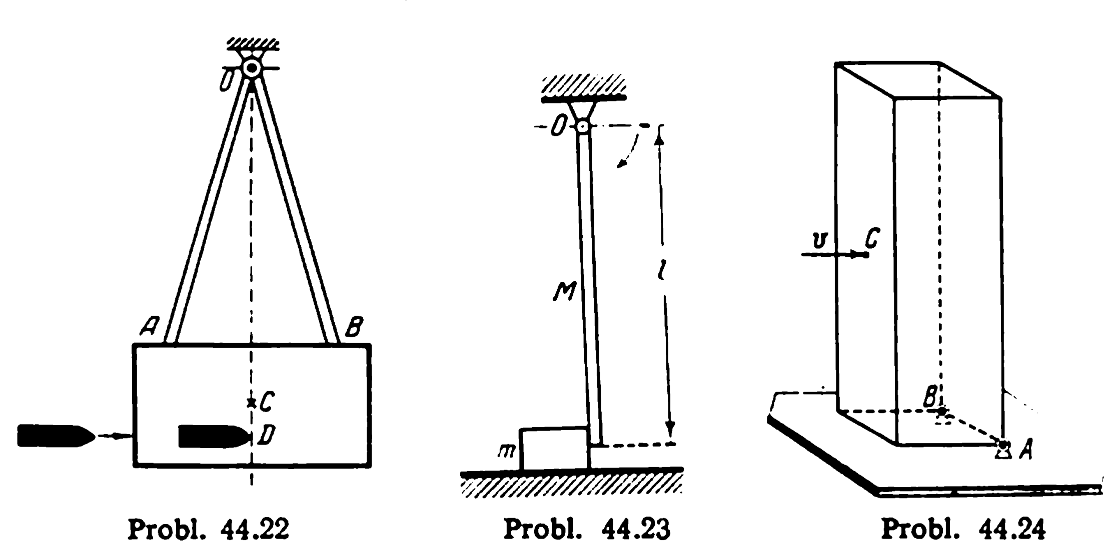
Calculer les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 des poulies après les avoir accouplées par une courroie. Considérer les poulies comme des disques

circulaires de même densité et de rayons R_1 et R_2; négliger le glissement et la masse de la courroie.

$$Rép.\quad \omega_1=\frac{R_1^2\omega_{10}+R_2^2\omega_{20}}{R_1(R_1^2+R_2^2)};\quad \omega_2=\frac{R_1^2\omega_{10}+R_2^2\omega_{20}}{R_2(R_1^2+R_2^2)}.$$

44.22. Le pendule balistique, utilisé pour la mesure de la vitesse d'un obus, est composé d'un cylindre AB suspendu à l'axe horizontal O; le cylindre, rempli de sable, est ouvert à l'extrémité A. L'obus entrant dans le cylindre provoque la rotation du pendule autour de l'axe O d'un certain angle. Etant donnés la masse du pendule M, la distance de son centre de gravité C à l'axe O, $CO=h$, son rayon de giration ρ par rapport à l'axe O, la masse m de l'obus, la distance de la ligne d'action de l'impulsion de choc à l'axe $OD=a$ et l'angle de déviation α du pendule, calculer la vitesse de l'obus en supposant que l'axe O du pendule ne subit pas de choc et que $ah=\rho^2$.

$$Rép.\quad v=\frac{2(Mh+ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$



Probl. 44.22 Probl. 44.23 Probl. 44.24

44.23. Une barre homogène de masse M et de longueur l, fixée par son extrémité supérieure à l'articulation cylindrique O, tombe sans vitesse initiale à partir de la position horizontale. Dans la position verticale elle percute un corps de masse m en l'animant d'un mouvement sur un plan horizontal rugueux. Le coefficient de frottement est f.

Calculer le chemin parcouru par le corps si le choc est inélastique.

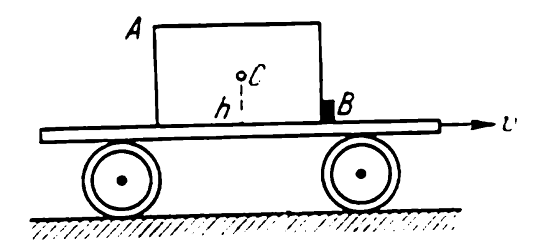
$$Rép.\quad s=\frac{3l}{2f}\,\frac{M^2}{(M+3m)^2}.$$

44.24. Un prisme droit homogène de base carrée est posé sur un plan horizontal et peut tourner autour de l'arête AB située dans ce même plan. Le côté de la base du prisme est égal à a, sa hauteur est $3a$, sa masse $3m$. Une bille de masse m percute le centre C de sa face latérale vis-à-vis de l'arête AB avec une vitesse horizontale v.

Supposant le choc inélastique et la masse de la bille concentrée en son centre qui reste au point C après le choc, déterminer la plus petite valeur de la vitesse v pour laquelle le prisme est renversé.

Rép. $v=\frac{1}{3}\sqrt{53ga}.$

44.25. Une plate-forme avec la charge prismatique AB qu'elle supporte roule sur des rails horizontaux avec la vitesse v. La plate-forme possède une saillie contre laquelle bute l'arête B de la charge et laquelle empêche cette dernière de glisser vers l'avant sur la plate-forme, mais n'empêche pas sa rotation autour de l'arête B. Etant donnés la hauteur h du centre



Probl. 44.25

de gravité de la charge au-dessus de la plate-forme, le rayon ρ de giration de la charge par rapport à l'arête B, calculer la vitesse angulaire ω de rotation de la charge autour de l'arête B lors de l'arrêt brusque de la plate-forme.

Rép. $\omega=\frac{hv}{\rho^2}.$

44.26. Supposant, dans les conditions du problème précédent, que la charge soit un parallélépipède rectangle homogène dont la longueur de l'arête le long de la plate-forme est de 4 m, et que sa hauteur est de 3 m, calculer la vitesse pour laquelle a lieu le chavirement de la charge.

Rép. $v=30{,}7$ km/h.

§ 45. Dynamique du point et du système de masse variable (de composition variable)

45.1. Ecrire l'équation du mouvement du pendule de masse variable dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse. La masse du pendule varie suivant une loi donnée $m=m(t)$ par détachement de particules avec une vitesse relative nulle. La longueur du fil du pendule est l. Le pendule est soumis également à une force de résistance proportionnelle à la vitesse angulaire: $R=-\beta\dot{\varphi}$.

Rép. $\ddot{\varphi}+\frac{\beta}{m(t)l}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$

45.2. Ecrire l'équation différentielle du mouvement ascendant d'une fusée. Supposer que la vitesse effective v_{ef} d'éjection des gaz * est constante. La masse de la fusée varie suivant la loi $m=m_0 f(t)$ (loi de combustion). La résistance de l'air est une fonction donnée de la vitesse et de la position de la fusée: $R(x, \dot{x})$.

Rép. $\ddot{x}=-g-\frac{\dot{f}(t)}{f(t)}v_{ef}-\frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}$.

45.3. Intégrer l'équation du mouvement dans le problème précédent pour $m=m_0(1-\alpha t)$ et $R=0$. La vitesse initiale de la fusée sur la surface de la Terre est nulle. A quelle hauteur se trouve la fusée aux instants $t=10$; 30; 50 s pour $v_{ef}=2\,000$ m/s et $\alpha=\frac{1}{100}$ s^{-1}?

Rép. $x(t)=\frac{v_{ef}}{\alpha}[(1-\alpha t)\operatorname{Log}(1-\alpha t)+\alpha t]-\frac{gt^2}{2}$;

$x(10)=0{,}54$ km; $x(30)=5{,}65$ km; $x(50)=18{,}4$ km.

45.4. Une fusée de masse initiale m_0 monte verticalement dans le champ de pesanteur uniforme avec une accélération constante ng (g est l'accélération de la pesanteur).

Négligeant la résistance de l'atmosphère et supposant la vitesse effective d'éjection v_{ef} des gaz constante, déterminer: 1) la loi de la variation de la masse de la fusée, 2) la loi de la variation de la masse de la fusée en l'absence du champ de pesanteur.

Rép. 1) $m=m_0 e^{-\frac{n+1}{v_{ef}}gt}$; 2) $m=m_0 e^{-\frac{ng}{v_{ef}}t}$.

45.5. La masse de la fusée décrite dans le problème 45.2 varie jusqu'à l'instant $t=t_0$ suivant la loi $m=m_0 e^{-\alpha t}$.

Négligeant la force de résistance déterminer le mouvement de la fusée et, supposant qu'à l'instant t_0 le combustible tout entier soit consumé, calculer l'altitude maximale de la fusée. A l'instant initial la fusée était sur la Terre et sa vitesse était nulle.

Rép. $H=\frac{\alpha v_{ef}}{2g}[\alpha v_{ef}-g]\,t_0^2$,

où v_{ef} est la vitesse effective d'éjection des gaz de la fusée.

45.6. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, la valeur de α donnant la plus grande altitude possible de la fusée H_{max} et calcu-

* La poussée d'un moteur à réaction est définie par la formule $P_m=-\frac{dm}{dt}v_{ef}$, où v_{ef} est la vitesse effective d'éjection.

ler H_{max} (il est nécessaire de considérer la grandeur $\mu = \alpha t_0 = \text{Log}\,\frac{m_0}{m_1}$ comme constante; m_1 est la masse de la fusée à l'instant t_0).

Rép. $\alpha = \infty$ (combustion instantanée);

$$H_{max} = \frac{\mu^2}{2g}\, v_{ef}^2 .$$

45.7. Calculer dans les conditions des problèmes 45.5 et 45.6 et en se donnant le facteur d'accélération $k = \frac{\alpha v_{ef}}{g}$, l'altitude H de la fusée en fonction de H_{max}.

Rép. $H = H_{max}\,\frac{k-1}{k}$.

45.8. Une fusée part de la Lune verticalement. La vitesse effective d'éjection $v_{ef} = 2\,000$ m/s. Le nombre de Tsiolkovski $z = 5$ *.

Déterminer le temps de combustion du propergol pour que la fusée tteigne la vitesse $v = 3\,000$ m/s (supposer que l'accélération de la pesanteur à proximité de la Lune soit constante et égale à 1,62 m/s^2).

Rép. ≈ 2 mn 4 s.

45.9. Une fusée se déplace vers le haut dans un champ de pesanteur uniforme avec une accélération constante w.

Négligeant la résistance de l'air et supposant que la vitesse effective v_{ef} d'éjection des gaz soit constante, calculer le temps T pendant lequel la masse de la fusée diminue de deux fois.

Rép. $T = \frac{v_{ef}}{w+g}$ Log 2.

45.10. La vitesse effective d'éjection des gaz d'une fusée $v_{ef} = 2{,}4$ km/s.

Quel est le rapport de la réserve de propergol à la masse de la fusée sans propergol pour qu'après la combustion du propergol la fusée, se déplaçant en dehors du champ de pesanteur et de l'atmosphère, atteigne la vitesse de 9 km/s?

Rép. La masse du propergol doit constituer à peu près 98% de la masse de la fusée au départ.

45.11. Une fusée est animée d'un mouvement de translation en l'absence de la gravitation et de la résistance du milieu. La vitesse effective d'éjection des gaz $v_{ef} = 2\,400$ m/s.

Calculer le nombre de Tsiolkovski si, à l'instant de combustion complète du propergol, la vitesse de la fusée est égale à 4 300 m/s.

Rép. $z \approx 6$.

---

* Le rapport de la masse au départ de la fusée à sa masse sans combustible est dit nombre de Tsiolkovski.

45.12. Un corps de masse variable et de vitesse initiale nulle se déplace avec une accélération constante w suivant des guides horizontaux. La vitesse effective d'éjection des gaz v_{ef} est constante.

Déterminer, en négligeant la résistance, le chemin parcouru par le corps jusqu'à l'instant où sa masse diminue de k fois.

Rép. $s = \frac{v_{ef}^2}{2w} (\text{Log } k)^2$.

45.13. Résoudre le problème précédent en supposant le corps soumis à une force de frottement de glissement.

Rép. $s = \frac{wv_{ef}^2}{2(w+fg)^2} (\text{Log } k)^2$, où f est le coefficient de frottement.

45.14. Un corps de masse variable se déplace suivant des guides spéciaux le long de l'équateur.

L'accélération tangentielle $w_\tau = a$ est constante.

Faisant abstraction de la résistance à l'avancement, déterminer la diminution de la masse du corps lorsqu'il effectue un tour autour de la Terre, si la vitesse effective d'éjection des gaz v_{ef}=const. Quelle doit être l'accélération a pour qu'après avoir effectué un tour le corps atteigne la première vitesse cosmique?

Rép. De $e^{\frac{2}{v_{ef}}\sqrt{\pi Ra}}$ fois; $a = \frac{g}{4\pi}$.

45.15. Déterminer dans le problème précédent la masse de propergol brûlée à l'instant où la pression du corps sur les guides est nulle.

Rép. $m_p = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_{ef}}}\right)$.

45.16. Un corps glisse sur des rails horizontaux. L'éjection du gaz a lieu verticalement vers le bas avec une vitesse effective constante v_{ef}. La vitesse initiale du corps est v_0.

Trouver la loi de variation de sa vitesse et la loi de son mouvement, si la variation de la masse a lieu suivant la loi $m = m_0 - at$. Le coefficient de frottement est f.

Rép. $v = v_0 - f\left[gt - v_{ef} \text{ Log } \frac{m_0}{m_0 - at}\right]$;

$$s = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_{ef}\left[t \text{ Log } m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\text{Log }(m_0 - at) - 1\right)\right]\right\}.$$

45.17. Résoudre le problème précédent si la variation du propergol a lieu suivant la loi $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Déterminer la valeur de α pour laquelle le corps se déplace avec une vitesse constante $\mathbf{v}_0$.

Rép. $v = v_0 - f(g - \alpha v_{ef})\, t$; $s = v_0 t - f(g - \alpha v_{ef}) \frac{t^2}{2}$; $\alpha = \frac{g}{v_{ef}}$.

45.18. Quel est le chemin parcouru par une fusée sur un tronçon rectiligne actif de sa trajectoire, dans le vide et en l'absence de forces de gravitation, pendant son accélération à partir de la vitesse initiale nulle jusqu'à une vitesse égale à la vitesse effective d'éjection des produits de combustion v_{cf}, si la masse initiale de la fusée est m_0 et la consommation spécifique β?

Rép. $s=\frac{v_{cf}\, m_0}{\beta}\cdot\frac{e-2}{e}$, où e est le nombre népérien.

45.19. Une fusée se déplace en ligne droite en dehors du champ de gravitation et en l'absence de la résistance. Déterminer le travail accompli par la poussée à l'instant de la combustion complète du propergol. La masse initiale de la fusée est m_0, sa masse finale m_1. La vitesse effective d'éjection v_{cf} est constante.

Rép. $A=m_1 v_{cf}^2[\mathrm{Log}\, z-(z-1)]$; $z=\frac{m_0}{m_1}$.

45.20. Une fusée se déplace en ligne droite dans le vide et en l'absence des forces de gravitation. Pour quel rapport z des masses initiale m_0 et finale m_1 son rendement mécanique, défini comme le rapport de l'énergie cinétique de la fusée après la combustion du propergol à l'énergie dépensée, atteint-il la plus grande valeur?

Rép. Pour z, racine de l'équation $\mathrm{Log}\, z=\frac{2(z-1)}{z+1}$.

45.21. Un avion de masse m_0 atterrit à la vitesse v_0 sur un aérodrome polaire. Par suite du givrage la masse de l'avion pendant le roulement après l'atterrissage croît d'après la formule $m=m_0+at$, $a=$const. La résistance à l'avancement de l'avion sur l'aérodrome est proportionnelle à son poids (le coefficient de proportionnalité étant f). Calculer l'intervalle de temps écoulé jusqu'à l'arrêt de l'avion 1) T en tenant compte de la variation de sa masse, 2) T_1 en la négligeant. Trouver la loi de variation de la vitesse en fonction du temps.

Rép. $T=\frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2av_0}{fgm_0}}-1\right)$; $T_1=\frac{v_0}{fg}$;

$$v=\frac{m_0 v_0-fg/2\,(2m_0+at)\,t}{m_0+at}.$$

45.22. Les vitesses effectives d'éjection du premier et du second étage d'une fusée à deux étages sont respectivement

$$v_{cf}^{(1)}=2\,400\ \mathrm{m/s},\quad v_{cf}^{(2)}=2\,600\ \mathrm{m/s}.$$

Supposant que le mouvement ait lieu en dehors du champ de pesanteur et de l'atmosphère calculer les nombres de Tsiolkovski nécessaires pour

communiquer au premier étage une vitesse finale $v_1=2\ 400$ m/s et au second étage une vitesse finale $v_2=5\ 400$ m/s.

Rép. $z_1=2{,}72$; $z_2=3{,}17$.

45.23. Supposant que pour une fusée à trois étages les nombres de Tsiolkovski et les vitesses effectives v_{ef} d'éjection soient les mêmes pour les trois étages, trouver le nombre de Tsiolkovski pour $v_{ef}=2{,}4$ km/s, si après combustion de tout le propergol la vitesse de la fusée est de 9 km/s (négliger l'effet du champ de pesanteur et la résistance de l'atmosphère).

Rép. $z=3{,}49$.

45.24. En l'absence de la pesanteur et de la résistance de l'atmosphère une fusée à trois étages est animée d'un mouvement de translation. Les vitesses effectives d'éjection et les nombres de Tsiolkovski sont identiques pour les trois étages et sont respectivement $v_{ef}=2\ 500$ m/s, $z=4$. Calculer les vitesses de la fusée après la combustion du propergol du premier, du deuxième et du troisième étage.

Rép. $v_1=3\ 465$ m/s; $v_2=6\ 930$ m/s; $v_3=10\ 395$ m/s.

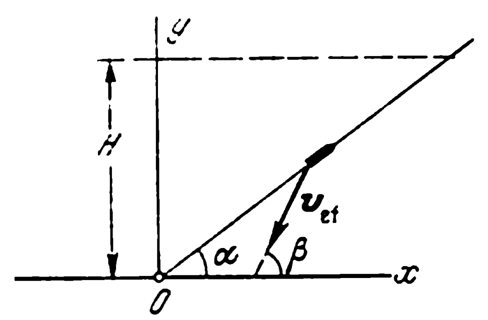
45.25. La rétrofusée d'un vaisseau cosmique s'approchant de la Lune est allumée à une distance H de sa surface, la vitesse du vaisseau à l'instant de l'allumage $\mathbf{v}_0$ étant dirigée vers le centre de la Lune. La force de gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance du vaisseau au centre de la Lune; la masse du vaisseau varie suivant la loi $m=m_0e^{-\alpha t}$ (m_0 est la masse de la fusée à l'instant de l'allumage de la rétrofusée, α est une constante). Calculer la valeur de α pour laquelle le vaisseau effectue un alunissage en douceur (autrement dit, sa vitesse d'alunissage est nulle). La vitesse effective d'éjection des gaz v_{ef} est constante. Le rayon de la Lune est R.

Rép. $\alpha=\dfrac{v_0^2}{2v_{ef}H}+\dfrac{gR}{v_{ef}(R+H)}$.

45.26. Déterminer la loi de variation de la masse d'une fusée montant verticalement avec une vitesse initiale nulle, si son accélération w est constante et la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse (b est le coefficient de proportionnalité). Le champ de la pesanteur est uniforme. La vitesse effective d'éjection du gaz v_{ef} est constante.

Rép. $m=\left(m_0+\dfrac{2bv_{ef}^2w^2}{(w+g)^3}\right)e^{-\frac{w+g}{v_{ef}}t}-\dfrac{bw^2}{w+g}t^2+\dfrac{2v_{ef}bw^2}{(w+g)^2}t-\dfrac{2v_{ef}^2bw^2}{(w+g)^3}$.

45.27. Une fusée se déplace dans un champ de pesanteur uniforme suivant une ligne droite avec accélération constante w. Cette droite forme un angle α avec le plan horizontal mené à la surface de la Terre au point de lancement de la fusée. Supposant la vitesse effective d'éjection des gaz v_{ef} constante en grandeur et direction, calculer le rapport des masses initiale et finale de la fusée (le nombre de Tsiolkovski) si après la combustion



Probl. 45.27

du propergol la fusée était à une distance H du plan tangent indiqué ci-dessus.

Rép. $z = e^{\frac{\cos\alpha}{v_{ef}\cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\sin\alpha}}}$, où β est l'angle formé par la vitesse $\mathbf{v}_{ef}$ avec le plan tangent égal à

$$\beta = \arccos\frac{w\cos\alpha}{\sqrt{w^2+g^2+2gw\sin\alpha}}.$$

45.28. Un corps de masse variable se déplace avec une accélération constante w suivant des guides rectilignes rugueux formant un angle α avec l'horizontale. Supposant le champ de pesanteur uniforme et la résistance de l'atmosphère à l'avancement du corps proportionnelle au premier degré de la vitesse (b étant le coefficient de résistance), déterminer la loi de variation de la masse de ce corps. La vitesse effective d'éjection des gaz v_{ef} est constante; le coefficient de frottement entre le corps et les guides est f.

Rép. $m = \left(m_0 - \frac{bwv_{ef}}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{v_{ef}}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{v_{ef}}{w_1}\right)$, où $w_1 = w + g\,(\sin\alpha + {}$ ${}+ f\cos\alpha)$, m_0 étant la masse initiale du corps.

45.29. Un aérostat de poids Q monte verticalement et entraîne une corde reposant sur terre. L'aérostat est soumis à une force de sustentation P, à la pesanteur et à une force de résistance proportionnelle au carré de la vitesse: $R = -\beta\dot{x}^2$. Le poids de l'unité de longueur de la corde est γ. Ecrire l'équation du mouvement de l'aérostat.

Rép. $\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2.$

45.30. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, la vitesse d'ascension de l'aérostat, sachant qu'à l'instant initial il est à l'arrêt et que sa hauteur est H_0.

Rép. $\dot{x}_2 = \frac{Pg}{\beta g+\gamma}\left[1 - \left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\beta\frac{g}{\gamma}\right)}\right] -$

$$-\frac{2g}{2\beta g+3\gamma}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{3+2\beta\frac{g}{\gamma}}\right](Q+\gamma x).$$

45.31. Une goutte d'eau sphérique tombe verticalement dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Par suite de la condensation la masse de la goutte croît proportionnellement à l'aire de sa surface (le coefficient de proportionnalité étant α). Le rayon initial de la goutte est r_0, sa vitesse initiale v_0, sa hauteur initiale h_0. Déterminer sa vitesse et la loi de variation de sa hauteur en fonction du temps (négliger la résistance à l'avancement).

Indication. Montrer que $dr = \alpha\, dt$ et passer à la nouvelle variable indépendante r.

Rép. $x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left[r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right]$,

$$v = v_0 \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left[r - \frac{r_0^4}{r^3}\right], \text{ où } r = r_0 + \alpha t.$$

45.32. Résoudre le problème précédent en supposant que la goutte est soumise en outre à une force de résistance proportionnelle à l'aire de la section droite maximale et à la vitesse de la goutte: $R = -4\beta\pi r^2 v$ (β est un facteur constant).

Rép. $x = h_0 - \frac{1}{3\beta + 2\alpha}\left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha + 3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\beta+\alpha)}\right]\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)} - \right.$

$$\left. - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)}\right] - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha + 3\beta)},$$

$$v = \frac{gr}{4\alpha + 3\beta} + \left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha + 3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\right] r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)},$$

où $r = r_0 + \alpha t$.

45.33. Une chaîne pesante homogène enroulée en boule est située au bord d'une table horizontale, un chaînon pendant de la table. Dirigeant l'axe des x verticalement vers le bas et supposant qu'à l'instant initial $x = 0$, $\dot{x} = 0$, déterminer le mouvement de la chaîne.

Rép. $x = \frac{1}{6} g t^2$.

45.34. L'extrémité d'une chaîne déposée sur le sol est fixée à un wagonnet stationné sur une voie inclinée formant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement de la chaîne sur le sol est f. Le poids de l'unité de longueur de la chaîne est γ, le poids du wagonnet P, sa vitesse initiale v_0. Déterminer la vitesse du wagonnet à un instant arbitraire et trouver la condition nécessaire à son arrêt.

Rép. $\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{P^2 v_0^2}{2(P + \gamma x)^2} + \frac{Pg}{3\gamma} \sin\alpha \left[1 - \frac{P^2}{(P + \gamma x)^2}\right] +$

$$+ \frac{1}{3} g x \sin\alpha + \frac{fPg}{6\gamma}\left[1 - \frac{P^2}{(P + \gamma x)^2}\right] \cos\alpha - \frac{1}{3} f g x \cos\alpha.$$

Le wagonnet peut s'arrêter lorsque l'inégalité $f > \operatorname{tg}\alpha$ est vérifiée.

45.35. Un point matériel de masse m est attiré vers un centre fixe suivant la loi de gravitation universelle newtonienne. La masse du centre varie au cours du temps suivant la loi $M = \frac{M_0}{1 + \alpha t}$. Déterminer le mouvement du point.

Indication. Passer aux nouvelles coordonnées $\xi=\frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta=\frac{y}{1+\alpha t}$ et au temps réduit $\tau=\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

Rép. Les équations du mouvement par rapport aux coordonnées ξ, η sont (f étant la constante de gravitation)

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+f\frac{M_0\xi}{\rho^3}=0;\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2}+f\frac{M_0\eta}{\rho^3}=0;\ \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

c'est-à-dire représentent les équations usuelles dans le cas de masses constantes. En fonction des conditions initiales exprimées en ξ et η les orbites peuvent donc être elliptiques, paraboliques ou hyperboliques.

45.36. Pour communiquer rapidement au rotor d'un gyroscope le nombre de tours nécessaire, on utilise un démarreur à réaction. On encastre dans le rotor des propergols à poudre de masse total m_0 dont les produits de combustion sont éjectés par des tuyères spéciales. Supposer que les propergols à poudre sont des points disposés à une distance r de l'axe de rotation du rotor. La composante tangentielle de la vitesse effective d'éjection des produits de combustion v_{ef} est constante.

Supposant que la consommation spécifique de la masse de poudre est q, déterminer la vitesse angulaire ω du rotor à l'instant de combustion complète de la poudre, si le rotor est soumis à l'action d'un couple résistant constant M. Le rayon du rotor est R. A l'instant initial le rotor est à l'arrêt.

Rép. $\omega=\frac{Rqv_{ef}-M}{r^2q}\operatorname{Log}\frac{J_0}{J_r}$, où $J_0=J_r+m_0r^2$,

J_r étant le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation.

45.37. Calculer, d'après les données du problème précédent, la vitesse angulaire du rotor après la combustion complète de la poudre, si le rotor est soumis à l'action d'un couple résistant proportionnel à sa vitesse angulaire (b étant le coefficient de proportionnalité).

Rép. $\omega=\frac{Rv_{ef}q}{b}\left[1-\left(\frac{J_r}{J_0}\right)^{\frac{b}{r^2q}}\right]$.

45.38. Une fusée à plusieurs étages est composée de la charge utile et des étages. Chaque étage se détache de la fusée une fois son propergol consumé. Par subfusée on comprend la combinaison de l'étage moteur avec les étages passifs et la charge utile, pour chaque subfusée tous les étages passifs et la charge utile sont considérés comme une «charge utile», autrement dit, chacune des combinaisons peut être considérée comme une fusée monoétage. Le numérotage des étages et des subfusées est indiqué sur le schéma.

Soit q le poids de la charge utile, P_i le poids du propergol du i-ième étage, Q_i le poids à sec (sans le propergol) du i-ième étage, G_i le poids total du i-ième étage.

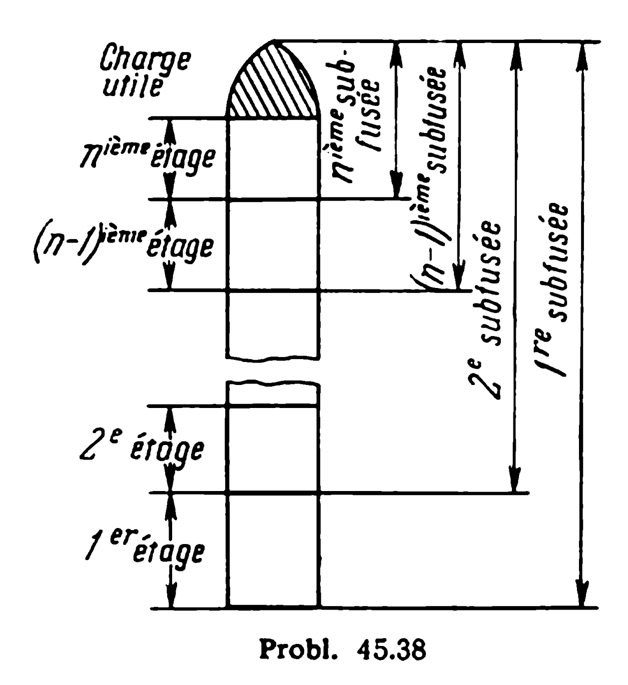
Introduisant le nombre de Tsiolkovski pour chaque subfusée

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

et la caractéristique constructive de chaque étage (le rapport du poids total de l'étage à son poids à sec)

$$s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i},$$

déterminer le poids total au départ de toute la fusée, le poids de la k-ième subfusée, le poids du propergol et le poids à sec de la k-ième subfusée.



Probl. 45.38

Indication. Pour résoudre le problème on introduit le «poids relatif» α_i de la i-ième subfusée, c'est-à-dire le rapport du poids initial de la subfusée au poids de sa charge utile:

$$\alpha_1 = \frac{G_1}{G_2}, \quad \alpha_2 = \frac{G_2}{G_3}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{G_n}{q}.$$

Rép. $$G_1 = q \prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i};$$

$$G_k = q \prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i};$$

$$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k; \quad Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}$$ (formules de Vertregt).

45.39. Une fusée à deux étages est destinée à communiquer à sa charge utile $q = 100$ kgf une vitesse $v = 6\,000$ m/s. Les vitesses d'éjection des gaz

des étages sont égales à $v_{ef}=2\,400$ m/s. Les caractéristiques constructives du premier et du second étage sont respectivement $s_1=4$, $s_2=5$ (cf. problème 45.38). Faisant abstraction de la pesanteur terrestre et de la résistance atmosphérique, calculer les nombres de Tsiolkovski de la première et de la seconde subfusée pour lesquels le poids de départ de la fusée G_1 est minimal.

Rép. $z_1=3{,}2$; $z_2=4$; $G_1=19{,}2$ t.

45.40. Utilisant les données du problème précédent déterminer le poids du propergol et le poids à sec de chaque étage.

Indication. Utiliser les formules de la réponse du problème 45.38.

Rép. $P_1=13{,}2$ t, $P_2=1{,}2$ t, $Q_1=4{,}4$ t, $Q_2=0{,}3$ t.

45.41. La caractéristique constructive s et la vitesse effective v_{ef} de toutes les subfusées d'une fusée à quatre étages sont les mêmes: $s=4{,}7$ et $v_{ef}=2{,}4$ km/s. Quel doit être le poids de la fusée au départ pour qu'elle puisse communiquer à sa charge utile de 1 t une vitesse $v=9\,000$ m/s? (Utiliser les formules de la réponse du problème 45.38.)

Rép. 372 t.

CHAPITRE XI

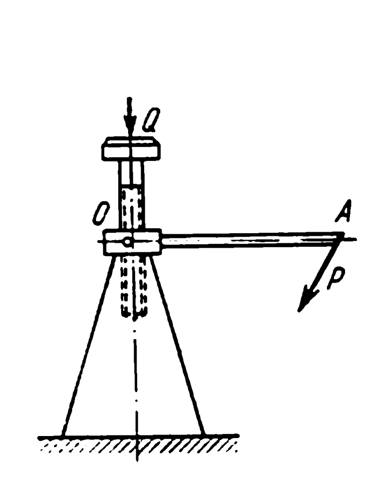
MÉCANIQUE ANALYTIQUE

§ 46. Principe des déplacements virtuels

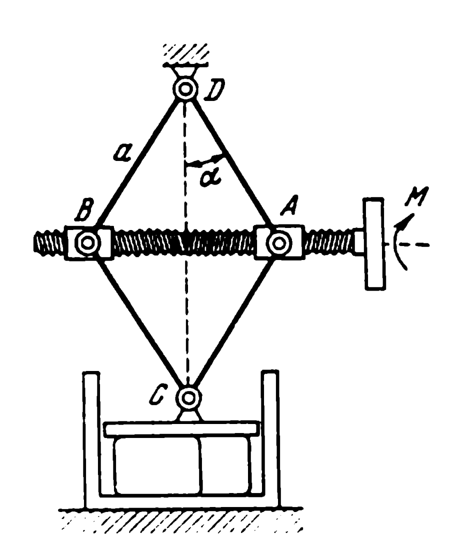
46.1. Une charge Q est soulevée à l'aide d'un vérin actionné par le levier $OA = 0{,}6$ m. On applique à l'extrémité du levier, perpendiculairement à ce dernier, une force $P = 16$ kgf.

Calculer la grandeur de la charge Q, si le pas de vis du vérin $h = 12$ mm.

Rép. $Q = 5\,020$ kgf.



Probl. 46.1



Probl. 46.2

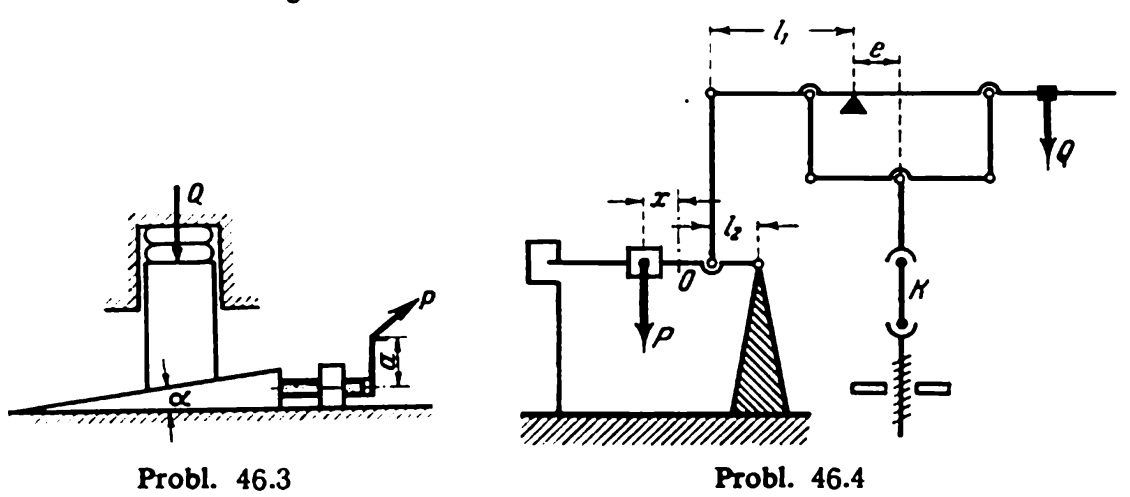
46.2. Le volant d'une presse à genouillère est soumis à l'action d'un couple de rotation M; l'axe du volant est fileté à ses extrémités en sens opposés, le pas de filets étant h. L'axe passe par deux écrous articulés aux deux sommets d'un système de barres formant un losange de côté a; le sommet supérieur du losange est fixe, son sommet inférieur étant articulé à la plaque horizontale de la presse.

Calculer la pression de la presse sur l'objet compressé à l'instant où l'angle au sommet du losange est 2α.

Rép. $P = \pi \dfrac{M}{h} \operatorname{ctg} \alpha$.

46.3. Déterminer la relation entre les valeurs absolues des forces P et Q dans une presse à coin, si la force P est appliquée à l'extrémité du levier de longueur a perpendiculairement à l'axe de la vis et du levier. Le pas de vis est h. L'angle au sommet du coin est α.

Rép. $Q = P \frac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.



Probl. 46.3 Probl. 46.4

46.4. La figure montre le schéma d'une machine à tester la résistance des éprouvettes à la traction.

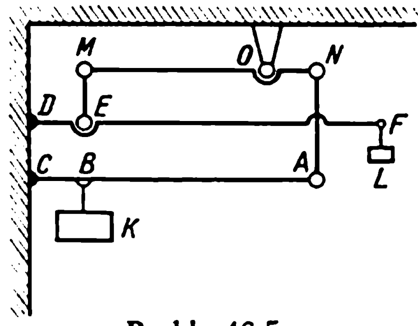
Déterminer la relation entre l'effort X dans l'éprouvette K et la distance x du poids P à sa position nulle O, si à l'aide d'un poids Q la machine est équilibrée de manière à ce que, pour la position nulle du poids P et en l'absence de l'effort dans l'éprouvette K, tous les leviers soient horizontaux. Les distances l_1, l_2 et e sont connues.

Rép. $X = P \frac{x l_1}{e l_2}$.

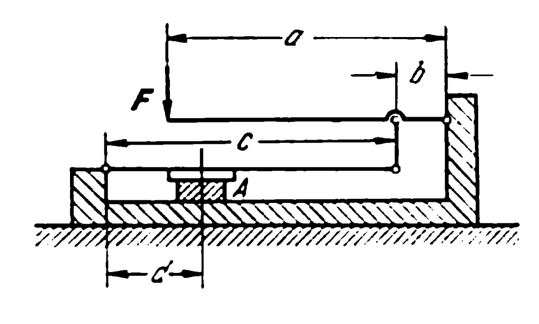
46.5. Les corps K et L reliés par un système de leviers (cf. schéma) sont en équilibre.

Etant donnés les rapports $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}$, $\frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}$, $\frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}$, déterminer la relation entre les poids des corps.

Rép. $P_L = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{ON}{OM} \cdot \frac{DE}{DF} P_K = \frac{1}{300} P_K$.



Probl. 46.5



Probl. 46.6

46.6. Déterminer la valeur absolue de la force Q comprimant l'éprouvette A dans une presse à levier (cf. schéma). On a : $F=100$ N, $a=60$ cm, $b=10$ cm, $c=60$ cm, $d=20$ cm.

Rép. $Q=1\,800$ N.

46.7. Un poids P se trouve en un point F sur une plate-forme de la balance. Sachant que $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $IK=d$, la longueur de la plate-forme $EG=L$, déterminer la relation entre les longueurs b, c, d et l pour laquelle le poids p contrebalançant le poids P ne dépend pas de la position de ce dernier sur la plate-forme, et trouver la grandeur du poids p dans ce cas.

Rép. $\frac{b+c}{b}=\frac{l}{d}$; $p=\frac{b}{a}P$.

Probl. 46.7

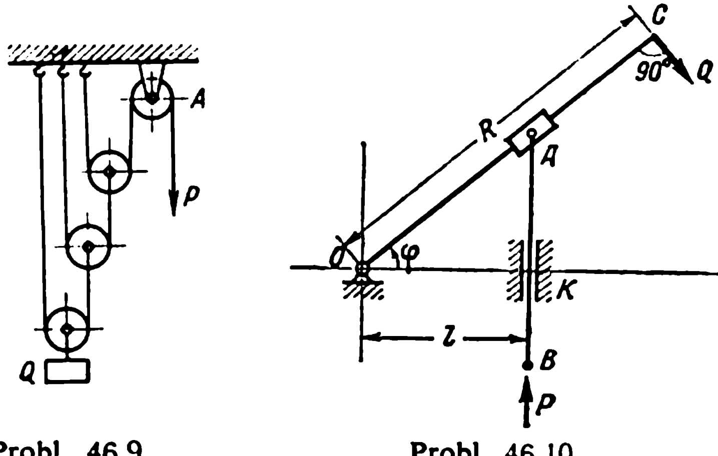
Probl. 46.8

46.8. Le coulisseau A du mécanisme d'un ellipsographe est soumis à une force P dirigée suivant le guide du coulisseau vers l'axe de rotation O de la manivelle OC.

Quel doit être le couple appliqué à la manivelle OC pour que le mécanisme soit en équilibre lorsqu'elle forme un angle φ avec le guide du coulisseau?

Le mécanisme est situé dans le plan horizontal, $OC=AC=CB=l$.

Rép. $M=2Pl\cos\varphi$.



Probl. 46.9 Probl. 46.10

46.9. Un palan se compose d'une poulie fixe A et de n poulies mobiles.

Déterminer le rapport du poids soulevé Q à l'effort P appliqué à l'extrémité libre du brin passant sur la poulie A (voir fig. p. 389).

Rép. $\frac{Q}{P}=2^n$.

46.10. Dans un mécanisme à coulisse le levier OC oscille autour de l'axe horizontal O, et le coulisseau A, se déplaçant le long du levier OC, entraîne la barre AB, qui se déplace dans des guides verticaux K. On a : $OC=R$, $OK=l$ (voir fig. p. 389).

Quelle force doit-on appliquer au point C perpendiculairement à la manivelle OC pour équilibrer la force P dirigée le long de la barre AB vers le haut?

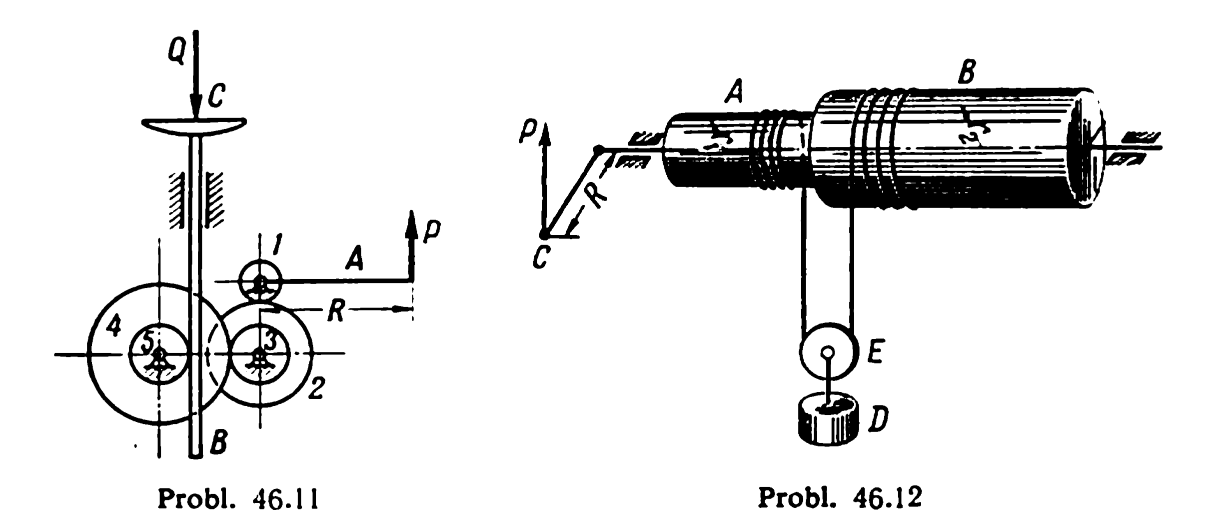
Rép. $Q=\frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

46.11. Dans le mécanisme d'un vérin lorsqu'on tourne le levier A les pignons *1*, *2*, *3*, *4* et *5* se mettent en rotation et entraînent la crémaillère B du vérin.

Quelle force doit-on appliquer perpendiculairement à l'extrémité du levier, pour qu'à l'état d'équilibre le plateau C dévelloppe une pression égale à 480 kgf?

Les rayons des pignons sont respectivement: $r_1=3$ cm, $r_2=12$ cm, $r_3=4$ cm, $r_4=16$ cm, $r_5=3$ cm, la longueur du levier $R=18$ cm.

Rép. $P=Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R}=5$ kgf.



Probl. 46.11 Probl. 46.12

46.12. Un treuil différentiel, composé de deux arbres solidaires A et B, est mis en rotation par la manivelle C de longueur R.

La charge à monter D, de poids Q, est fixée à la poulie mobile E supportée par la corde. Lorsque la manivelle C tourne, le brin gauche de la corde se déroule à partir de l'arbre A de rayon r_1, et le brin droit s'enroule sur l'arbre B de rayon r_2 $(r_2>r_1)$.

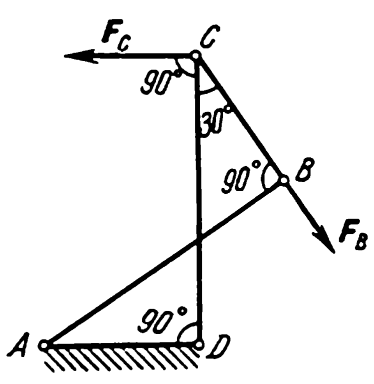
Quelle force P doit-on appliquer perpendiculairement à l'extrémité de la manivelle pour équilibrer la charge D, si $Q=720$ kgf, $r_1=10$ cm, $r_2=12$ cm, $R=60$ cm?

Rép. $P=Q\,\frac{r_2-r_1}{2R}=12$ kgf.

46.13. Dans le mécanisme de l'antiparallélogramme $ABCD$ les éléments AB, CD et BC sont reliés entre eux par des articulations cylindriques B et C, et au support AD par des articulations cylindriques A et D. Une force $\boldsymbol{F}_C$ horizontale est appliquée à l'articulation C de l'élément CD.

Calculer la valeur absolue de la force $\boldsymbol{F}_B$ appliquée à l'articulation B perpendiculairement à l'élément AB, si le mécanisme est en équilibre dans la position indiquée sur le schéma. On a : $AD=BC$, $AB=CD$, $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=90°$, $\widehat{DCB}=30°$.

Rép. $F_B=2F_C$.

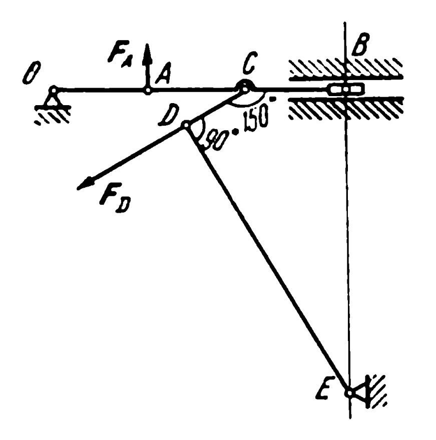


Probl. 46.13

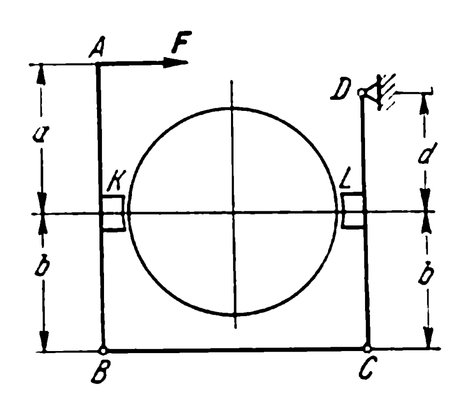
46.14. Un mécanisme bielle-manivelle OAB est articulé avec l'élément CD au point médian C de la bielle AB. Les éléments CD et DE sont articulés au point D.

Déterminer la relation entre les valeurs absolues des forces $\boldsymbol{F}_A$ et $\boldsymbol{F}_D$ respectivement perpendiculaires aux éléments OA et DE lorsque le mécanisme est en équilibre dans la position indiquée sur la figure. On a : $\widehat{DCB}=150°$, $\widehat{CDE}=90°$.

Rép. $F_D=4F_A$.



Probl. 46.14



Probl. 46.15

46.15. Le frein à mâchoires d'un wagon de tramway est composé de trois tirants AB, BC et CD articulés en B et C. Sous l'action de la force

horizontale F les sabots K et L, fixés respectivement aux tirants AB et CD, se serrent contre la roue.

Calculer les pressions N_K et N_L des sabots sur la roue. Les dimensions sont indiquées sur le schéma. Le wagon est à l'arrêt.

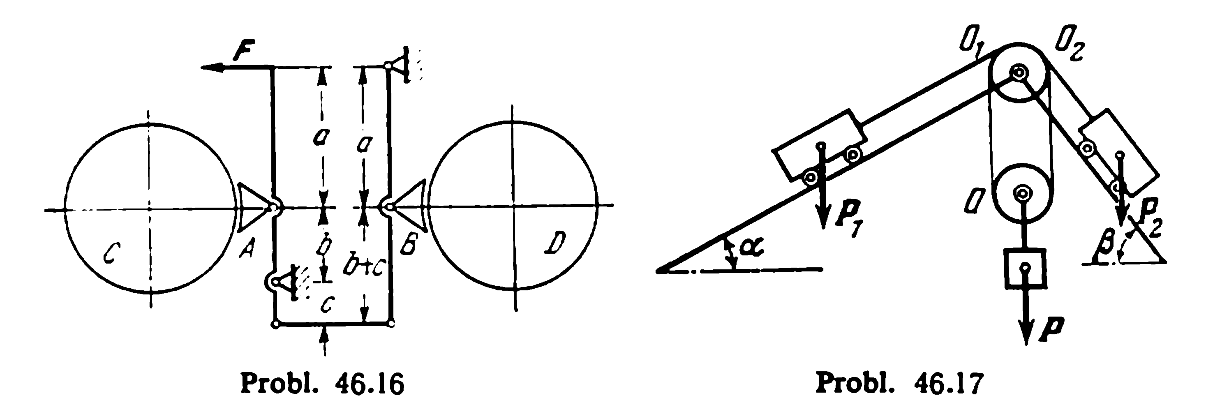
Rép. $N_K = F\,\dfrac{a+b}{b}$,

$N_L = F\,\dfrac{a}{b}\,\dfrac{b+d}{d}$.

46.16. La figure montre le schéma du frein à mâchoires d'un wagon de tramway.

Déterminer la relation entre les grandeurs a, b et c pour laquelle les sabots A et B sous l'action de la force F se serrent contre les bandages des roues C et D avec des forces égales en valeur absolue. Trouver aussi la grandeur de cette force. Les roues sont à l'arrêt.

Rép. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b+c}{c}$; $Q = F\,\dfrac{a+b}{2b}$.



Probl. 46.16 Probl. 46.17

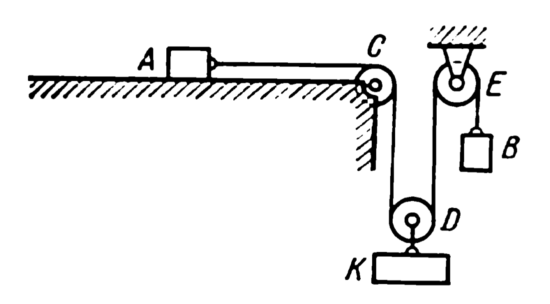
46.17. Déterminer les poids des charges P_1 et P_2 maintenues en équilibre sur des plans inclinés sous des angles α et β par rapport à l'horizontale sous l'effet d'une charge de poids P, si les charges P_1 et P_2 sont fixées aux extrémités d'un câble allant de la charge P_1, par l'intermédiaire de la poulie O_1 montée sur un axe horizontal, à la poulie mobile O, supportant la charge P, et ensuite par l'intermédiaire de la poulie O_2 montée sur l'axe de la poulie O_1 à la charge P_2. Les poulies O_1 et O_2 sont coaxiales.

Négliger le frottement et les masses des poulies et du câble.

Rép. $P_1 = \dfrac{P}{2\sin\alpha}$; $P_2 = \dfrac{P}{2\sin\beta}$.

• **46.18.** Des charges A et B de même poids sont attachées aux extrémités d'un fil non pesant inextensible. Le fil, parallèle au plan horizontal, passe successivement sur la poulie fixe C, sur la poulie mobile D et sur la poulie fixe E. Une charge K de poids Q est suspendue à l'axe de la poulie mobile D.

Calculer le poids P des charges A et B et le coefficient de frottement de la charge A sur le plan horizontal, si le système des charges est en équilibre.



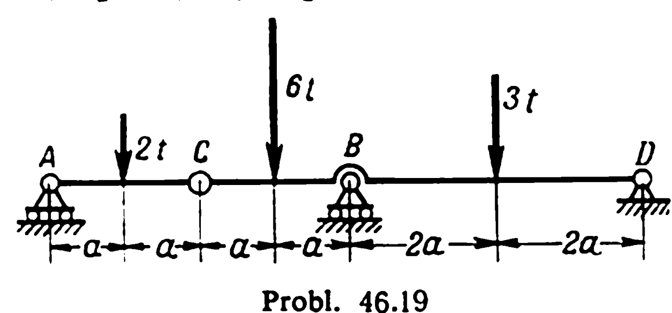
Probl. 46.18

Rép. $P=Q/2$; $f=1$.

46.19. Une poutre composée AD reposant sur trois appuis est constituée de deux poutres articulées au point C. La poutre est soumise à l'action de forces verticales égales à 2 t, 6 t et 3 t. Les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Calculer les réactions des appuis A, B et D.

Rép. $R_A=1$ t; $R_B=10{,}5$ t; $R_D=-0{,}5$ t.

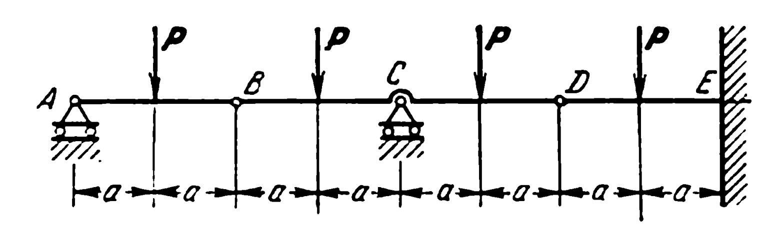


Probl. 46.19

46.20. Calculer le couple qu'il faut appliquer sur le tronçon BD à la poutre AD considérée dans le problème précédent, pour que la réaction de l'appui D soit nulle.

Rép. $M=2a$ t m.

46.21. Une poutre composée AE reposant sur deux appuis A et C est constituée de trois poutres AB, BD et DE articulées en B et D. La section E de la poutre DE est encastrée dans le mur.



Probl. 46.21

Calculer la composante verticale de la réaction au droit de la section E. La poutre est soumise à l'action de quatre forces verticales égales P. Les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. $R=0{,}5P$.

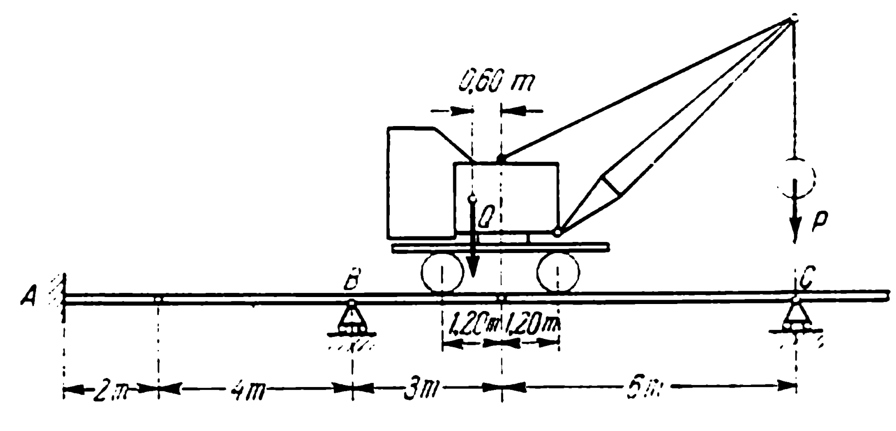
46.22. Calculer le moment m_E du couple à l'encastrement de la poutre DE considérée dans le problème précédent.

Rép. $m_E=0$.

46.23. Une grue mobile roule sur des rails fixés sur deux poutres horizontales à deux travées avec des articulations intermédiaires. La grue de poids $Q=16$ t soulève une charge $P=3$ t.

Calculer le moment du couple réactif à l'encastrement pour la position indiquée de la grue (cf. schéma).

Rép. $M_A=-\frac{1}{2}(1{,}95\,Q+3{,}60\,P)=-21$ t m.

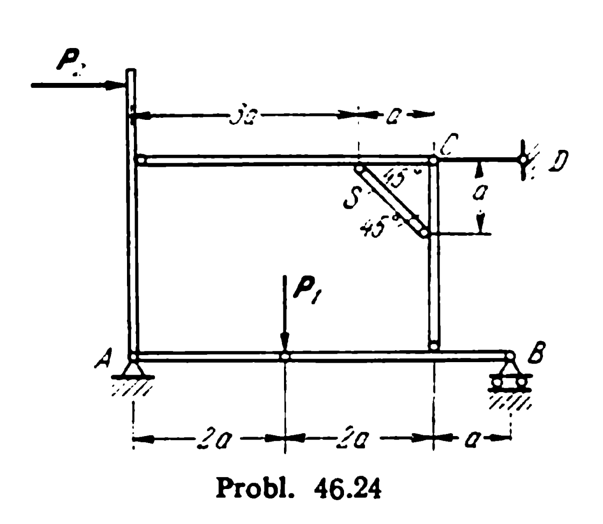


Probl. 46.23

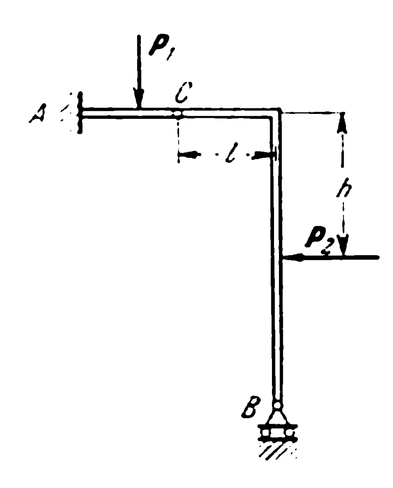
46.24. La construction de l'échafaudage d'un réservoir rectangulaire est composée de cadres fermés en bois dont les poutres sont articulées. L'immobilité du cadre est assurée par deux appuis cylindriques A et B et par la barre CD.

Déterminer l'effort S dans la contre-fiche lorsque l'échafaudage est soumis à l'action des forces P_1 et P_2.

Rép. $S=12\,P_1\sqrt{2}$.



Probl. 46.24



Probl. 46.25

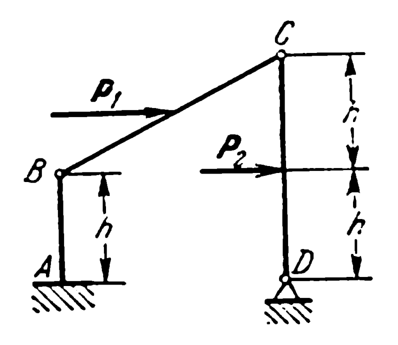
46.25. La charpente d'une plate-forme est composée de portiques en L renversé avec des articulations intermédiaires C. Les extrémités supérieures des portiques sont encastrées dans un mur en béton, les extrémités inférieures reposent sur des appuis cylindriques mobiles. Déterminer la réaction verticale à l'encastrement lors de l'action des forces P_1 et P_2.

Rép. $Y_A = P_1 - P_2 \frac{h}{l}$.

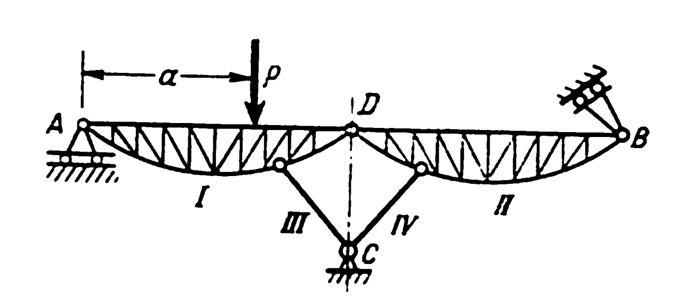
46.26. Deux poutres BC et CD sont articulées en C. La poutre CD est fixée au plancher par une articulation cylindrique D, et la poutre BC au montant AB par une articulation cylindrique B, ce montant étant encastré à la section A. Les poutres sont soumises aux forces horizontales P_1 et P_2.

Déterminer la composante horizontale de la réaction dans la section A. Les dimensions sont indiquées sur le schéma.

Rép. $R = P_1 + \frac{1}{2} P_2$.



Probl. 46.26



Probl. 46.28

46.27. Calculer le moment m_A du couple réactif à l'encastrement A du montant AB considéré dans le problème précédent.

Rép. $m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2\right) h$.

46.28. Deux fermes I et II, articulées en D, sont fixées au sol par des barres III et IV grâce à une articulation C; aux points A et B ces fermes reposent sur des appuis à rouleaux. La ferme I est chargée par une force verticale P, appliquée à une distance a de l'appui A.

Calculer la réaction du rouleau B.

Indication. Déterminer au préalable la position des centres instantanés des vitesses C_1 et C_2 des fermes I et II.

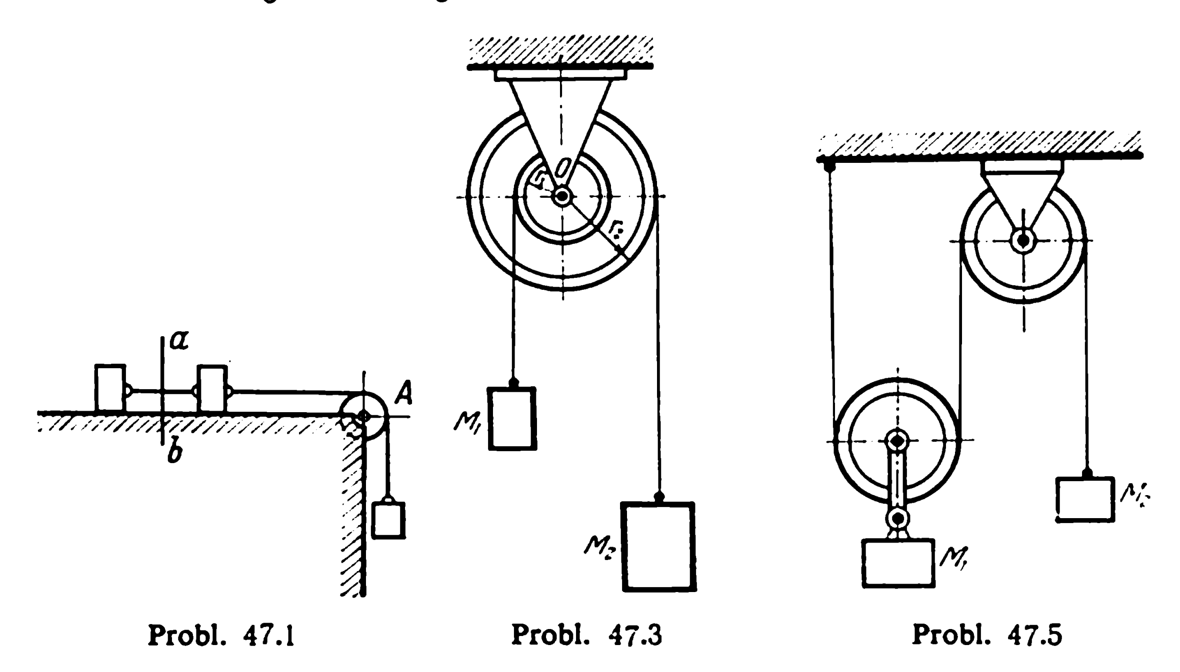
Rép. $R_B = P \frac{a}{b} \frac{DC_2}{DC_1}$, où b est le bras de la réaction R_B par rapport au centre instantané C_2. La réaction R_B est dirigée perpendiculairement au plan de glissement du rouleau B, de gauche à droite vers le bas.

§ 47. Equation générale de la dynamique *

47.1. Trois charges de poids P chacune sont reliées par un fil non pesant inextensible passant par une poulie fixe non pesante A. Deux charges sont situées sur un plan horizontal lisse, la troisième étant suspendue.

Calculer l'accélération du système et la tension du fil dans la section ab.

Rép. $w=\frac{1}{3}g$; $T=\frac{1}{3}P$.



Probl. 47.1 Probl. 47.3 Probl. 47.5

47.2. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse de la poulie. Supposer que lors du mouvement des charges la poulie A tourne autour d'un axe fixe. Le poids de la poulie, considérée comme un disque continu homogène, est $2P$.

Rép. $w=\frac{1}{4}g$; $T=\frac{1}{4}P$.

47.3. Deux charges, M_1 de poids P_1 et M_2 de poids P_2, sont suspendues à deux fils flexibles inextensibles enroulés (cf. schéma) sur des tambours de rayons r_1 et r_2 montés sur un axe commun; les charges se déplacent sous l'effet de la pesanteur.

Calculer l'accélération angulaire ε des tambours en négligeant leurs masses et la masse des fils.

Rép. $\varepsilon=g\,\frac{P_2r_2-P_1r_1}{P_1r_1^2+P_2r_2^2}$.

47.4. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, l'accélération angulaire ε et les tensions T_1 et T_2 des fils en tenant compte des masses

---

* On recommande de résoudre les problèmes dotés d'un astérisque aussi à l'aide des équations de Lagrange.

des tambours pour les données suivantes: $P_1=20$ kgf, $P_2=34$ kgf, $r_1=5$ cm, $r_2=10$ cm; le poids du petit tambour est de 4 kgf, celui du grand de 8 kgf. Les masses des tambours sont supposées uniformément réparties sur leurs surfaces extérieures.

Rép. $\varepsilon=49\ \mathrm{s}^{-2}$; $T_1=25$ kgf; $T_2=17$ kgf.

47.5. Deux charges, M_1 de 10 N et M_2 de 8 N, sont suspendues à un système de poulies (cf. schéma).

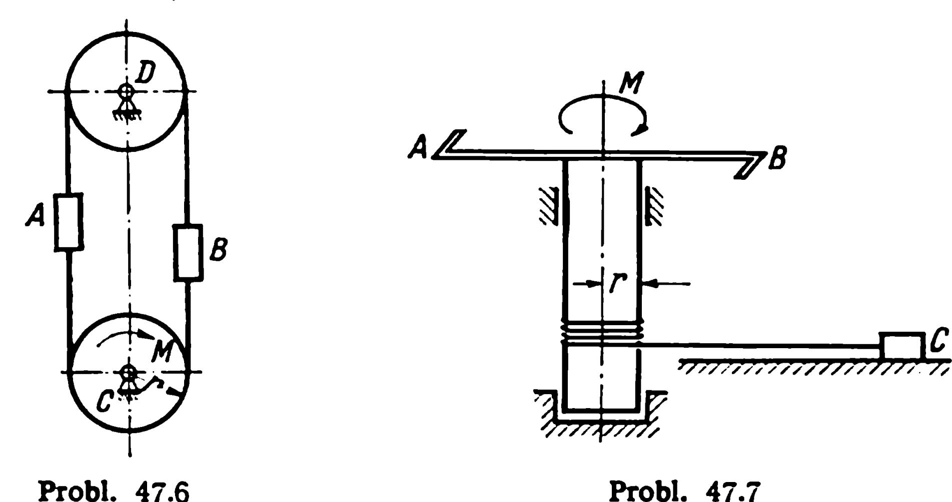
Calculer l'accélération w_2 de la charge M_2 et la tension du fil. Négliger les masses des poulies.

Rép. $w_2=2{,}8\ \mathrm{m/s^2}$; $T=5{,}7$ N.

47.6. Un couple moteur M est appliqué à la poulie inférieure C d'une grue.

Trouver l'accélération de la charge levée A de poids P_1, sachant que le contrepoids B pèse P_2; les poulies C et D de rayon r et de poids Q chacune sont des cylindres homogènes. Négliger la masse de la courroie.

Rép. $w=g\dfrac{M+(P_2-P_1)r}{(P_1+P_2+Q)r}$.



Probl. 47.6 Probl. 47.7

47.7. L'arbre d'un cabestan de rayon r est mis en rotation par un couple constant M appliqué au levier AB.

Calculer l'accélération de la charge C de poids P sachant que le coefficient de frottement de la charge sur le plan horizontal est f. Négliger les masses du câble et du cabestan.

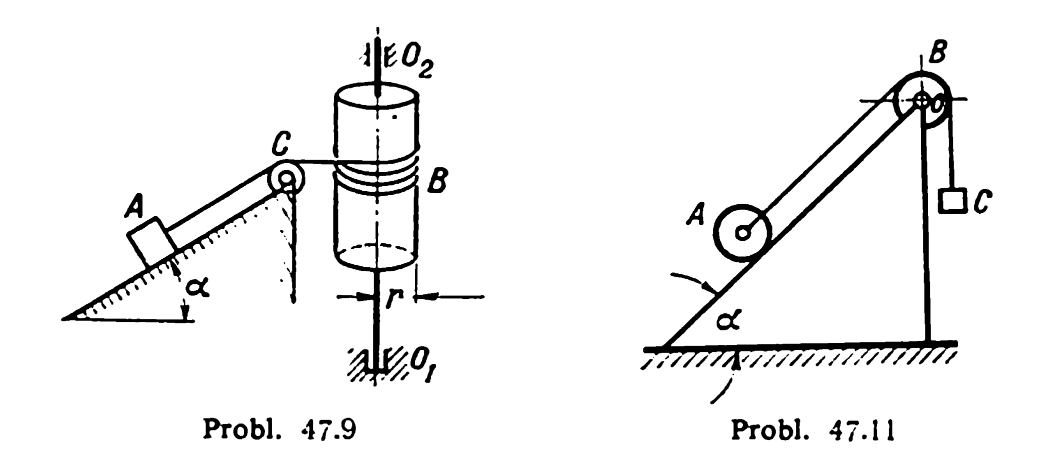
Rép. $w=g\dfrac{M-fPr}{Pr}$.

47.8. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la masse du cabestan dont le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est J.

Rép. $w=g\dfrac{r(M-fPr)}{gJ+Pr^2}$.

47.9. La charge A de poids P descend sur un plan lisse incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et met en rotation à l'aide d'un fil non pesant inextensible le tambour B, de poids Q et de rayon r.

Calculer l'accélération angulaire du tambour si on le considère comme un cylindre circulaire homogène. Négliger la masse de la poulie fixe C.



Probl. 47.9 Probl. 47.11

Rép. $\varepsilon = \dfrac{2Pg \sin\alpha}{r(2P+Q)}$.

47.10. Un homme pousse un chariot en y appliquant une force horizontale F.

Déterminer l'accélération de la benne du chariot, si le poids de la benne est P_1, le poids de chacune des quatre roues P_2, le rayon des roues r, le coefficient de résistance au roulement f_r. Considérer les roues comme des disques circulaires homogènes roulant sans glisser sur les rails.

Rép. $w = g \dfrac{F - \dfrac{f_r}{r}(P_1+4P_2)}{P_1+6P_2}$.

47.11. Un rouleau A de poids Q descend en roulant sans glisser sur un plan incliné et fait monter, à l'aide d'un fil non pesant inextensible passant sur une poulie B, la charge C de poids P. La poulie B tourne alors autour de l'axe fixe O perpendiculaire à son plan. Le rouleau A et la poulie B sont supposés être des disques homogènes circulaires de mêmes poids et rayon. Le plan incliné forme un angle α avec l'horizontale.

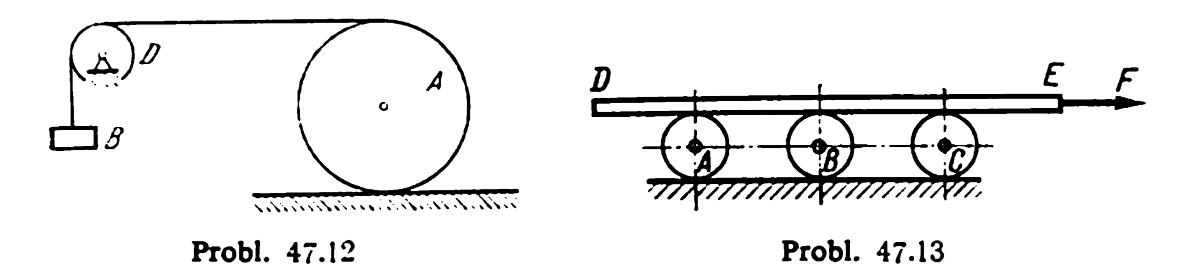
Calculer l'accélération de l'axe du rouleau.

Rép. $w = g \dfrac{Q\sin\alpha - P}{2Q+P}$.

47.12. Une charge B de poids P met en mouvement un rouleau cylindrique A de poids Q et de rayon r à l'aide d'un fil enroulé sur le rouleau.

Trouver l'accélération de la charge B si le rouleau roule sans glisser, le coefficient de résistance au roulement étant f_r. Négliger la masse de la poulie D.

Rép. $w = 8g \dfrac{P - \dfrac{f_r}{2r} Q}{3Q + 8P}$.



Probl. 47.12 Probl. 47.13

47.13. Une barre DE de poids Q repose sur trois rouleaux A, B et C de poids P chacun. Elle est soumise à l'action d'une force horizontale F dirigée vers la droite qui l'entraîne avec les rouleaux. Le glissement entre la barre et les rouleaux ainsi qu'entre les rouleaux et le plan horizontal est nul.

Calculer l'accélération de la barre DE. Les rouleaux sont supposés être des cylindres circulaires homogènes.

Rép. $w = \dfrac{8gF}{8Q + 9P}$.

47.14. Déterminer l'accélération de la charge M_2, envisagée dans le problème 47.5 en tenant compte des masses des poulies qui sont considérées comme des disques continus homogènes pesant chacun 4 N.

Rép. $w_2 = 0{,}7$ m/s^2.

47.15. La charge A de poids P, en descendant, fait rouler sans glissement l'arbre C de rayon r sur un rail horizontal au moyen d'un fil non pesant inextensible passant sur une poulie fixe D et enroulé sur une poulie B. La poulie B de rayon R est fixée sur l'arbre C; leur poids total est Q, leur rayon de giration par rapport à l'axe O perpendiculaire au plan du schéma étant ρ (voir fig. p. 400).

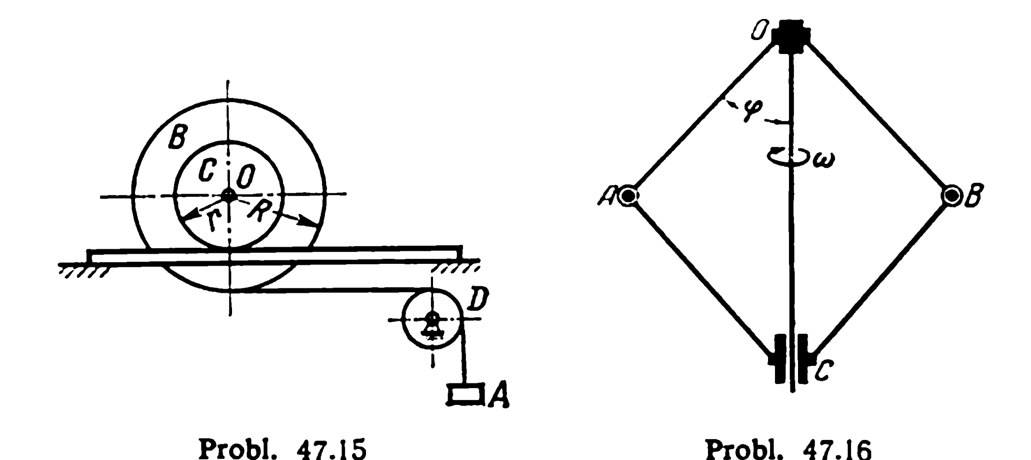
Calculer l'accélération de la charge A.

Rép. $w = g \dfrac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2 + Q(\rho^2 + r^2)}$.

47.16. Un régulateur centrifuge tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω.

Trouver l'angle de déviation des leviers OA et OB par rapport à la verticale, en tenant seulement compte du poids p de chacune des boules et du poids p_1 du manchon C; toutes les barres ont la même longueur l (voir fig. p. 400).

Rép. $\cos \varphi = \dfrac{(p + p_1) g}{p l \omega^2}$.



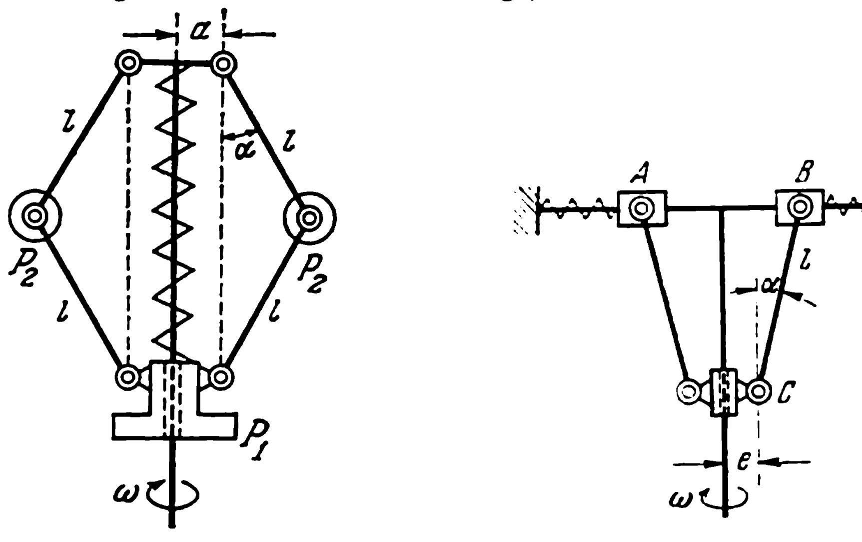
Probl. 47.15 Probl. 47.16

47.17. Un régulateur centrifuge tourne avec une vitesse angulaire constante ω.

Trouver la relation entre la vitesse angulaire du régulateur et l'angle α de déviation de ses barres par rapport à la verticale, si le manchon de poids P_1 est poussé vers le bas par un ressort de rigidité c dont l'extrémité supérieure est fixée à l'axe du régulateur et qui pour $\alpha=0$ est non déformé; les poids des boules sont P_2, la longueur des barres l; les axes de suspension des barres se trouvent à une distance a de l'axe du régulateur; négliger les poids des barres et du ressort.

Rép. $\omega^2=g\,\dfrac{P_1+P_2+2lc\,(1-\cos\alpha)}{P_2\,(a+l\sin\alpha)}\ \mathrm{tg}\,\alpha.$

47.18. Un régulateur centrifuge à ressort comporte deux charges A et B de poids $P_A=P_B=15$ kgf montées sur une barre lisse horizontale solidaire de l'axe du régulateur, un manchon C de poids $P_C=10$ kgf, deux tiges de longueur $l=25$ cm et des ressorts comprimant les charges contre l'axe de rotation; la distance des articulations des tiges à l'axe de rotation $e=3$ cm; la rigidité des ressorts $c=15$ kgf/cm.



Probl. 47.17 Probl. 47.18

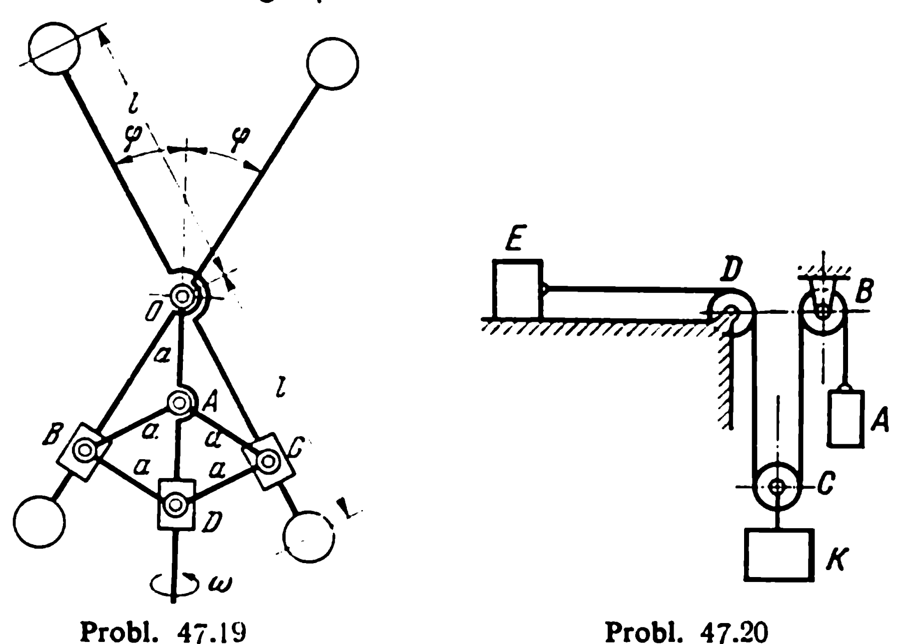
Calculer la vitesse angulaire du régulateur pour un angle d'ouverture $\alpha=60°$, si pour un angle $\alpha=30°$ les ressorts sont non déformés; négliger les poids des tiges et le frottement.

Rép. $n=188$ tr/mn.

47.19. Dans un régulateur quatre poids identiques P sont fixés aux extrémités de deux leviers de longueur $2l$, à bras égaux, pouvant tourner dans le plan du régulateur autour de l'extrémité de l'arbre O et forment avec l'axe de l'arbre un angle variable φ. Des leviers AB et AC de longueur a sont articulés avec l'arbre au point A situé à une distance $OA=a$ de l'extrémité de l'arbre O. Ces leviers, à leur tour, sont articulés aux points B et C avec les barres BD et CD de longueur a, reliées au manchon D de poids Q. Aux points B et C des coulisseaux glissent le long des leviers supportant des charges. Le régulateur tourne avec une vitesse angulaire constante ω.

Trouver la relation entre l'angle φ et la vitesse angulaire ω lorsque le régulateur est en équilibre.

Rép. Le régulateur ne peut être en équilibre que pour $\omega=\sqrt{\frac{2gQa}{Pl^2}}$ indépendamment de l'angle φ.



Probl. 47.19 Probl. 47.20

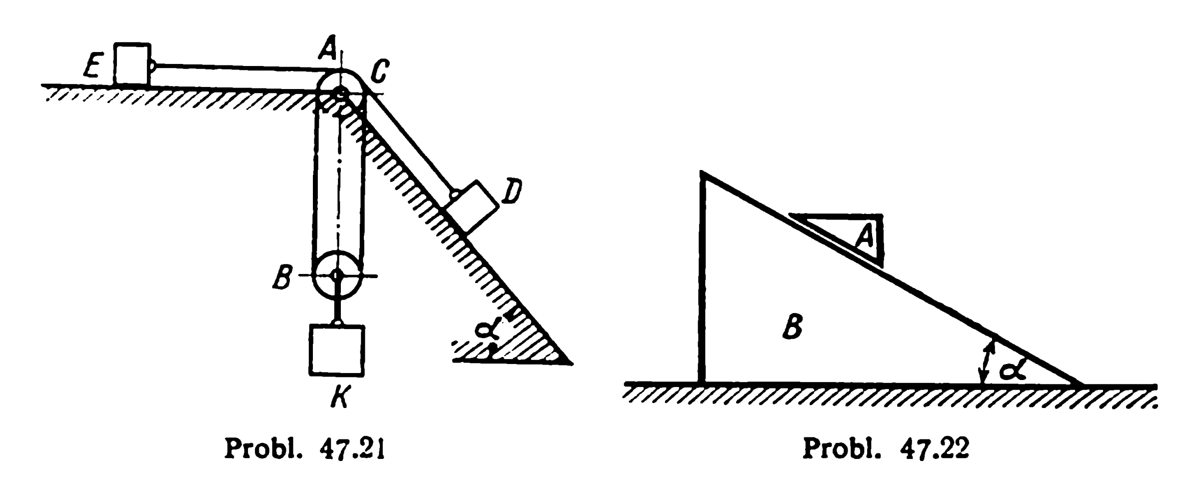
47.20*. Un fil homogène dont l'extrémité supporte une charge A de poids P contourne la poulie fixe B et la poulie mobile C, monte vers la poulie fixe D et passe parallèlement au plan horizontal où une charge E de poids P est attachée à son extrémité. Le coefficient de frottement de la charge E sur le plan horizontal est f. Une charge K de poids Q est fixée à l'axe de la poulie C. Pour quelle condition la charge K descend-elle, si les vitesses initiales de toutes les charges étaient nulles? Calculer l'accélération de la charge K. Négliger les masses des poulies et du fil.

Rép. $Q>P(1+f)$; $w=g\frac{Q-P(1+f)}{Q+2P}$.

47.21*. Deux charges D et E de poids P chacune sont attachées aux extrémités d'un fil non pesant inextensible. Ce fil part de la charge E, passe sur la poulie fixe A, contourne ensuite la poulie mobile B, retourne en haut à la poulie fixe C coaxiale à la poulie A, passe parallèlement au plan lisse incliné, où une charge D est attachée à son extrémité. Le plan incliné forme un angle α avec le plan horizontal. Une charge K de poids Q est attachée à la poulie mobile B. Le coefficient de frottement de la charge E sur le plan horizontal est f. Les masses des poulies sont négligeables.

Trouver la condition pour laquelle la charge K descendra. Calculer l'accélération de cette charge. A l'instant initial les vitesses de toutes les charges étaient nulles.

Rép. $Q > P(f + \sin\alpha)$; $\quad w = g\,\dfrac{Q - P(f + \sin\alpha)}{Q + 2P}$.



Probl. 47.21 Probl. 47.22

47.22*. Un prisme A de poids P glisse sur la surface latérale lisse du prisme B de poids Q formant un angle α avec le plan horizontal.

Calculer l'accélération du prisme B. Négliger le frottement entre le prisme B et le plan horizontal.

Rép. $w = g\,\dfrac{P\sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}$.

47.23*. Un prisme triangulaire ABC de poids P peut glisser sans frottement sur un plan horizontal lisse; un cylindre circulaire homogène de poids Q roule sans glisser sur la face AB du prisme.

Déterminer l'accélération du prisme.

Rép. L'accélération est dirigée vers la gauche et vaut

$$w = \frac{Q\sin 2\alpha}{3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha}\,g.$$

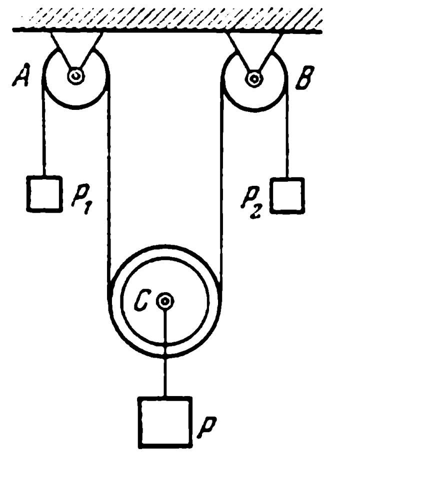
A
O
C
α
B

Probl. 47.23

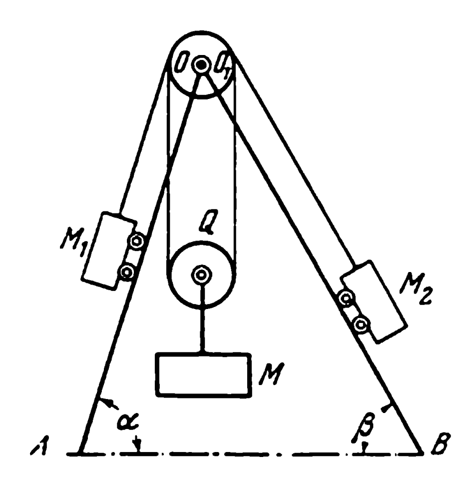
47.24*. Un fil passant sur les poulies A et B d'axes fixes supporte la poulie mobile C; les tronçons du fil qui ne passent pas sur les poulies sont verticaux. La poulie C est chargée par un poids $P = 4$ N; des charges de

poids $P_1=2$ N et $P_2=3$ N sont fixées aux extrémités du fil. Calculer les accélérations des trois charges. Négliger les masses des poulies, du fil et le frottement dans les axes.

Rép. $w=\frac{1}{11}g$ (vers le haut); $w_1=\frac{1}{11}g$ (vers le haut); $w_2=\frac{3}{11}g$ (vers le bas).



Probl. 47.24



Probl. 47.25

47.25*. Deux charges M_1 et M_2 de même poids p se déplacent suivant deux guides inclinés OA et OB situés dans le plan vertical et formant des angles α et β avec l'horizontale; le fil reliant ces charges part de M_1, passe sur la poulie O tournant autour d'un axe horizontal, contourne la poulie mobile Q supportant une charge M de poids P, puis, passant sur la poulie O_1 de même axe que la poulie O, va à la charge M_2.

Déterminer l'accélération w de la charge M. Négliger le frottement ainsi que les masses des poulies et du fil.

Rép. $$w=g\,\frac{P-p(\sin\alpha+\sin\beta)}{P+2p}.$$

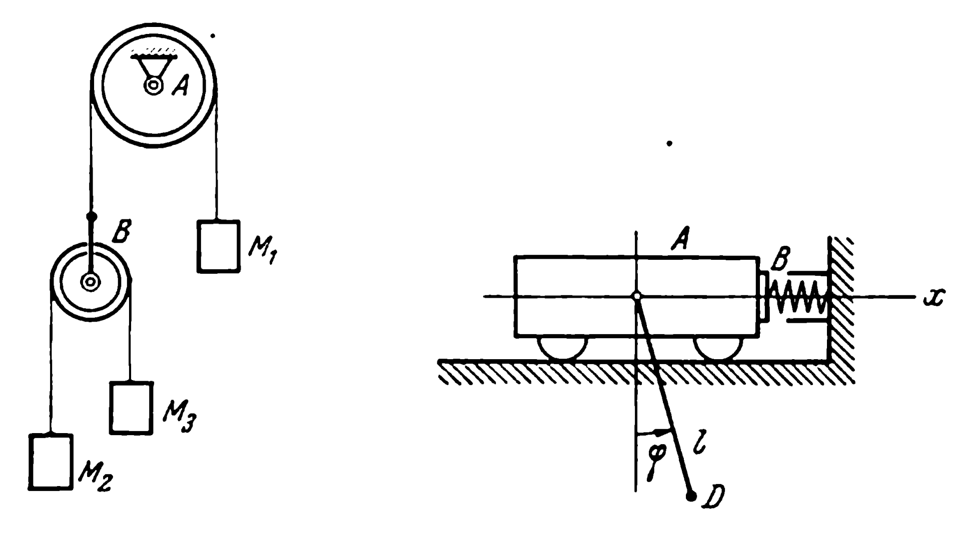
47.26*. Résoudre le problème précédent en remplaçant les charges M_1 et M_2 par des rouleaux de poids P et de rayon r chacun. Assimiler les rouleaux à des disques continus circulaires homogènes. Le coefficient de résistance au roulement des rouleaux sur les plans inclinés est f_r. Les fils sont attachés aux axes des rouleaux.

Rép. $$w=g\,\frac{P-p\left[\sin\alpha+\sin\beta+\frac{f_r}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}{P+3p}.$$

47.27*. On a un système de deux poulies fixe A et mobile B et de trois charges M_1, M_2 et M_3 suspendues par des fils inextensibles (cf. schéma). Les masses des charges sont respectivement m_1, m_2 et m_3; $m_1<m_2+m_3$ et $m_2 \gtrless m_3$. Les masses des poulies sont négligeables.

Trouver la relation des masses m_1, m_2, m_3 pour laquelle la charge M_1 descend, dans le cas où les vitesses initiales des charges sont nulles.

Rép. $m_1 > \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}$.



Probl. 47.27 Probl. 47.28

47.28*. Lorsque le chariot A heurte le tampon élastique B la charge D suspendue par une barre non pesante commence à osciller.

Ecrire les équations différentielles du mouvement du système matériel, si m_1 est la masse du chariot, m_2 celle de la charge, l la longueur de la barre, c la rigidité du ressort du tampon B. Négliger les masses des roues et toutes les forces de résistance. Prendre l'origine des x à l'extrémité gauche du ressort non déformé.

Rép. $(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos\varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = -cx;$

$$\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi.$$

47.29*. Utilisant la réponse du problème précédent calculer la période des petites oscillations de la charge en l'absence du tampon B.

Indication. Négliger le terme renfermant $\dot{\varphi}^2$, poser $c=0$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$.

Rép. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}$.

47.30*. Une masse ponctuelle A de poids P_1 se déplace dans le plan vertical sur la surface intérieure lisse d'un cylindre fixe de rayon l. La masse ponctuelle B de poids P_2, reliée à la masse A par une tige non pesante AB de longueur l, peut osciller autour de l'axe A perpendiculaire au plan du schéma. Les positions des masses A et B sont définies par les angles α et φ calculés à partir de la verticale.

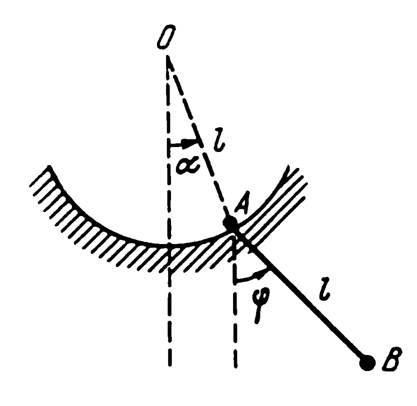
Ecrire les équations différentielles du mouvement du système matériel constitué par les points A et B reliés par la tige non pesante AB.

Rép. $(m_1+m_2)= l\ddot{\alpha}+m_2 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2 l\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi-\alpha)=$

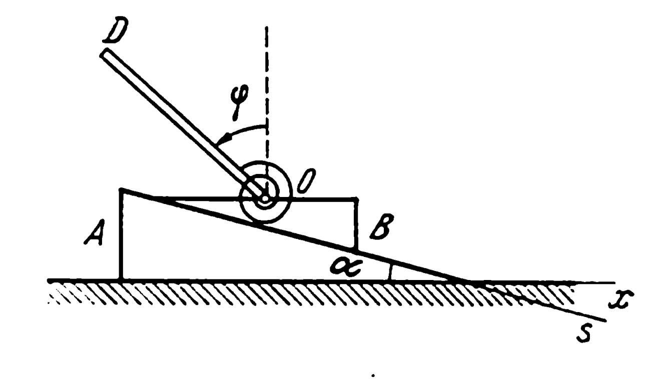
$= -(P_1+P_2)\sin\alpha,$

$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)= -g\sin\varphi,$

où $m_1=\frac{P_1}{g}, \quad m_2=\frac{P_2}{g}$.



Probl. 47.30



Probl. 47.32

47.31*. Utilisant la réponse du problème précédent écrire les équations différentielles des petites oscillations du système matériel considéré.

Indication. Négliger les termes renfermant $\dot{\varphi}^2$ et $\dot{\alpha}^2$, poser $\sin(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$.

Rép. $(m_1+m_2)\,l\ddot{\alpha}+m_2 l\ddot{\varphi}= -(P_1+P_2)\,\alpha,$

$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}= -g\varphi,$ où $m_1=\frac{P_1}{g}, \quad m_2=\frac{P_2}{g}$.

47.32*. Un prisme B de poids P_2 glisse sur la face du prisme fixe A faisant un angle α avec le plan horizontal. Une tige homogène OD de poids P_1 et de longueur l est attachée au prisme B au moyen d'un ressort de rigidité c et d'une articulation cylindrique. La tige effectue des oscillations autour de l'axe O perpendiculaire au plan du schéma. Les positions du prisme B et de la tige OD sont définies par les coordonnées s et φ.

Ecrire les équations différentielles du mouvement du système matériel constitué par le prisme B et la tige OD. Négliger les forces de frottement.

Rép. $(m_1+m_2)\ddot{s}+\frac{1}{2}\, m_1 l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha)-\frac{1}{2}\, m_1 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)=$

$=(P_1+P_2)\sin\alpha, \quad \frac{1}{3}\, m_1 l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}\, m_1 l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha)=$

$=\frac{1}{2}\, P_1 l\sin\varphi-c\varphi,$ où $m_1=\frac{P_1}{g}, \quad m_2=\frac{P_2}{g}$.

47.33*. Utilisant la réponse du problème précédent calculer la période des petites oscillations de la tige OD, si $P_1 l \cos^2\alpha < 2c$.

Indication. Poser $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(\varphi+\alpha) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$, négliger ensuite les termes renfermant les facteurs $\dot\varphi^2$ et $\varphi\cdot\ddot\varphi$.

Rép. $T = 2\pi l \sqrt{\dfrac{m_1[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2]}{6(m_1+m_2)(2c-P_1 l\cos^2\alpha)}}$.

47.34*. Résoudre le problème 47.32 en supposant que le prisme A de poids P_3 se déplace sur un plan horizontal lisse, sa position étant déterminée par la coordonnée x.

Rép. $(m_1+m_2+m_3)\ddot x + (m_1+m_2)\ddot s\cos\alpha + m_1\frac{l}{2}\dot\varphi^2 \times$

$\times \sin\varphi - m_1\frac{l}{2}\ddot\varphi\cos\varphi = 0,$

$(m_1+m_2)\ddot x\cos\alpha + (m_1+m_2)\ddot s + m_1\frac{l}{2}\dot\varphi^2\sin(\varphi+\alpha) -$

$- m_1\frac{l}{2}\ddot\varphi\cos(\varphi+\alpha) = (P_1+P_2)\sin\alpha,$

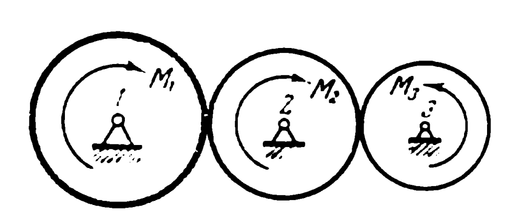
$\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot\varphi - \frac{1}{2}m_1 l\ddot x\cos\varphi - \frac{1}{2}m_1 l\ddot s\cos(\varphi+\alpha) =$

$= \frac{1}{2}P_1 l\sin\varphi - c\varphi$, où $m_1 = \frac{P_1}{g}$, $m_2 = \frac{P_2}{g}$, $m_3 = \frac{P_3}{g}$.

§ 48. Equations de Lagrange de seconde espèce

48.1. La transmission de la rotation entre deux arbres orthogonaux qui se coupent s'effectue au moyen de deux pignons coniques dont le nombre de dents est respectivement z_1 et z_2; les moments d'inertie des arbres avec les pignons qui y sont fixés sont respectivement J_1 et J_2. Calculer l'accélération angulaire du premier arbre, s'il est soumis à l'action du couple moteur M_1, l'autre arbre étant soumis à l'action du couple de résistance M_2. Négliger les frottements dans les paliers.

Rép. $\varepsilon_1 = \dfrac{M_1 - kM_2}{J_1 + k^2 J_2}$, où $k = \dfrac{z_1}{z_2}$.



Probl. 48.2

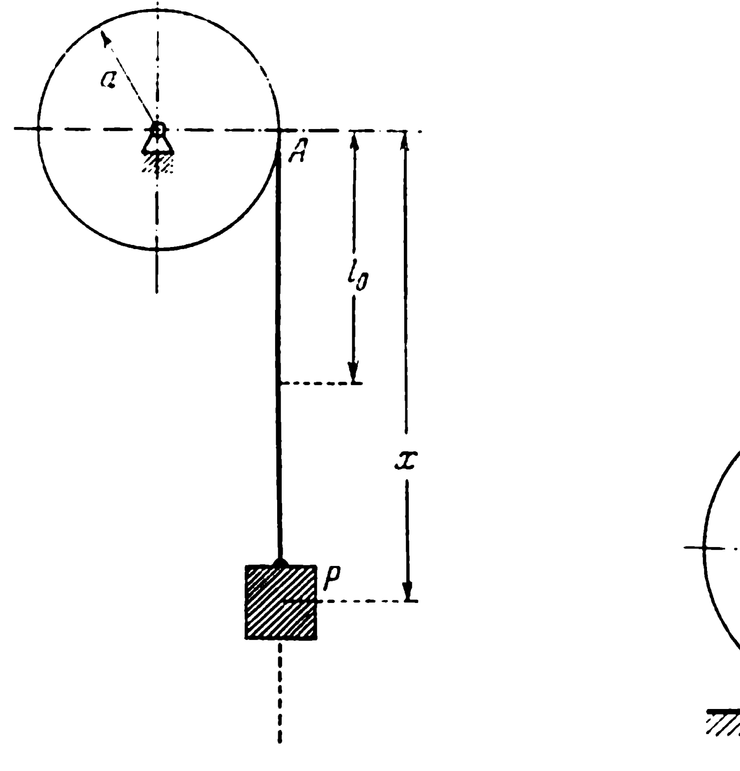
48.2. Le pignon *1* d'une transmission (cf. schéma) est mis en rotation par le couple M_1; des couples de résistance M_2 et M_3 sont appliqués aux pignons *2* et *3*. Calculer l'accélération angulaire du premier pignon. Assimiler les pignons à des disques homogènes de masses m_1, m_2, m_3 et de rayons r_1, r_2, r_3.

Rép. $\varepsilon_1 = \dfrac{2\left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3\right)}{(m_1+m_2+m_3)r_1^2}$.

48.3. Déterminer le mouvement de la charge de poids P suspendue à une corde homogène de poids P_1 et de longueur l; la corde s'enroule sur un tambour de rayon a et de poids P_2; l'axe de rotation est horizontal; on néglige le frottement; la masse du tambour est supposée uniformément répartie sur sa périphérie. A l'instant initial $t=0$ le système était à l'arrêt; la longueur du tronçon pendant de la corde était l_0.

Indication. Négliger les dimensions du tambour par rapport à la longueur du tronçon pendant de la corde.

Rép. $x = -\frac{Pl}{P_1} + \left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{P_1 g}{(P+P_1+P_2)\, l}}\, t.$



Probl. 48.3

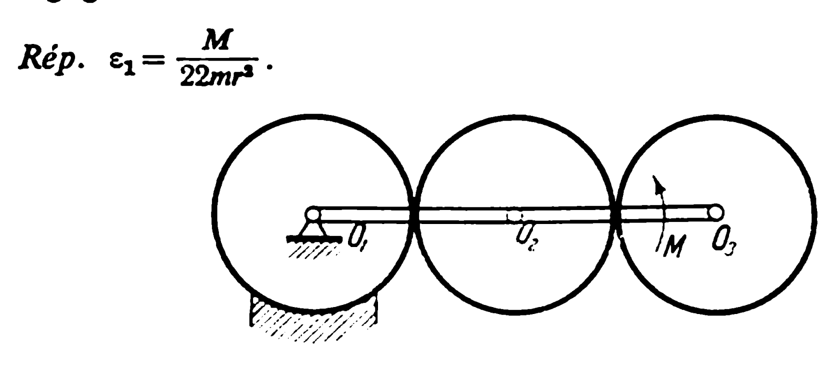
Probl. 48.4

48.4. Dans un mécanisme épicyclique le pignon mobile de rayon r_1 est monté sur la manivelle avec un contrepoids tournant autour de l'axe du pignon fixe sous l'action du couple appliqué M. Calculer l'accélération angulaire de rotation de la manivelle et l'effort circonférentiel S au point de tangence des pignons, si la distance entre les axes des pignons est l; le moment d'inertie de la manivelle avec le contrepoids par rapport à son axe de rotation est J_0, la masse du pignon mobile m_1, son moment d'inertie par rapport à son axe J_1; négliger le frottement; le centre de gravité du pignon et de la manivelle avec le contrepoids est situé sur l'axe de rotation de la manivelle.

Rép. $\varepsilon = \frac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r_1^2}}$; $\quad S = \frac{J_1 l}{r_1^2}\, \varepsilon.$

48.5. Dans un mécanisme planétaire le pignon d'axe O_1 est fixe; un couple M est appliqué au levier O_1O_3; le mécanisme est disposé dans le plan horizontal. Calculer l'accélération angulaire du levier en supposant que les pignons sont des disques homogènes de mêmes masses m et rayons r. Négliger la masse du levier.

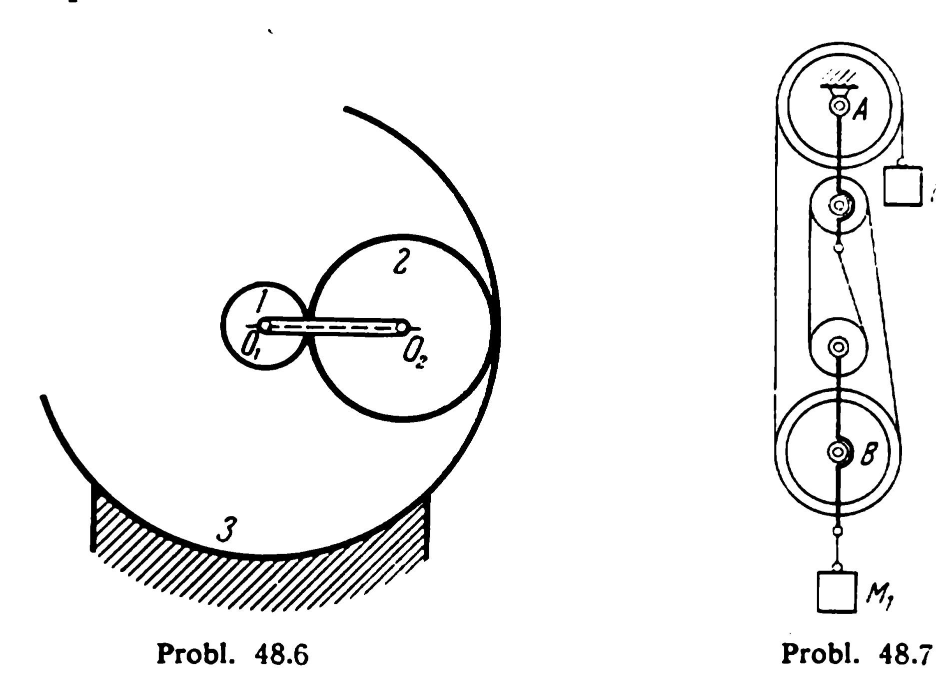
Rép. $\varepsilon_1 = \frac{M}{22mr^2}$.



Probl. 48.5

48.6. Le pignon *2* de la transmission (cf. schéma) entraîné par le levier O_1O_2 roule sans glisser sur la surface intérieure du pignon fixe *3* et met en rotation autour de l'axe fixe O_1 le pignon *1*. On sait que le pignon *1* tourne 10 fois plus vite que le levier. Assimilant les pignons à des disques homogènes de même épaisseur et faits du même matériau, calculer l'accélération angulaire ε du levier sachant que le pignon *1* est soumis à un couple constant de résistance M_1 et le levier à un couple moteur constant M; le mécanisme est situé dans le plan horizontal; la masse du levier est négligeable.

Rép. $\varepsilon = \frac{M - 10M_1}{1\,300J}$, J étant le moment d'inertie du pignon *1* par rapport à son axe de rotation.



Probl. 48.6 Probl. 48.7

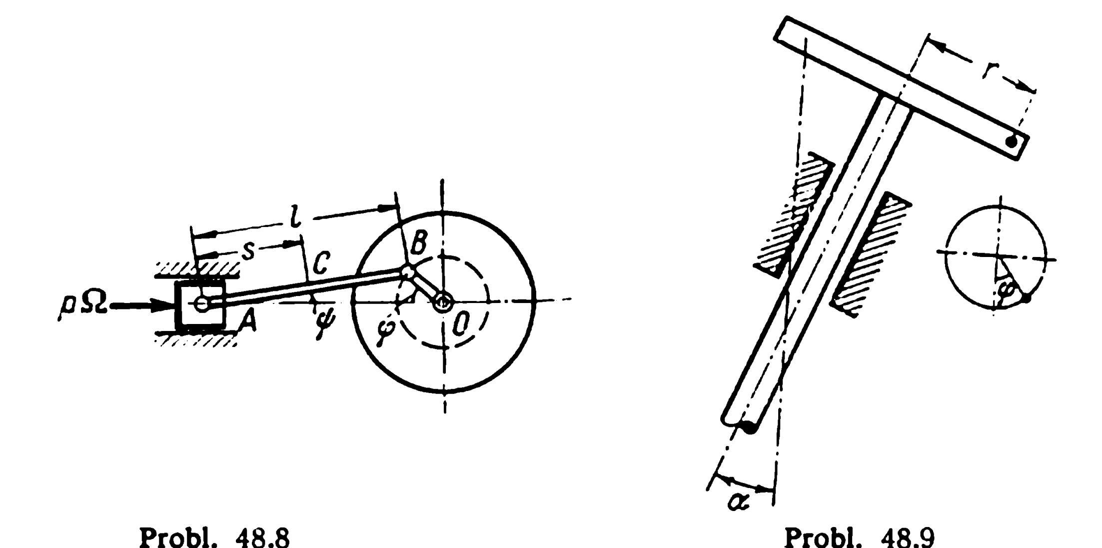
48.7. La charge M de 101 kgf soulève à l'aide d'un palan la charge M_1 dont le poids avec la frette mobile est de 320 kgf. Le palan comporte quatre poulies; les grandes poulies pesant 16 kgf chacune, les petites 8 kgf chacune, le rayon des grandes poulies est r, celui des petites est r_1. Calculer l'accélération de la charge M.

Lors du calcul de l'énergie des poulies on suppose que leurs masses sont réparties uniformément suivant une circonférence.

Rép. 0,1 g.

48.8. Un mécanisme à manivelle comporte un piston de masse m_1, une bielle AB de masse m_2, une manivelle OB, un arbre et un volant; J_2 est le moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre des masses C; J_3 le moment d'inertie de la manivelle OB, de l'arbre et du volant par rapport à l'axe O; Ω l'aire du piston; p la pression sur le piston; l la longueur de la bielle, s la distance entre le point A et le centre de gravité de la bielle; r la longueur de la manivelle OB; M le moment du couple de résistance agissant sur l'arbre. Le mécanisme est disposé dans le plan horizontal. Ecrire les équations du mouvement du mécanisme en supposant l'angle de rotation de la bielle ψ petit, autrement dit, en posant $\sin\psi=\psi$, $\cos\psi=1$; l'angle de rotation φ de la manivelle est pris comme coordonnée généralisée.

Rép.
$$\left[(m_1+m_2)\,r^2\sin^2\varphi+(J_2+ms^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos^2\varphi+J_2\right]\ddot{\varphi}+$$
$$+\left[(m_1+m_2)\,r^2-(J_2+ms^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}^2=$$
$$=-M+p\,\Omega\,r\sin\varphi.$$



Probl. 48.8 Probl. 48.9

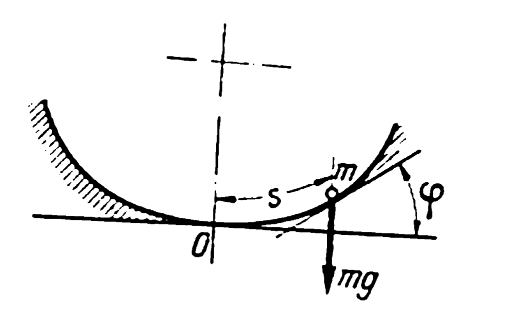
48.9. Dans une machine d'équilibrage statique les paliers sont inclinés sous un angle α par rapport à la verticale. Le rotor posé sur le palier, dont le moment d'inertie (par rapport à son axe) est J, porte une masse non équilibrée m à une distance r de l'axe. Ecrire l'équation différentielle du mouve-

ment du rotor et calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

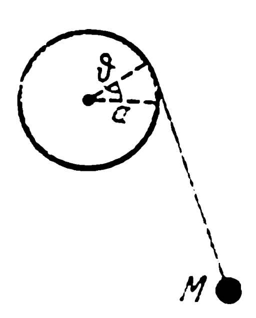
Rép. $(mr^2+J)\ddot{\varphi}+mgr\sin\alpha\sin\varphi=0$, $k=\sqrt{\frac{mgr\sin\alpha}{mr^2+J}}$, où φ est l'angle de rotation du rotor.

48.10. Un point matériel de masse m se déplace sous l'action de la pesanteur suivant un guide cycloïdal donné par l'équation $s=4a\sin\varphi$, où s est l'arc calculé à partir du point O, et φ l'angle formé par la tangente au cycloïde et l'axe horizontal. Déterminer le mouvement du point.

Rép. $s=A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+\varphi_0\right)$, où A et φ_0 sont des constantes d'intégration.



Probl. 48.10



Probl. 48.11

48.11. Ecrire l'équation du mouvement du pendule constitué par le point matériel M de masse m suspendu à un fil enroulé sur un cylindre fixe de rayon r. Dans la position d'équilibre la longueur du tronçon pendant du fil est l. Négliger la masse du fil.

Rép. $(l+r\vartheta)\ddot{\vartheta}+r\dot{\vartheta}^2+g\sin\vartheta=0$, où ϑ est l'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale.

48.12. Ecrire l'équation du mouvement du pendule constitué par le point matériel de masse m suspendu à un fil dont la longueur varie suivant une loi arbitraire donnée $l=l(t)$.

Rép. $\ddot{\varphi}+2\,\frac{\dot{l}}{l}\,\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$, où φ est l'angle de déviation du fil par rapport à la verticale.

48.13. Déterminer dans le problème précédent le mouvement du pendule dans le cas de petites oscillations lorsque l'allongement du fil a lieu suivant la loi:

$$l(t)=l_0+ct.$$

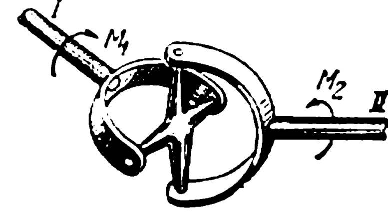
Indication. Prendre $l(t)$ en tant que variable indépendante.

Rép. $\varphi=\frac{1}{\sqrt{l(t)}}\left[C_1 J_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}\,l(t)}\right)+C_2 Y_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}\,l(t)}\right)\right]$,

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, J_1 et Y_1 les fonctions de Bessel et de Neumann du premier ordre.

48.14. Le point de suspension du pendule, composé par un point matériel de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur l, se déplace sur une droite oblique formant un angle α avec l'horizontale suivant une loi donnée $\xi=\xi_0(t)$. Ecrire l'équation du mouvement du pendule.

Rép. $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi+\frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi-\alpha)=0.$



Probl. 48.15

48.15. Deux arbres situés dans un même plan et formant un angle α sont reliés par un cardan. Les moments d'inertie des arbres sont J_1 et J_2. Ecrire l'équation du mouvement du premier arbre, s'il est soumis à un couple moteur M_1 tandis que l'autre arbre est soumis à un couple de résistance M_2. Négliger le frottement dans les paliers.

Rép. $$\left[J_1+J_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}-$$

$$-\frac{J_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi)^2}\dot{\varphi}^2=M_1-M_2\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi},$$

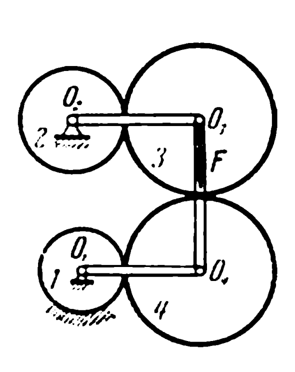
où φ désigne l'angle de rotation du premier arbre.

48.16. Déterminer, d'après le problème précédent, le mouvement du premier arbre dans le cas où l'angle α entre les arbres est petit. Faire les calculs à α^2 près.

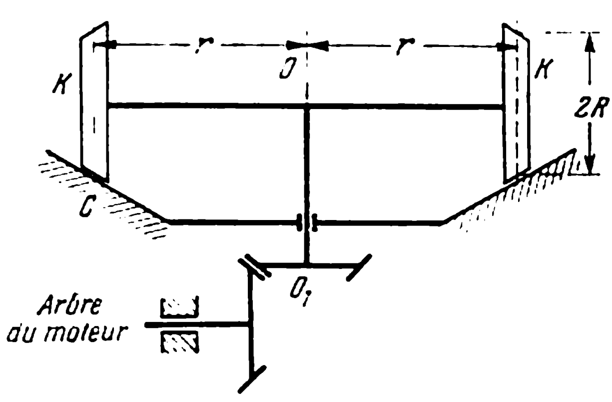
Rép. $\varphi=\frac{1}{2}\frac{M_1-M_2}{J_1+J_2}t^2+C_1t+C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

48.17. Un mécanisme épicyclique (cf. schéma) disposé dans le plan horizontal est composé des manivelles O_1O_4 et O_2O_3, de la bielle O_3O_4 et de quatre pignons *1*, *2*, *3* et *4* respectivement de rayons $r_1=50$ mm, $r_2=80$ mm, $r_3=120$ mm, $r_4=150$ mm; $O_1O_2=O_3O_4=270$ mm; $O_1O_4=O_2O_3=200$ mm. Le pignon *1* est fixe. Calculer l'intensité de l'effort F (supposé constant et dirigé le long de O_4O_3) qu'il faut appliquer au levier O_3O_4 pour faire tourner le levier O_2O_3 d'un angle de 30° en 1 s, si à l'instant initial le système était à l'arrêt et si $\widehat{O_2O_3O_4}=90°$. Le poids des parties mobiles est de 30 kgf. Assimiler les pignons à des disques homogènes de même épaisseur et faits du même matériau. Négliger la masse du levier et les forces de frottement.

Rép. $F=0{,}48\left[\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\right]^2$ kgf = 1,03 kgf.



Probl. 48.17



Probl. 48.18

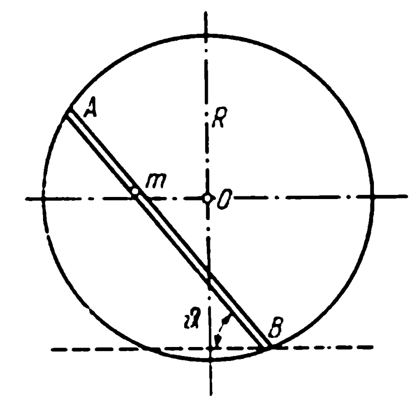
48.18. Les molettes K, K sont entraînées par l'arbre d'un moteur par l'intermédiaire d'une transmission (cf. schéma). Chaque molette pèse 3 t, son rayon moyen $R=1$ m, le rayon de rotation $r=0{,}5$ m. On suppose que l'axe instantané de rotation de la molette passe par le point médian C de la jante. Le rapport des rayons des pignons de la transmission conique de l'arbre du moteur à l'arbre vertical O_1O est de 2/3. Assimiler les molettes à des disques homogènes de rayon R et négliger la masse de toutes les parties mobiles par rapport à la masse des molettes. Calculer le couple moteur constant qu'il faut appliquer à l'arbre du moteur pour communiquer à l'axe O_1O une vitesse angulaire de 120 tr/mn, 10 s après le démarrage du moteur; négliger les forces de résistance.

Rép. 320 kgf.

48.19. Un cône circulaire homogène roule sur un plan rugueux incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. La longueur de la génératrice du cône est l, son angle au sommet 2β. Ecrire l'équation du mouvement du cône.

Indication. Prendre l'angle ϑ formé par la génératrice en contact avec le plan et la ligne de plus grande pente en tant que coordonnée généralisée.

$$Rép.\quad \ddot{\vartheta}+\frac{g\sin\alpha}{l\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)}\sin\vartheta=0.$$



Probl. 48.20

48.20. Un point matériel de masse m se déplace avec une vitesse relative constante v sur une barre homogène AB de masse M et de longueur $2a$ dont les extrémités glissent sur une circonférence lisse de rayon R située dans le

plan horizontal. Déterminer le mouvement de la barre. A l'instant initial le point matériel se trouve au centre de gravité de la barre.

Rép. $\vartheta - \vartheta_0 = C \operatorname{arc\,tg} \dfrac{vt}{\sqrt{R^2 - a^2 + \dfrac{M}{m}\left(R^2 - 2\dfrac{a^2}{3}\right)}}$,

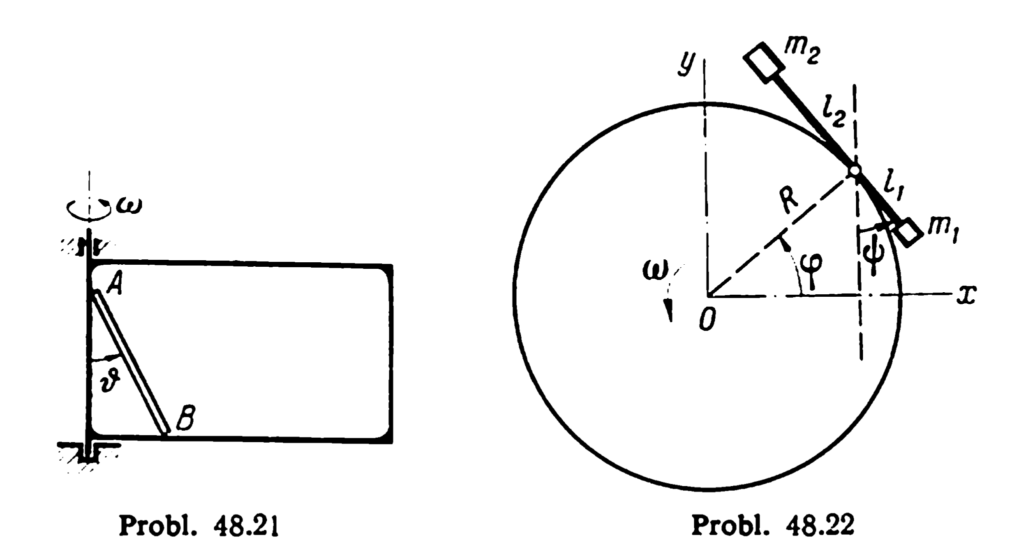
où ϑ_0 et C sont des constantes arbitraires.

48.21. Les extrémités d'une barre homogène pesante AB de longueur $2a$ et de masse M glissent sans frottement sur les barres horizontale et verticale d'un portique tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour du côté vertical.

Ecrire l'équation du mouvement de la barre et déterminer la position d'équilibre relatif.

Rép. $\frac{4}{3} Ma^2 \ddot{\vartheta} - \frac{4}{3} M\omega^2 a^2 \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - Mga \sin\vartheta = 0$,

où ϑ est l'angle formé par la barre avec la verticale. A l'équilibre $\vartheta = 0$ (équilibre instable).



Probl. 48.21

Probl. 48.22

48.22. Un levier supportant à ses extrémités les masses concentrées m_1 et m_2 est articulé à la circonférence d'un disque homogène de rayon R. Les distances des masses à l'articulation sont respectivement l_1 et l_2. Le disque tourne autour d'un axe vertical perpendiculaire à son plan avec une vitesse angulaire ω. Ecrire l'équation du mouvement du levier et déterminer sa position relative d'équilibre. La masse du levier est négligeable. L'axe de rotation du levier est parallèle à l'axe de rotation du disque.

Rép. $(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\psi - \omega t) = 0$.

Pour $m_1 l_1 = m_2 l_2$ le levier est en équilibre relatif indifférent. Pour $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ il existe deux positions d'équilibre relatif pour lesquelles $\psi = \omega t \pm \frac{\pi}{2}$, autrement dit, le levier est dirigé suivant le rayon.

48.23. Résoudre le problème précédent en supposant que le disque tourne dans le plan vertical (tenir compte de la pesanteur).

Rép. $(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\psi - \omega t) +$

$+ (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin \psi = 0.$

Pour $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ l'équilibre relatif est impossible.

48.24. Un disque mince de masse M peut glisser sans frottement sur sa face le long d'un plan horizontal. Un point matériel de masse m se déplace sur la face supérieure rugueuse du disque. Les équations du mouvement relatif du point en coordonnées cartésiennes x et y, liées avec le disque et prenant origine en son centre de gravité, sont données sous la forme $x = x(t)$, $y = y(t)$. Le moment d'inertie du disque par rapport à son centre de gravité est J. Déterminer la loi de variation de la vitesse angulaire du disque. Dans sa position initiale ce dernier est immobile.

Rép. $\left[J + \frac{mM}{m+M}(x^2+y^2)\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - y\dot{x}) =$

$= \frac{mM}{m+M}(x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0),$

où x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ sont les valeurs des coordonnées et des projections de la vitesse du point à l'instant initial.

48.25. Un point matériel se déplace avec une vitesse relative $v = \alpha t$ suivant une circonférence de rayon R sur le disque décrit dans le problème précédent. Déterminer la loi du mouvement du disque.

Rép. $\varphi = -\frac{mM}{2(m+M)} \frac{R\alpha}{J + \frac{mM}{m+M} R^2} t^2 = \frac{\beta}{2R} t^2;$

$$\xi = -\frac{mR}{m+M} \cos \frac{\alpha+\beta}{2R} t^2; \quad \eta = -\frac{mR}{m+M} \sin \frac{\alpha+\beta}{2R} t^2,$$

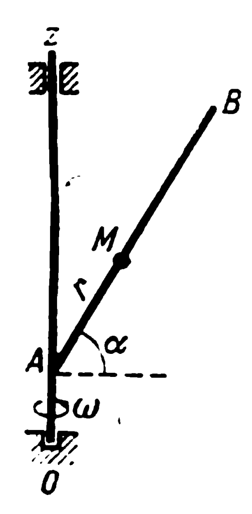
où φ est l'angle de rotation du disque, ξ et η les coordonnées du centre de gravité du disque dans le système cartésien fixe dont l'origine est située au centre d'inertie du système.

48.26. Un point matériel M se déplace sous l'action de la pesanteur suivant une droite AB tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe. La droite AB fait un angle α avec l'horizontale. Déterminer la loi du mouvement du point.

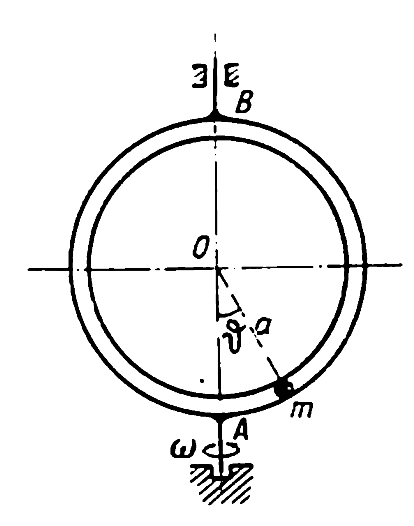
Rép. La distance du point mobile au point d'intersection de la droite avec l'axe vertical

$$r = C_1 e^{\omega t \cos \alpha} + C_2 e^{-\omega t \cos \alpha} + \frac{g}{\omega^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.



Probl. 48.26



Probl. 48.27

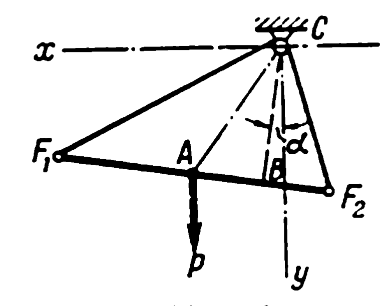
48.27. Un point matériel de masse m se déplace suivant une circonférence de rayon a qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du diamètre vertical AB. Ecrire l'équation du mouvement du point et déterminer le couple M nécessaire pour assurer la constance de la vitesse angulaire.

Rép. $\ddot{\vartheta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta=0;\quad M=2ma^2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\omega\dot{\vartheta}.$

48.28. Un point matériel de masse m se déplace à l'intérieur d'un tube lisse formant une circonférence de rayon a; le tube tourne librement autour du diamètre vertical. Son moment d'inertie par rapport au diamètre vertical est J. Ecrire les équations du mouvement du système. Le tube tourne sous l'action d'un couple constant M (cf. schéma du problème 48.27).

Rép. $ma^2\ddot{\vartheta}-ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2+mga\sin\vartheta=0,\quad J\ddot{\varphi}+ma^2\sin^2\vartheta\cdot\ddot{\varphi}+$ $+2ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\dot{\varphi}=M$ (ϑ est l'angle qui définit la position du point dans le tube, φ est l'azimut du tube).

48.29. Une poutre homogène de poids P et de longueur $2l$ est suspendue par ses extrémités à une corde de longueur $2a$ passant sur une poulie fixe C. Négligeant la masse de la corde et supposant que la poulie soit petite, écrire les expressions des énergies cinétique et potentielle du système.



Probl. 48.29

Indication. La trajectoire du point C par rapport au segment F_1F_2 est une ellipse de grand axe $2a$ et de foyers en F_1 et F_2; prendre l'anomalie excentrique de l'ellipse, c'est-à-dire l'angle φ défini par les relations

$$AB=a\cos\varphi,\quad BC=\sqrt{a^2-l^2}\sin\varphi,$$

en tant que première coordonnée généralisée; prendre en tant que seconde coordonnée généralisée l'angle α entre l'axe vertical y et la perpendiculaire BC à la barre.

Rép. L'énergie cinétique du système est

$$T=\frac{P}{2g}\left[\left(\frac{l^2}{3}+a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\dot{\alpha}^2-2ab\dot{\varphi}\dot{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2b^2+l^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\dot{\varphi}^2\right].$$

L'énergie potentielle du système est donc

$$\Pi=-P(b\sin\varphi\cos\alpha-a\cos\varphi\sin\alpha);\quad b=\sqrt{a^2-l^2}.$$

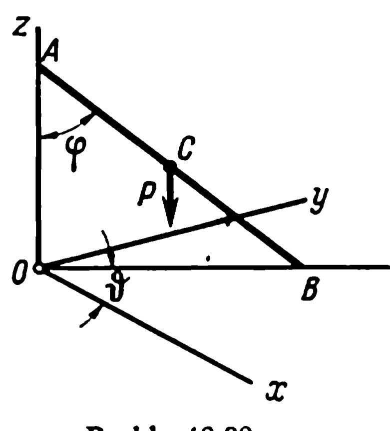
48.30. L'extrémité A d'une barre mince homogène AB de poids P et de longueur $2l$ glisse sur une droite verticale, l'extrémité B sur un plan horizontal. Ecrire les équations du mouvement de la barre et trouver leurs premières intégrales.

Rép. Les équations du mouvement sont:

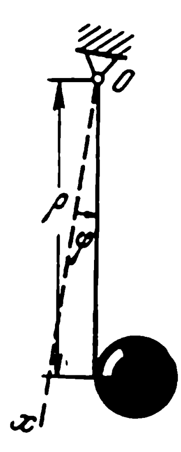
$$\ddot{\varphi}-\dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\varphi;\quad \ddot{\vartheta}\sin^2\varphi+2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi=0$$

(φ est la déviation de la barre par rapport à la verticale; ϑ l'angle que forme la projection de la barre sur le plan horizontal avec l'axe Ox).

Les premières intégrales: $\dot{\vartheta}\sin^2\varphi=C_1$; $\dot{\varphi}^2+\dot{\vartheta}^2\sin^2\varphi+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi=$ $=C_2$ (C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires).



Probl. 48.30



Probl. 48.33

48.31. Ecrire les équations du mouvement du pendule mathématique de masse m suspendu à un fil élastique; la longueur du fil dans la position d'équilibre est l, sa rigidité c.

Rép. $(1+z)\ddot{\varphi}+2\dot{z}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0;$

$$\ddot{z}-(1+z)\dot{\varphi}^2+\frac{c}{m}z+\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)=0,$$

où φ désigne la déviation du pendule par rapport à la verticale, z l'allongement relatif du fil.

48.32. Déterminer, suivant les données du problème précédent, le mouvement du pendule dans le cas de petites oscillations.

Rep. $z = A \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha\right)$, $\varphi = B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \beta\right)$,

où A, α, B, β sont des constantes arbitraires.

48.33. L'une des extrémités d'un fil fin inextensible est enroulée sur un cylindre circulaire homogène de rayon R, l'autre est fixée au point fixe O. Le cylindre tombe en déroulant le fil et oscille en même temps autour de l'axe horizontal passant par le point de suspension du fil. Négligeant le poids du fil, écrire les équations différentielles du mouvement du cylindre. (Voir fig. p. 416.)

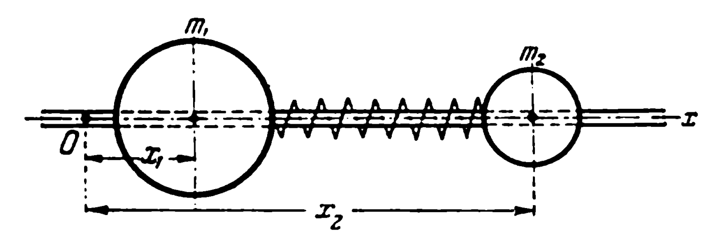
Rép. $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} g \cos\varphi$;

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho \sin\varphi.$$

48.34. Utilisant les résultats obtenus dans le problème précédent, écrire l'équation différentielle des petites oscillations du cylindre si le cylindre est parti du repos et pour $t=0$, $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0 \neq 0$.

Rép. $\frac{d}{dt}[F^2(t)\varphi] + gF(t)\varphi = 0$, où $F(t) = \frac{gt^2}{3} + \rho_0 - R\varphi_0$.

48.35. Déterminer le mouvement d'un système composé de deux masses m_1 et m_2 fixées sur une barre lisse horizontale (l'axe Ox); les masses sont reliées par un ressort de rigidité c et peuvent se déplacer suivant la



Probl. 48.35

barre; la distance entre leurs centres de gravité lorsque le ressort n'est pas déformé est l; l'état initial du système pour $t=0$ est défini par les valeurs suivantes des vitesses et des coordonnées des centres de gravité des masses: $x_1=0$, $\dot{x}_1=u_0$, $x_2=l$, $\dot{x}_2=0$.

Rép. $x_1 = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{ m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} \sin kt \right\}$;

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{ m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k} \sin kt \right\}; \quad k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

48.36. L'axe de rotation O_2 du pignon *2* se trouve sur le volant *1*, tournant autour de l'axe vertical O_1 sous l'action du couple constant appliqué M. Le pignon *2* est engrené avec le pignon *3* qui peut tourner autour de l'axe indépendamment du volant. La rotation du pignon *3* est empê-

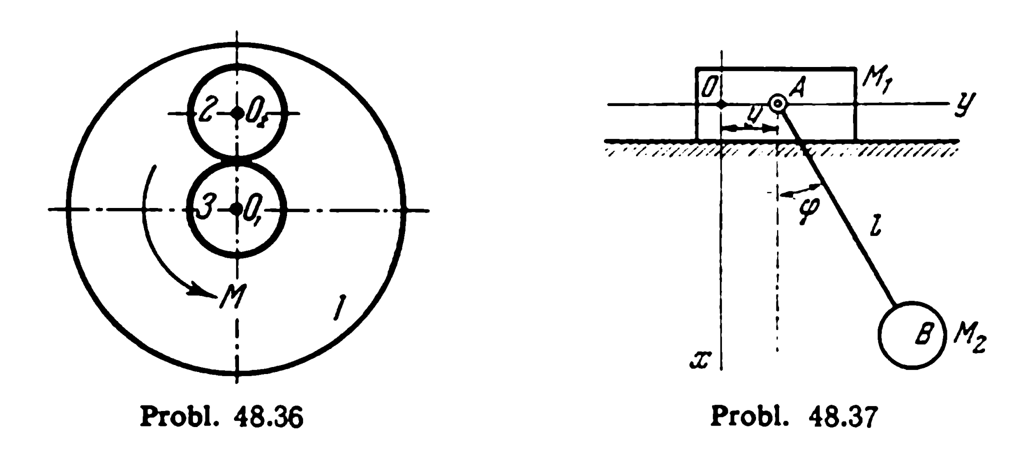
chée par un ressort spiral (non indiqué sur le schéma) dont le couple réactif $c\psi$ est proportionnel à l'angle de rotation ψ du pignon *3*.

Déterminer le mouvement du système. Assimiler les pignons à des disques homogènes identiques de rayon a et de masse m et supposer que le moment d'inertie du volant par rapport à l'axe O_1 est $20\,ma^2$. A l'instant initial le système était à l'arrêt.

Rép. $\psi = \frac{M}{26c}\left(1 - \cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right)$;

$$\varphi = \frac{Mt^2}{52ma^2} + \frac{M}{676c}\left(1 - \cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right),$$

où φ est l'angle de rotation du volant.



Probl. 48.36 Probl. 48.37

48.37. Ecrire les équations du mouvement du pendule elliptique composé d'un coulisseau M_1 de masse m_1, glissant sans frottement sur un plan horizontal, et d'une bille M_2 de masse m_2 reliée au coulisseau par une tige AB de longueur l. La tige peut tourner autour de l'axe A fixé au coulisseau et perpendiculaire au plan du schéma. Négliger la masse de la tige.

Rép. $\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\,\dot{y} + m_2\,l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0;\quad l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0.$

48.38. Calculer la période des petites oscillations du pendule décrit dans le problème précédent.

Rép. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{l}{g}}$.

48.39. Ecrire les équations du mouvement du pendule elliptique (cf. problème 48.37) compte tenu de l'effet de la force constante de frottement du coulisseau sur le plan horizontal. Le coefficient de frottement est f.

Rép. $\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\,\dot{y} + m_2\,l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] =$

$$= -f\left[(m_1+m_2)\,g + m_2\,l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + m_2\,l\sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right]\,\mathrm{sign}\,\dot{y},$$

$$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0,\ \text{où}\ \mathrm{sign}\,\dot{y} = \begin{cases} +1\ \text{si}\ \dot{y} > 0,\\ -1\ \text{si}\ \dot{y} < 0.\end{cases}$$

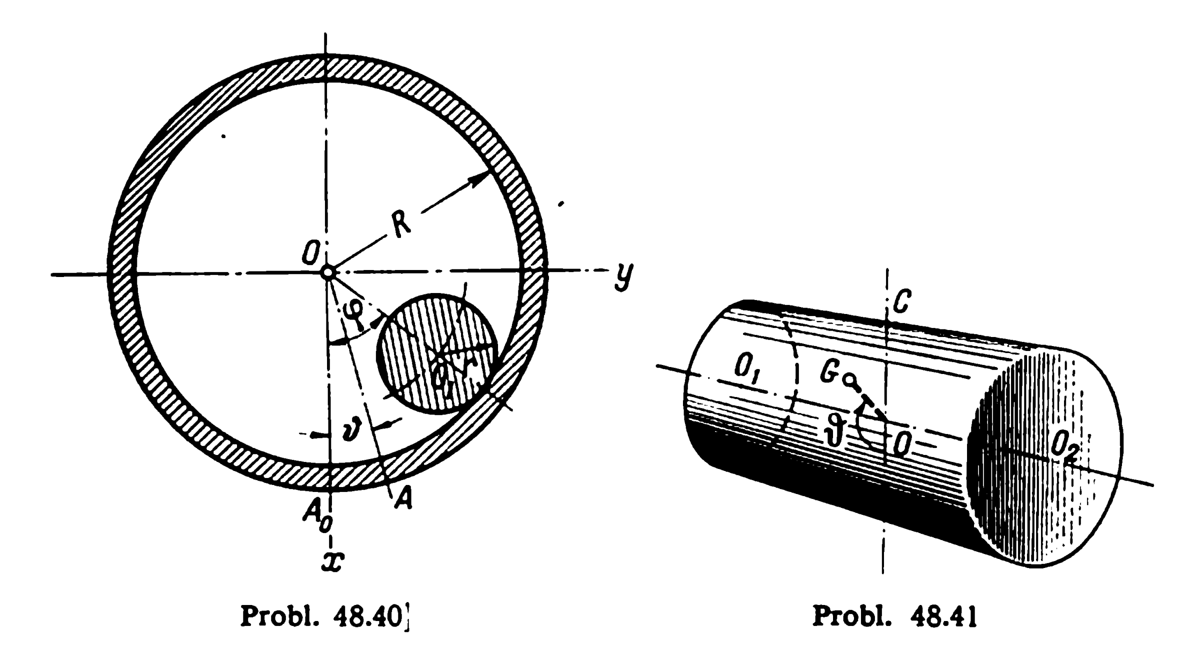
48.40. Un cylindre rugueux de masse m et de rayon r roule sans glisser sur la surface intérieure d'un cylindre creux de masse M et de rayon R pouvant tourner autour de son axe horizontal O. Les moments d'inertie des cylindres par rapport à leurs axes sont $\frac{1}{2}mr^2$ et MR^2. Ecrire les équations du mouvement du système et trouver leurs premières intégrales.

Rép. $MR^2\dot{\vartheta} - \frac{1}{2} mR[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}] = C_1,$

$\frac{1}{2} MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4} m[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}]^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 -$

$-mg(R-r)\cos\varphi = C_2,$

où φ est l'angle de rotation du segment joignant les axes des cylindres, et ϑ l'angle de rotation du cylindre extérieur.



Probl. 48.40 Probl. 48.41

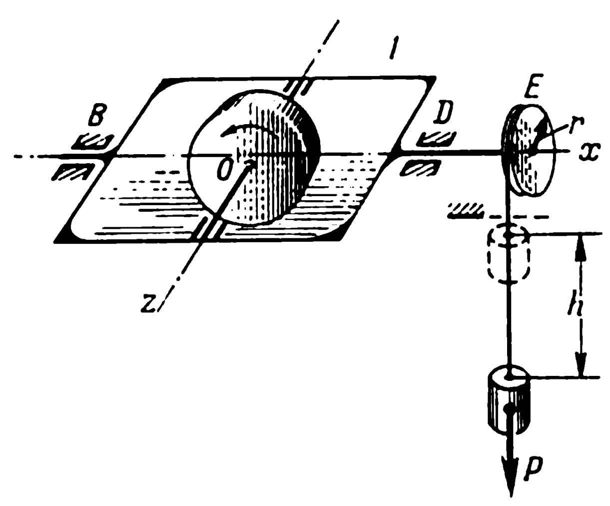
48.41. Un corps de poids P peut tourner autour de l'axe horizontal O_1O_2, lequel à son tour tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical OC. Le centre de gravité G du corps est situé à une distance l du point O sur la droite perpendiculaire à O_1O_2. Supposant que les axes O_1O_2 et OG sont les axes principaux d'inertie du corps au point O, écrire l'équation du mouvement. Les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux sont A, B, C.

Rép. $A\ddot{\vartheta} - \omega^2(C-B)\sin\vartheta\cos\vartheta = -Pl\sin\vartheta$, où ϑ est l'angle de rotation autour de O_1O_2.

48.42. L'axe BD du cadre 1 d'un gyroscope équilibré est mis en rotation par le poids P au moyen d'un fil et d'une poulie E de rayon r. Calculer la pression sur les paliers B et D du cadre, due au moment gyroscopique lorsque le poids descend de h. A et C sont les moments d'inertie du rotor par rapport aux axes Ox, Oz; A_1 le moment d'inertie du cadre par rapport

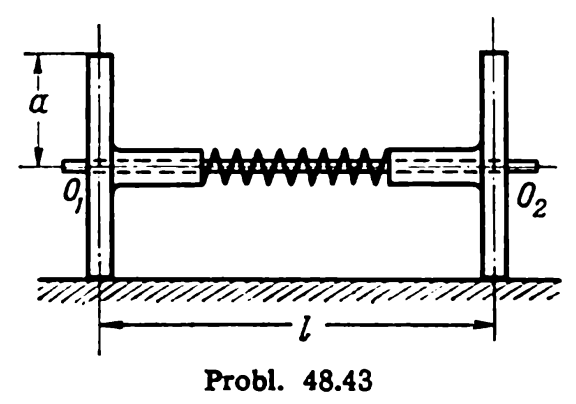
à l'axe Ox; la masse de la poulie E est négligeable. Le rotor effectue n tr/s. La distance $BD=b$.

Rép. $R_B=R_D=\frac{M}{b}=\frac{2C\pi n}{b}\sqrt{\frac{2ph}{A+A_1+\frac{p}{g}r^2}}$.



Probl. 48.42

48.43. Un système constitué par deux roues identiques de rayon a chacune, pouvant tourner indépendamment autour de l'axe commun normal à leurs plans O_1O_2 de longueur l, roule sur un plan horizontal. Les roues sont reliées par un ressort de rigidité c travaillant en torsion. La masse de chaque roue est M; C est le moment d'inertie de la roue par rapport à



Probl. 48.43

l'axe de rotation; A le moment d'inertie de la roue par rapport au diamètre. Ecrire les équations du mouvement du système et déterminer le mouvement correspondant aux conditions initiales: $\varphi_1=0$, $\dot{\varphi}_1=0$, $\varphi_2=0$, $\dot{\varphi}_2=\omega$ (φ_1, φ_2 sont les angles de rotation des roues). Négliger la masse de l'axe.

Rép. $\varphi_1=\frac{1}{2}\left(\omega t-\frac{\omega}{k}\sin kt\right)$; $\varphi_2=\frac{1}{2}\left(\omega t+\frac{\omega}{k}\sin kt\right)$;

$$k=\sqrt{\frac{2c}{Ma^2+C+4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

48.44. Quel travail faut-il fournir pour communiquer à un chariot de masse M une vitesse u dans les cas suivants:

1) Un rouleau cylindrique homogène de masse m et de rayon r est posé en travers au fond du chariot. Le rayon de giration du rouleau par rapport à son axe est ρ. Il peut rouler sur le fond du chariot sans glisser.

2) Ce rouleau est fixé au fond du chariot.

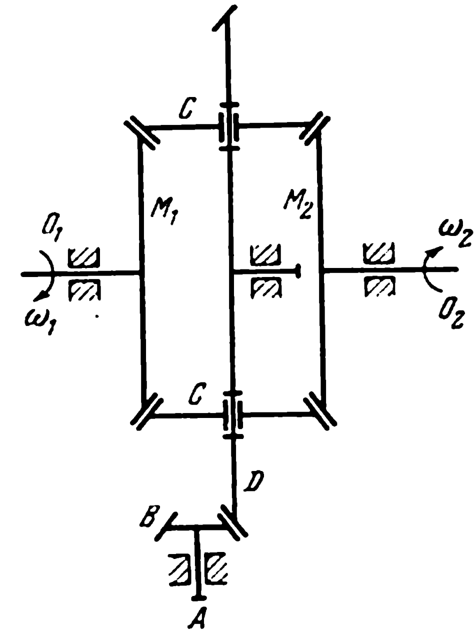
Négliger les masses des roues.

Rép. $A_1 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\,\frac{\rho^2}{\rho^2+r^2}\right)u^2;\quad A_2 = \frac{M}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)u^2;\quad A_2 > A_1.$

48.45. Trouver l'accélération d'un chariot sur la plate-forme duquel un cylindre circulaire roule sans glisser si le chariot roule lui-même sans glisser le long d'un plan incliné sous un angle α par rapport au plan horizontal et parallèle à la plate-forme du chariot; les génératrices du cylindre sont perpendiculaires aux lignes de plus grande pente de la plate-forme. La masse du chariot sans les roues est M, la masse de toutes les roues est m, la masse du cylindre est M_1; assimiler les roues à des disques continus homogènes.

Rép. $w = \frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}\, g \sin \alpha.$

48.46. Dans un régulateur différentiel (cf. schéma) les axes O_1 et O_2 tournent en sens opposés avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2; ils sont munis de pignons M_1 et M_2 et sont engrenés au moyen de deux paires de satellites C avec le pignon D jouant le rôle de manivelle des satellites. Si $\omega_1 = \omega_2$ le pignon D est alors immobile. Dans le cas contraire D commence à tourner et par l'intermédiaire de l'axe A actionne un dispositif régulateur (non indiqué sur le schéma); ce dernier crée les couples transmis aux arbres O_1 et O_2, l'arbre qui devance étant freiné, et l'arbre retardé accéléré. Supposant ces couples proportionnels à la vitesse angulaire du pignon D (le coefficient de proportionnalité étant n) et égaux en grandeur pour les deux arbres et désignant par J le moment d'inertie du système réduit à l'axe O_1O_2, déterminer la loi de variation des vitesses angulaires ω_1 et ω_2, si leurs valeurs initiales $\omega_{10} \neq \omega_{20}$. On admet que les moments d'inertie J_1 et J_2 des arbres O_1 et O_2 avec les pignons M_1 et M_2 sont égaux; J_D désigne le moment d'inertie du pignon D et des parties du mécanisme mises en mouvement par ce pignon par l'intermédiaire de l'arbre A, réduit à l'axe de rotation du pignon D; on prend également en considération le moment d'inertie J_C des satellites par rapport à leur axe de rotation propre (cette grandeur ne figure pas dans le résultat final). Par moment



Probl. 48.46

d'inertie du système réduit à l'axe de l'arbre on comprend la somme $J = 2J_1 + J_D + 4J'_C$, où J'_C est le moment d'inertie d'un satellite par rapport à l'axe O_1O_2.

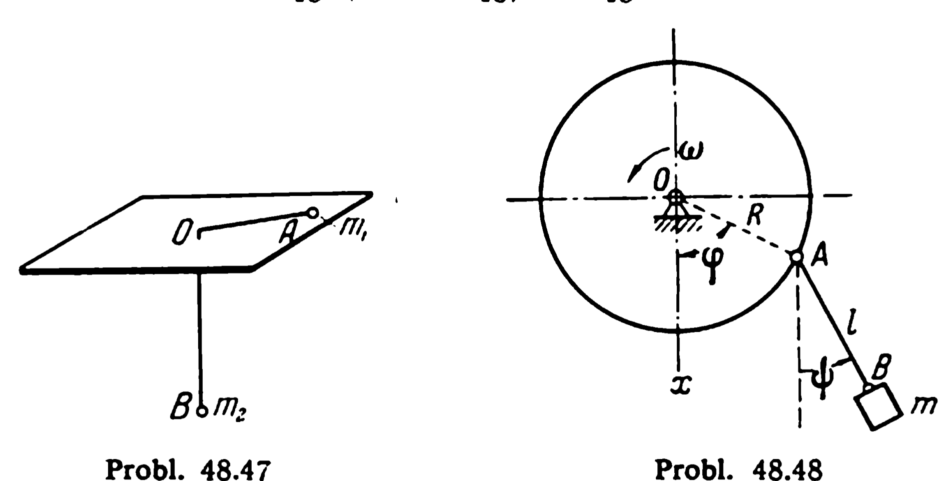
Rép. $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1+e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1-e^{-\lambda t})$,

$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{10}(1-e^{-\lambda t}) + \frac{1}{2}\omega_{20}(1+e^{-\lambda t})$, où $\lambda = \frac{2n}{J}$.

48.47. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 sont fixées aux extrémités d'un fil A et B passant par une ouverture O pratiquée dans le plan horizontal lisse d'une table. La première masse reste toujours sur la surface de la table, tandis que la seconde se déplace suivant la verticale passant par le point O. A l'instant initial $OA = r_0$, la vitesse de la masse m_2 est nulle, tandis que la vitesse v_0 de la masse m_1 est dirigée perpendiculairement à la position initiale du tronçon OA du fil. Démontrer que dans cette hypothèse la masse m_2 effectue un mouvement oscillatoire; calculer l'amplitude a de cette oscillation et donner l'expression de la période T. Le fil est non pesant, inextensible et parfaitement flexible.

Rép. $a = |r_0 - r_1|$, $T = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2 g}} \left| \int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0-r)(r-r_1)(r+r_2)}} \right|$,

où $r_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\left(2r_0 + \frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\right)} \pm \frac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}$.



Probl. 48.47 Probl. 48.48

48.48. Un disque homogène de rayon R et de masse M peut tourner autour de son axe horizontal O. Un point matériel de masse m est suspendu au disque par un fil AB de longueur l. Ecrire les équations du mouvement du système.

Rép. $\left(m + \frac{M}{2}\right) R^2 \ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi} + mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + mgR\sin\varphi = 0$, $mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\psi = 0$,

où φ est l'angle de rotation du disque, ψ l'angle de déviation du fil par rapport à la verticale.

48.49. Le disque du système décrit dans le problème précédent tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Ecrire l'équation du mouvement du point matériel.

Rép. $\ddot{\psi} - \omega^2 \frac{R}{l} \sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l} \sin\psi = 0.$

48.50. Une roue roule sans glissement sur un plan horizontal. Le rayon de la roue est a, sa masse M; C est le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe passant par son centre perpendiculairement à son plan; A est le moment d'inertie de la roue par rapport à son diamètre. Ecrire les équations de son mouvement.

Indication. Faire usage des équations de Lagrange avec des multiplicateurs pour des systèmes non holonomes.

Rép. $\frac{d}{dt}(A\dot{\psi}\sin^2\vartheta) - C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\vartheta}\sin\vartheta =$

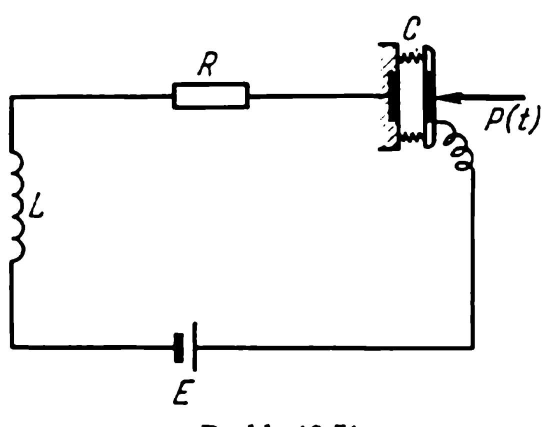
$= 0, \ (C + ma^2)\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - ma^2\dot{\vartheta}\dot{\psi}\sin\vartheta = 0,$

$(A + ma^2)\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + (C + ma^2)(\dot{\varphi} +$

$+ \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta = -mga\cos\vartheta,$

où φ est l'angle de rotation de la roue autour de l'axe perpendiculaire à son plan; ϑ l'angle d'inclinaison de son plan par rapport au plan horizontal; ψ l'azimut du plan vertical contenant le diamètre de la roue et passant par le point de contact.

48.51. Un microphone à condensateur est constitué par une bobine de self-induction, une résistance ohmique et un condensateur dont les plaques sont reliées par deux ressorts de rigidité totale c, montés en série. Le circuit est branché sur une pile de force électromotrice continue E, la plaque



Probl. 48.51

du condensateur étant soumise à une force variable $p(t)$. La self-inductance de la bobine est L, la résistance ohmique R, la capacité du condensateur dans la position d'équilibre C_0, la distance entre les plaques dans cette position est a, la masse de la plaque mobile du condensateur m. Introduire des coordonnées généralisées électriques et mécaniques et écrire les équations de Lagrange du mouvement du système.

Indication. 1. L'énergie potentielle du condensateur est $V=\frac{q^2}{2C}$ (C est la capacité du condensateur, q la charge sur ses plaques); l'énergie électrocinétique est calculée d'après la formule $T=\frac{1}{2}Li^2$ (L est la self-inductance, $i=\frac{dq}{dt}$ l'intensité du courant dans le circuit).

2. Prendre comme coordonnées généralisées la variation de la charge du condensateur q et le déplacement des ressorts par rapport à la position d'équilibre. Alors la charge totale sera q_0+q, et le déplacement total x_0+x; ici q_0 est la charge du condensateur, x_0 le déplacement des ressorts de la position neutre à la position d'équilibre du système.

Rép. $m\ddot{x}+cx-\frac{E}{a}q-\frac{q^2}{2C_0a}=p(t)$; $L\ddot{q}+R\dot{q}-\frac{E}{a}x+\frac{q}{C_0}-\frac{qx}{aC_0}=0.$

48.52. Calculer la fréquence des petites oscillations libres du microphone à condensateur décrit dans le problème précédent. Négliger la résistance du circuit électrique.

Rép. $k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}-\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{E^2}{a^2mL}}}$.

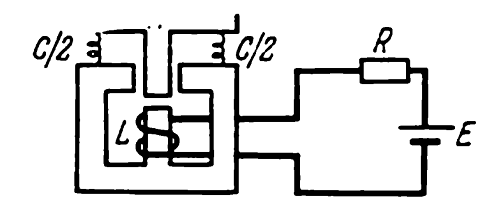
48.53. Déterminer les oscillations électriques produites dans le microphone à condensateur (cf. problème 48.51) lors de l'application brusque d'une pression constante p_0 à la plaque du microphone. Pour simplifier les calculs on néglige la masse de la plaque mobile et on suppose que la résistance ohmique du contour est nulle; il faut faire abstraction des termes non linéaires dans les équations du mouvement.

Rép. Pour $ca>\frac{q_0^2}{C_0a}$ la charge du condensateur est

$$q=\frac{p_0q_0}{ca\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\left[1-\cos\sqrt{\frac{1}{C_0L}\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\,t\right].$$

48.54. La figure montre le schéma de principe du capteur électromagnétique utilisé pour enregistrer les oscillations mécaniques. La masse de l'armature est M, la rigidité du ressort c. La self-inductance varie par suite de la variation de l'entrefer $L=L(x)$ (x est le déplacement vertical de l'armature à partir de la position correspondant à l'état non déformé des ressorts). Le solénoïde est branché sur une pile de f.é.m. donnée E. La résistance ohmique du circuit est R. Ecrire les équations du mouvement du système et déterminer sa position d'équilibre.

Indication. Prendre comme coordonnées généralisées le déplacement x de l'armature et la charge q correspondant au courant i dans le circuit $\left(i=\frac{dq}{dt}\right)$.



Probl. 48.54

Rép. Les équations du mouvement sont:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\dot{q}\dot{x}\ \frac{\partial L}{\partial x}=E;\ \ M\ddot{x}-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\ \dot{q}^2+cx=Mg.$$

Dans la «position d'équilibre» $x=x_0$ et $i=\dot{q}=i_0$, où

$$i_0=\frac{E}{R};\quad c\,x_0=Mg+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2.$$

48.55. Ecrire les équations des petits mouvements autour de la position d'équilibre du capteur électromagnétique décrit dans le problème précédent.

Indication. Prendre comme coordonnées généralisées la variation de la charge e et le déplacement vertical de l'armature à partir de la position d'équilibre ξ. Développer en série la fonction $L=L(x_0+\xi)=L_0+L_1\xi+\ldots$ et s'y borner aux deux premiers termes.

Rép. $L_0\ddot{e}+R\dot{e}+L_1 i_0\dot{\xi}=0;\ M\ddot{\xi}+c\xi-L_1 i_0\dot{e}=0.$

48.56. La base du capteur décrit dans le problème 48.54 effectue de petites oscillations verticales suivant la loi $\zeta=\zeta_0\sin\omega t$. Déterminer la loi du mouvement de l'armature et le courant dans le circuit électrique du capteur.

Rép. $i=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\ L_1 i_0\{R(c-M\omega^2)\cos\omega t+$

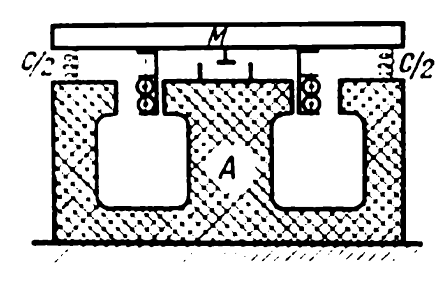
$+[L_1^2 i_0^2\omega+L_0\omega(c-M\omega^2)]\sin\omega t\},$

$x=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\ \{-[L_1^2 i_0^2 L_0\omega^2+(R^2+L_0^2\omega^2)\ (c-$

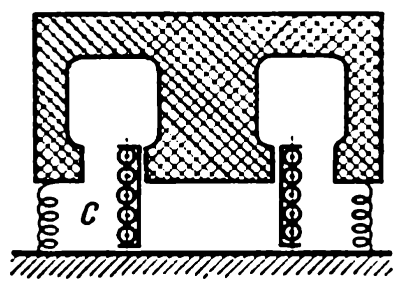
$-M\omega^2)]\sin\omega t+\omega L_1^2 i_0^2 R\cos\omega t\},$

où $\Delta=R^2(c-M\omega^2)^2+\omega^2\ [L_1^2 i_0^2+L_0(c-M\omega^2)]^2.$

48.57. Un système moteur électromécanique est composé d'un aimant permanent cylindrique de pôles concentriques A créant un champ radial et d'une armature de masse M s'appuyant sur un ressort de rigidité c. L'armature est liée à un solénoïde de n spires et au damper dont



Probl. 48.57



Probl. 48.58

la résistance est proportionnelle à la vitesse de l'armature (le coefficient de résistance étant β); le rayon moyen du solénoïde est r, sa self-inductance L, sa résistance ohmique R, l'induction magnétique dans l'entrefer de

l'aimant B. Une tension variable $V(t)$ est appliquée aux bornes du solénoïde. Ecrire les équations du mouvement du système.

Indication. Les forces généralisées correspondant à l'interaction du solénoïde et de l'aimant sont: $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$, $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$ (Q_q est la f. é. m. induite dans le circuit électrique, Q_x la force d'interaction du solénoïde et de l'aimant).

Rép. $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t)$; $M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} = 0$.

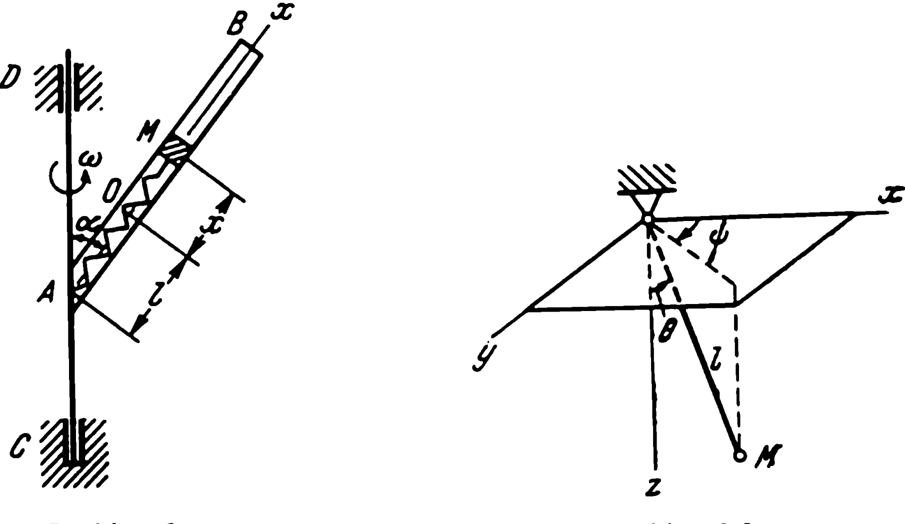
48.58. Un solénoïde de n spires et de rayon r connecté à un système enregistreur électrique schématisé par un circuit de self-inductance L et de résistance ohmique R est fixé à la base d'un sismomètre. Le noyau magnétique créant un champ magnétique radial, caractérisé dans l'entrefer par l'induction magnétique B, s'appuie sur la base au moyen de ressorts de rigidité totale c. Le noyau est soumis également à une force de résistance proportionnelle à sa vitesse, due au damper créant la force de résistance $\beta\dot{x}$. Ecrire les équations déterminant le déplacement du noyau et le courant dans le circuit dans le cas de petites oscillations verticales de la base du sismomètre d'après la loi $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. (Voir fig. p. 425.)

Indication. Les forces généralisées correspondant à l'interaction du solénoïde et de l'aimant sont données par les formules $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$ et $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$.

Rép. $M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} = M\xi_0\omega^2 \sin \omega t$; $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0$.

§ 49. Intégrales du mouvement, transformation de Routh, équations canoniques de Hamilton, équations de Jacobi-Hamilton, principe de Hamilton-Ostrogradsky

49.1. Un tube AB tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical CD en formant avec ce dernier un angle α. A l'intérieur du tube se trouve un ressort de rigidité c dont l'une des extrémités est fixée au point A, un corps M de masse m, glissant sans frottement dans le tube, étant fixé à son autre extrémité. La longueur du ressort non déformé est $AO = l$.



Probl. 49.1 Probl. 49.2

Prenant comme coordonnée généralisée la distance x du corps M au point O, calculer l'énergie cinétique T du corps M et l'intégrale généralisée de l'énergie.

Rép. $T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (l+x)^2 \omega^2 \sin^2 \alpha]$;

$m\dot{x}^2 - m(l+x)^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + cx^2 + 2mg \cos \alpha x = h$,

où h est la constante d'intégration.

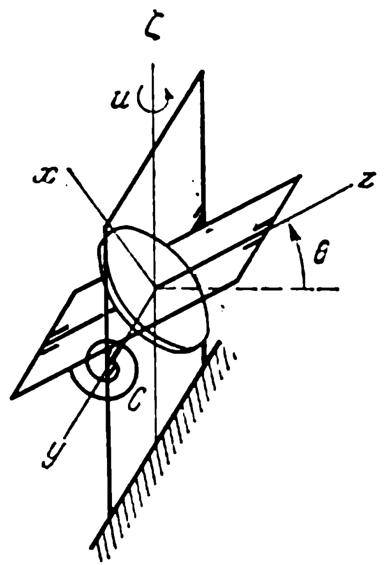
49.2. Trouver les premières intégrales du mouvement d'un pendule sphérique de longueur l dont la position est définie par les angles θ et ψ.

Rép. 1) L'intégrale correspondant à la coordonnée cyclique ψ (l'intégrale des moments cinétiques par rapport à l'axe des z) est $\dot{\psi} \sin^2 \theta = n$;

2) l'intégrale de l'énergie est:

$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{g}{l} \cos \theta = h$, où n et h sont les constantes d'intégration.

49.3. Un tachymètre gyroscopique est installé sur une plate-forme tournant avec une vitesse angulaire constante u autour de l'axe ζ. Déterminer les premières intégrales du mouvement si la rigidité du ressort spiral est c et si les moments d'inertie du gyroscope par rapport aux axes principaux centraux x, y, z sont respectivement A, B et C, de plus, $B=A$. Les forces de frottement sur l'axe z de rotation propre du gyroscope sont équilibrées par un couple créé par le stator de l'électromoteur entraînant le gyroscope; négliger les forces de frottement sur l'axe de précession y.

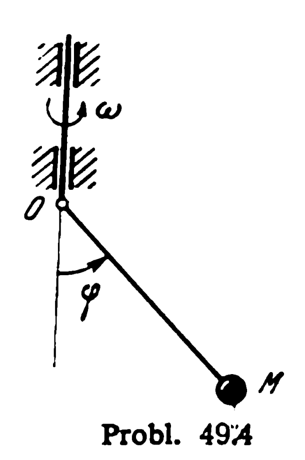


Probl. 49.3

Rép. 1) L'intégrale correspondant à la coordonnée cyclique φ (l'intégrale des moments cinétiques par rapport à l'axe des z) est: $\dot{\varphi} + u \sin \theta = n$;

2) l'intégrale généralisée de l'énergie est:

$A(\dot{\theta}^2 - u^2 \cos^2 \theta) + c\theta^2 = h$.



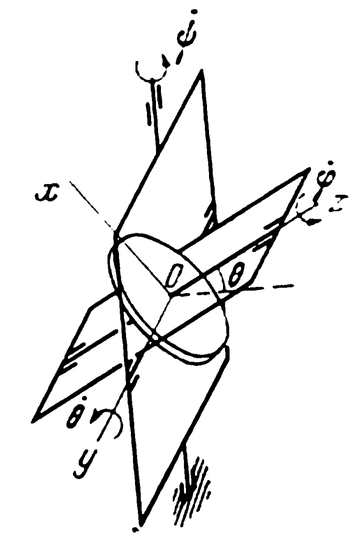
Probl. 49.4

49.4. Un point matériel M est relié à l'aide d'une tige non-pesante OM, de longueur l, à une articulation plane O dont l'axe horizontal tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante ω. Déterminer la condition de stabilité de la position inférieure verticale du pendule, la période de ses petites oscillations lorsqu'on le dévie de cette position et l'intégrale généralisée de l'énergie.

Rép. 1) $\omega^2 < \frac{g}{l}$; 2) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}}$;

3) $\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \sin^2 \varphi - 2\frac{g}{l}\cos\varphi = h$.

49.5. Un gyroscope équilibré se déplace par inertie dans une suspension à cardan. Calculer l'énergie cinétique du système et les premières intégrales des équations du mouvement, si le moment d'inertie du cadre extérieur par rapport à l'axe fixe de rotation ξ est J_ξ; les moments d'inertie du cadre intérieur par rapport aux axes principaux centraux x, y, z sont J'_x, J'_y, J'_z, les moments d'inertie correspondants du gyroscope étant J_x, J_y et J_z $(J_x = J_y)$.



Probl. 49.5

Rép. 1) $T = \frac{1}{2}\{[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot{\psi}^2 + (J_y + J'_y)\dot{\theta}^2 + J_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta)^2\}$;

2) l'intégrale correspondant à la coordonnée cyclique φ (l'intégrale des moments cinétiques du gyroscope par rapport à l'axe des z) est: $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta = n$;

3) l'intégrale correspondant à la coordonnée cyclique ψ (l'intégrale des moments cinétiques de tout le système par rapport à l'axe ξ) est:

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot{\psi} + J_z n \sin\theta = n_1;$$

4) l'intégrale de l'énergie est:

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot{\psi}^2 + (J_y + J'_y)\dot{\theta}^2 = h.$$

49.6. Faisant abstraction de la coordonnée cyclique ψ, écrire la fonction de Routh et l'équation différentielle par rapport à la coordonnée θ pour le pendule sphérique (cf. schéma du problème 49.2).

Rép. $R = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)$, $\quad \ddot{\theta} - n^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$,

où $n = \dot{\psi}\sin^2\theta = \text{const}$.

49.7. Un point de masse m se déplace dans un champ de force central dont l'énergie potentielle est $\Pi(r)$. Définissant la position du point par les coordonnées polaires r et φ et faisant abstraction de la coordonnée cyclique φ, écrire la fonction de Routh et l'équation différentielle du mouvement par rapport à la coordonnée r.

Rép. 1) $R=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2-\frac{c^2}{r^2}\right)$; 2) $m\left(\ddot{r}-\frac{c^2}{r^3}\right)=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}$,

où $c=r^2\dot{\varphi}=\text{const}$ est le double de la vitesse sectorielle.

49.8. Un gyroscope est monté dans une suspension à cardan. Les couples M_ξ et M_y des forces extérieures agissent sur les axes ξ et y de rotation des cadres de la suspension. Faisant abstraction de la coordonnée cyclique φ trouver: 1) la fonction de Routh, 2) les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées ψ et θ, 3) les termes gyroscopiques (cf. schéma du problème 49.5).

Rép. 1) $R=\frac{1}{2}\left[J_\xi+J_z'+(J_x'+J_x-J_z')\cos^2\theta\right]\dot{\psi}^2+$

$+\frac{1}{2}(J_y+J_y')\dot{\theta}^2+J_z n\dot{\psi}\sin\theta-\frac{1}{2}J_z n^2$;

2) $[J_\xi+J_z'+(J_x'+J_x-J_z')\cos^2\theta]\ddot{\psi}-2(J_x'+$

$+J_x-J_z')\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{\psi}+J_z n\cos\theta\,\dot{\theta}=M_\xi$,

$(J_y+J_y')\ddot{\theta}+2(J_x'+J_x-J_z')\cos\theta\sin\theta\,\dot{\psi}^2-$

$-J_z n\cos\theta\,\dot{\psi}=M_y$;

3) $J_z n\cos\theta\,\dot{\theta}$, $-J_z n\cos\theta\,\dot{\psi}$.

49.9. Ecrire la fonction de Hamilton et les équations canoniques du mouvement pour un pendule mathématique de masse m et de longueur l dont la position est définie par l'angle φ de sa déviation de la verticale. Démontrer l'équivalence des équations déduites à l'équation différentielle usuelle du mouvement du pendule mathématique.

Rép. 1) $H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}-mgl\cos\varphi$;

2) $\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2}$, $\dot{p}=-mgl\sin\varphi$.

49.10. Un point matériel de masse m est suspendu à l'aide d'une tige non pesante de longueur l à une articulation plane dont l'axe horizontal tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante ω (cf. schéma du problème 49.4.). Ecrire la fonction de Hamilton et les équations canoniques du mouvement.

Rép. 1) $H=\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}-\frac{ml^2}{2}\omega^2\sin^2\varphi-mgl\cos\varphi$;

2) $\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2}$, $\dot{p}=ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi-mgl\sin\varphi$.

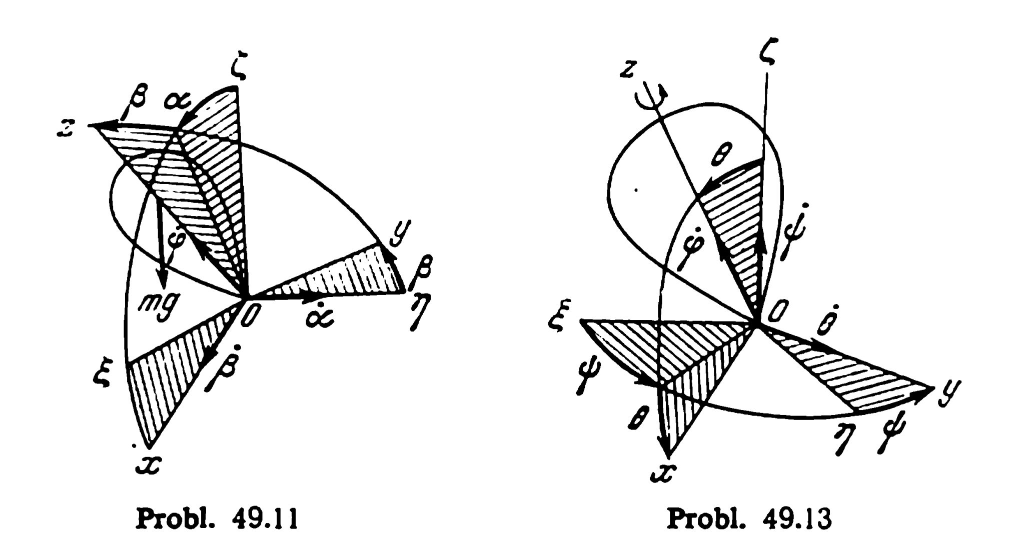
49.11. La position verticale de l'axe de symétrie d'une toupie se déplaçant autour du point fixe O sous l'action de la pesanteur est définie par les angles α et β. Eliminant la coordonnée cyclique φ (angle de rotation propre), écrire pour les angles α et β les fonctions de Routh et de Hamilton. La masse de la toupie est m, la distance de son centre de gravité au point O est l, le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie z est C, et par rapport aux axes x et y A.

Rép. $R = \frac{1}{2} A (\cos^2 \beta \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - Cn \sin \beta \dot{\alpha}$,

$$H = \frac{1}{2A} \left[\frac{(P_\alpha + Cn \sin \beta)^2}{\cos^2 \beta} + P_\beta^2 \right] + mgl \cos \alpha \cos \beta,$$

où $n = \dot{\varphi} - \sin \beta \dot{\alpha} = \text{const.}$

(Ici et par la suite les symboles P_α, P_β, etc., désignent des impulsions généralisées.



Probl. 49.11 Probl. 49.13

49.12. Utilisant les résultats obtenus dans le problème précédent, écrire pour les variables canoniques de Hamilton les équations différentielles des petites oscillations de la toupie autour de sa position verticale supérieure.

Rép. $\dot{\alpha} = \frac{1}{A} (P_\alpha + Cn\beta)$; $\dot{P}_\alpha = mgl\alpha$;

$$\dot{\beta} = \frac{1}{A} P_\beta; \ \dot{P}_\beta = -\frac{Cn}{A} (P_\alpha + Cn\beta) + mgl\beta.$$

49.13. La position de l'axe de symétrie z d'une toupie en mouvement autour du point fixe O sous l'action de la pesanteur est définie par les angles d'Euler: l'angle de précession ψ et l'angle de nutation θ. Ecrire la fonction de Hamilton pour les angles ψ, θ et φ (angle de rotation propre) et pour les impulsions correspondantes, si m est la masse de la toupie, l la distance de son centre de gravité au point O, C son moment d'inertie par

rapport à l'axe z, A le moment d'inertie par rapport à un axe arbitraire situé dans le plan équatorial passant par le point O.

$$Rép.\ H=\frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\psi-P_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}+P_\theta^2\right]+\frac{1}{2C}P_\varphi^2+mgl\cos\theta.$$

49.14. Ecrire, dans les conditions du problème précédent, les équations canoniques du mouvement de la toupie.

$$Rép.\ \dot\psi=\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta};\ \dot P_\psi=0;$$

$$\dot\theta=\frac{P_\theta}{A};\ \dot P_\theta=-\frac{(P_\varphi\cos\theta-P_\psi)(P_\psi\cos\theta-P_\varphi)}{A\sin^3\theta}+mgl\sin\theta;$$

$$\dot\varphi=-\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\operatorname{tg}\theta\sin\theta}+\frac{P_\varphi}{C};\ \dot P_\varphi=0.$$

49.15. Un point libre de masse se déplace dans le plan vertical xy sous l'action de la pesanteur. Ecrire l'équation différentielle aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton et trouver son intégrale complète (l'axe des y est dirigé verticalement vers le haut).

$$Rép.\ \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+gy=0;$$

$$V=b_1t+b_2x-\frac{1}{3g}\sqrt{(-2gy-2b_1-b_2^2)^3}+C,$$

où b_1, b_2 et C sont des constantes arbitraires.

49.16. Utilisant les résultats du problème précédent et les propriétés de l'intégrale complète de l'équation de Jacobi-Hamilton, trouver les premières intégrales des équations du mouvement du point.

$$Rép.\ \frac{\partial V}{\partial b_1}=t+\frac{1}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_2}=x+\frac{b_2}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=b_2=\dot x,\ \frac{\partial V}{\partial y}=\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=\dot y,$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes arbitraires.

49.17. Un pendule physique de masse M est en mouvement autour d'un axe horizontal fixe O. Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation est J, la distance de son centre de gravité à son axe de rotation étant l. Ecrire l'équation différentielle de Jacobi-Hamilton, trouver son intégrale complète et les premières intégrales du mouvement du pendu-

le (l'énergie potentielle est considérée comme nulle au niveau de l'axe du pendule).

Rép. 1) $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2J}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2-Mgl\cos\varphi=0$;

2) $V=bt+\sqrt{2J}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}\,d\varphi$;

3) $t-\sqrt{\frac{J}{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}}=a,\quad \sqrt{2J}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}=J\dot{\varphi}$,

où a et b sont des constantes arbitraires d'intégration.

49.18. Le mouvement d'une toupie ayant un point fixe O est défini par les angles d'Euler ψ, θ et φ. Utilisant les résultats du problème 49.13, écrire l'équation aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton et trouver son intégrale totale.

Rép. 1) $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}-\frac{\partial V}{\partial\varphi}\cos\theta\right)^2+$

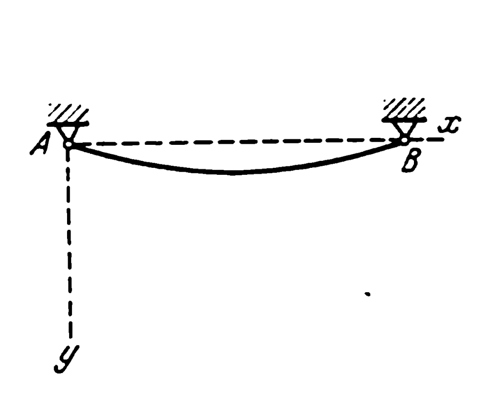
$+\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+mgl\cos\theta=0$;

2) $V=b_1t+b_2\psi+b_3\varphi+$

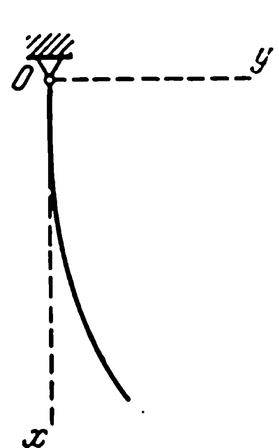
$+\int\sqrt{-2Ab_1-\frac{Ab_3^2}{C}-\frac{(b_2-b_3\sin\theta)^2}{\sin^2\theta}-2Agl\cos\theta}\,d\theta$.

49.19. Les extrémités d'une corde sont fixées aux points A et B distants de l. Supposant la tension T de la corde constante en tous ses points, déterminer l'intégrale d'action selon Hamilton pour les petites vibrations de la corde. On suppose que les vibrations ont lieu dans un seul plan xy et que la corde est soumise à la seule force de tension; la densité linéique de la corde est ρ.

Rép. $S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt$, où $y=y(x,t)$.



Probl. 49.19



Probl. 49.21

49.20. Utilisant le principe de Hamilton-Ostrogradsky et les résultats du problème précédent, écrire l'équation différentielle des vibrations de la corde.

Rép. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, où $a^2 = \frac{T}{\rho}$; les conditions aux limites sont: $y(0, t) = y(l, t) = 0$.

49.21. Un fil parfaitement flexible homogène et inextensible de longueur l est suspendu au point O. Déterminer l'intégrale d'action selon Hamilton pour les petites oscillations du fil autour de la verticale sous l'action de la pesanteur. La densité linéique du fil est ρ.

Rép. $S = \frac{\rho}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - g(l-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx\, dt$, où $y = y_i(x, t)$.

49.22. Utilisant le principe de Hamilton-Ostrogradsky et les résultats obtenus dans le problème précédent, écrire l'équation différentielle des petites oscillations du fil suspendu par l'une de ses extrémités.

Rép. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[(l-x) \frac{\partial y}{\partial x} \right]$; les conditions aux limites:

1) $y(0, t) = 0$,

2) $y(l, t)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}$ et $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=l}$ sont finies.

CHAPITRE XII

DYNAMIQUE DU VOL COSMIQUE

§ 50. Mouvement képlérien (mouvement sous l'action d'une force centrale)

50.1. Le module de la force de gravitation universelle agissant sur un point matériel de masse m est défini par l'égalité $F = m\frac{\mu}{r^2}$, où $\mu = fM$ est le paramètre de gravitation du centre d'attraction (M est sa masse, f la constante de gravitation) et r la distance du centre d'attraction au point attiré.

Connaissant le rayon R d'un corps céleste et l'accélération de la pesanteur g* sur sa surface, déterminer le paramètre de gravitation μ de ce corps et le calculer pour la Terre, si son rayon $R = 6\,370$ km et $g = 9{,}81$ m/s^2.

Rép. $\mu = gR^2$; pour la Terre $\mu = 3{,}98 \cdot 10^5$ km^3/s^2.

50.2. Calculer le paramètre de gravitation μ_n et l'accélération de la pesanteur g_n sur la surface d'un corps céleste sachant les rapports de sa masse M_n et de son rayon R_n à la masse M et au rayon R de la Terre. Calculer ces grandeurs pour la Lune, Vénus, Mars et Jupiter pour lesquels les rapports correspondants sont donnés dans le tableau suivant:

	$M_n : M$	$R_n : R$		$M_n : M$	$R_n : R$
Lune	0,0123	0,273	Mars	0,107	0,535
Vénus	0,814	0,958	Jupiter	317	10,95

Rép.

	μ (km^3/s^2)	g (m/s^2)		μ (km^3/s^2)	g (m/s^2)
Lune	$4{,}90 \cdot 10^3$	1,62	Mars	$42{,}8 \cdot 10^3$	3,69
Vénus	$326 \cdot 10^3$	8,75	Jupiter	$126 \cdot 10^3$	26,0

50.3. Un point matériel se déplace uniformément sur une orbite circulaire à l'altitude H au-dessus de la surface d'un corps céleste de rayon R

* Ici et plus loin on suppose que la force d'attraction du corps céleste est dirigée vers son centre; les accélérations de la pesanteur g sont données sans tenir compte de la rotation des corps célestes.

sous l'action de la force de gravitation universelle. Calculer la vitesse du mouvement v_1 et la période T du point matériel *.

Rép. 1) $v_1=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=\sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}$ (la vitesse circulaire à l'altitude H pour le corps céleste considéré);

2) $T=2\pi r\sqrt{\frac{r}{\mu}}=2\pi\frac{(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$. Ici r est la distance du point matériel au centre du corps céleste, μ son paramètre de gravitation, g l'accélération de la pesanteur sur sa surface.

50.4. Négligeant l'altitude du vol d'un satellite artificiel au-dessus de la surface d'un corps céleste, calculer la première vitesse cosmique v_1 et la période correspondante T de révolution pour la Terre, la Lune, Vénus, Mars et Jupiter.

Rép.

	v_1 (km/s)	T (mn)		v_1 (km/s)	T (mn)
Terre......	7,91	84,3	Mars......	3,54	101
Lune......	1,68	108	Jupiter.....	42,6	172
Vénus.....	7,30	87,5			

50.5. A quelle altitude de la Terre faut-il lancer un satellite circulaire tournant dans le plan de l'équateur pour qu'il se trouve toujours au-dessus du même point de la Terre?

Rép. $H=35\,800$ km.

50.6. Quel est l'angle β formé par l'équateur terrestre et la projection de la trajectoire du satellite sur la surface de la Terre, s'il se déplace suivant une orbite circulaire d'altitude H inclinée sous un angle α au plan de l'équateur?

Rép. $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\Omega\sqrt{(R+H)^3:\mu}}$,

où Ω est la vitesse angulaire de révolution diurne de la Terre et μ son paramètre de gravitation.

50.7. Un point de masse m est attiré vers un centre fixe selon la loi de gravitation universelle $F=m\frac{\mu}{r^2}$, où μ est le paramètre de gravitation du centre d'attraction. Trouver l'intégrale de l'énergie.

Rép. $v^2-2\frac{\mu}{r}=h$.

* Dans tous les problèmes de ce chapitre on néglige la résistance de l'atmosphère.

50.8. Déterminer l'altitude H de l'orbite circulaire d'un satellite pour laquelle son énergie potentielle par rapport à la surface d'une planète de rayon R est égale à son énergie cinétique.

Rép. $H=R/2$.

50.9. Calculer la vitesse d'entrée d'un météorite dans l'atmosphère terrestre, si la vitesse à l'infini $v_\infty=10$ km/s.

Rép. $v\approx 15$ km/s.

50.10. Quelle vitesse minimale v_2 faut-il communiquer à un vaisseau spatial sur la surface de la planète pour qu'il s'éloigne à l'infini?

Rép. $v_2=\sqrt{2}\,v_1$ est la seconde vitesse cosmique (v_1 étant la première vitesse cosmique).

50.11. Calculer la seconde vitesse cosmique pour la Terre, la Lune, Vénus, Mars et Jupiter.

Rép.

	v_2 (km/s)		v_2 (km/s)
Terre......	11,2	Mars......	5,0
Lune......	2,37	Jupiter....	60,2
Vénus.....	10,3		

50.12. Un point se déplace sous l'action d'une force centrale. Supposant que le module du rayon vecteur r du point dépend du temps t d'une manière complexe par l'intermédiaire de l'angle polaire φ, déterminer la vitesse et l'accélération du point*

Rép. $v^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$; $w_\varphi=0$, $w_r=\pm c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right)$,

où $u=\frac{1}{r}$, $c=r^2\dot{\varphi}=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\text{const}$ est le double de la vitesse sectorielle; on adopte le signe plus pour une force de répulsion et le signe moins pour une force d'attraction.

50.13. Un point de masse m se déplace sous l'action d'une force centrale suivant une section conique dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

où p et e sont le paramètre et l'excentricité de la trajectoire.

---

* Ici et plus loin on suppose que le pôle du système de coordonnées polaires est confondu avec le centre d'attraction (de répulsion).

Calculer la force provoquant le mouvement du point.

Rép. $F_\varphi=0$, $F_r=-m\mu/r^2$, où $\mu=c^2/p$ et c est le double de la vitesse sectorielle.

50.14. Un point de masse m est attiré vers un pôle fixe suivant la loi de la gravitation universelle $F=m\mu/r^2$. Trouver la trajectoire du mouvement du point.

Indication. Utiliser la réponse du problème 50.12.

Rép. Une courbe de second ordre (une section conique) dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varepsilon)},$$

où $p=c^2/\mu$; e et ε sont des constantes arbitraires d'intégration.

50.15. Un point matériel se déplace sous l'action de la force de gravitation universelle suivant une trajectoire elliptique dont l'excentricité $e<1$ et dont le paramètre est p. Connaissant l'intégrale des aires $c=r^2\dot{\varphi}=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$, calculer les demi-axes a et b de la trajectoire elliptique et la période de révolution T.

Rép. $a=\dfrac{p}{1-e^2}$, $b=\dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$, $T=\dfrac{2\pi p^2}{c(1-e^2)^{3/2}}=2\pi\dfrac{\sqrt{a^3}}{\mu}$.

50.16. Calculer, dans les conditions du problème précédent, l'accélération du point aux instants où il passe par l'apogée et le périgée.

Rép. $w_a=\dfrac{c^2}{p^3}(1-e)^2$, $w_p=\dfrac{c^2}{p^3}(1+e)^2$.

50.17. Connaissant la période de révolution T d'un satellite autour de la Terre, suivant une orbite elliptique, et la différence de son apogée et de son périgée H, déterminer l'excentricité de l'orbite.

Rép. $e=H\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{2\mu T^2}}$.

50.18. Un satellite se déplace autour d'une planète de rayon R suivant une orbite elliptique d'excentricité e. Calculer le demi grand axe de son orbite, si le rapport de son périgée à son apogée est $\gamma<1$.

Rép. $a=\dfrac{1-\gamma}{1-\gamma-e(1+\gamma)}R$.

50.19. Un point se déplace sous l'action de la force de gravitation universelle $F=m\mu/r^2$. Exprimer la constante de l'énergie h (cf. problème 50.7) en fonction des éléments de la trajectoire du point et du paramètre de gravitation μ.

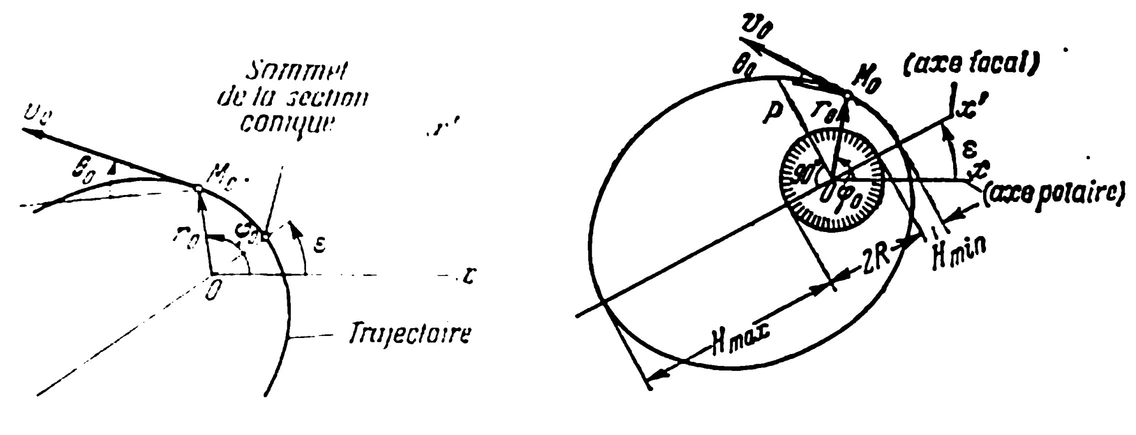
Rép. $h=-\mu/a$ pour une trajectoire elliptique (a est le demi grand axe), $h=0$ pour une trajectoire parabolique et $h=\mu/a$ pour une trajectoire hyperbolique (a étant le demi-axe réel de l'hyperbole).

50.20. A l'instant initial un point matériel se déplaçant suivant la loi de gravitation universelle se trouvait en M_0 à une distance r_0 du centre d'attraction, et sa vitesse était v_0; l'angle entre le vecteur vitesse $\mathbf{v}_0$ et la ligne de l'horizon (la tangente menée au point M_0 à la circonférence centrée au point d'attraction) était θ_0, l'angle polaire étant φ_0.

Calculer l'excentricité e et l'angle ε entre l'axe polaire et la ligne focale de la section conique *.

Rép. $e=\sqrt{1+\frac{c^2}{\mu^2}h}$, $\operatorname{tg}(\varphi_0-\varepsilon)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta_0}{1-\frac{r_0}{p}}$,

où $c=r_0v_0\cos\theta_0$ est l'intégrale des aires, $h=v^2-2\mu/r$ l'intégrale de l'énergie.



Probl. 50.20 Probl. 50.22 et 50.23

50.21. Calculer la vitesse qu'il faut communiquer à un vaisseau spatial pour qu'ayant atteint l'altitude H au-dessus de la surface d'une planète et s'étant séparé du dernier étage de la fusée, il se déplace suivant une trajectoire elliptique, parabolique ou hyperbolique. Le rayon de la planète est R.

Indication. Utiliser la réponse du problème précédent.

Rép. $v_0<v_2$, la trajectoire est une ellipse,
$v_0=v_2$, la trajectoire est une parabole,

$v_0>v_2$, la trajectoire est une hyperbole,

où $v_2=\sqrt{2\frac{gR^2}{R+H}}=\sqrt{2}v_1$ est la vitesse parabolique à l'altitude H (v_1 est la vitesse circulaire).

50.22. A l'instant où il s'est détaché du dernier étage de sa fusée un vaisseau spatial se trouvait au point M_0 à une hauteur $H=230$ km de la surface de la Terre, sa vitesse étant $v_0=8$ km/s, le vecteur vitesse $\mathbf{v}_0$ formant

* Comme direction positive de l'axe focal de la section conique on prend la direction du pôle, confondu avec l'un des foyers de la section, au sommet voisin.

avec la ligne de l'horizon (tangente à la circonférence de rayon r_0 menée au point M_0) l'angle $\theta_0=0{,}02$ rd $\approx 1°$, 146.

Calculer la constante des aires c, le paramètre p de la trajectoire et la constante de l'énergie h.

Rép. $c=52\ 790$ km²/s; $p=7\ 002$ km; $h=-56{,}6$ km²/s².

50.23. Déterminer, dans les conditions du problème précédent, la direction du demi grand axe de la trajectoire elliptique du satellite, l'excentricité e de sa trajectoire, l'apogée H_{max} et le périgée H_{min} et la période T de révolution du satellite.

Rép. 1) $\varepsilon=\varphi_0-0{,}335$ rd, où φ_0 est l'angle polaire initial du rayon vecteur r_0;
2) $e=0{,}0649$;
3) $H_{max}=1\ 120$ km, $H_{min}=210$ km;
4) $T=98{,}5$ mn.

50.24. Pour quelle direction de la vitesse initiale v_0 un vaisseau spatial tombe-t-il sur la surface d'une planète de rayon R indépendamment de la grandeur de v_0?

Rép. Si la vitesse initiale est dirigée vers l'intérieur du cône circonscrit à la planète à partir du point initial.

50.25. Pour quelles conditions initiales la trajectoire d'un vaisseau spatial lancé à la hauteur H au-dessus de la surface d'une planète de rayon R ne coupe-t-elle pas sa surface?

Rép. 1) $v_0^2 > v_1^2 \dfrac{2RH}{(R+H)^2 \cos^2\theta_0 - R^2}$,

où v_1 est la vitesse circulaire pour la planète considérée à la hauteur H;
2) la vitesse initiale doit être dirigée vers l'extérieur du cône circonscrit à la planète à partir du point initial.

50.26. Trouver la relation entre les périodes T_i de révolution des planètes autour du Soleil et les demi grands axes a_i de leurs trajectoires elliptiques.

Rép. $\dfrac{a_1^3}{T_1^2}=\dfrac{a_2^3}{T_2^2}$ pour n'importe quelle planète (troisième loi de Kepler).

50.27. La période de révolution de l'un des satellites de Jupiter appelé Io est de 1,77 j, le rayon de son orbite étant 5,91 fois plus grand que le rayon de Jupiter. La distance moyenne de Jupiter au Soleil est 5,20 fois plus grande que la distance moyenne de la Terre au Soleil (5,20 · 23 000 rayons terrestres), la période de révolution de Jupiter autour du Soleil est de 11 ans et 314,84 j.

Calculer le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil (le rayon de Jupiter est 11,14 fois plus grand que celui de la Terre).

Rép. La masse de Jupiter est 1 000 fois plus petite que celle du Soleil.

50.28. Par valeur moyenne $[r]$ du rayon vecteur d'un point se déplaçant suivant une orbite elliptique on comprend la grandeur définie par l'égalité

$$[r] = \frac{1}{T} \int_0^T r\, dt,$$

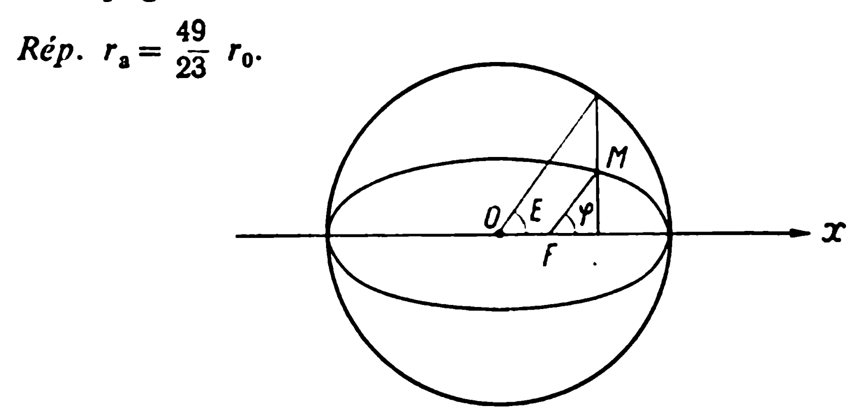
où T est la période de révolution.

Calculer la valeur moyenne du rayon vecteur d'une planète si a est le demi grand axe et e l'excentricité de sa trajectoire elliptique.

Rép. $[r] = a\left(1 + \frac{1}{2} e^2\right)$.

50.29. Deux satellites de même masse se déplacent dans le même sens autour d'un centre d'attraction suivant des orbites coplanaires dont l'une est circulaire de rayon r_0 et l'autre elliptique d'apogée $8r_0$ et de périgée r_0. Supposant que les satellites se soient amarrés au point de contact de leurs orbites et se déplacent ensuite ensemble, déterminer l'apogée de leur nouvelle orbite.

Rép. $r_a = \frac{49}{23} r_0$.



Probl. 50.30

50.30. Trouver le lien entre les anomalies réelle φ et excentrique E d'un point sur une orbite elliptique d'excentricité e.

Rép. $\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

50.31. Exprimer la vitesse en n'importe quel point de l'orbite elliptique en fonction de l'anomalie excentrique.

Rép. $v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}$.

50.32. Trouver sur l'orbite elliptique les points dont les vitesses de mouvement sont la moyenne géométrique des vitesses à l'apogée et au périgée.

Rép. $E = \pm \frac{\pi}{2}$ (les points sont situés aux extrémités du demi petit axe de l'ellipse).

50.33. Connaissant l'expression du rayon vecteur d'un point effectuant un mouvement elliptique autour du centre d'attraction:

$$\boldsymbol{r} = \frac{p}{1+e\cos\varphi}\,\boldsymbol{e}_r; \quad \boldsymbol{r} = a(1-e\cos E)\,\boldsymbol{e}_r,$$

où $\boldsymbol{e}_r$ est le vecteur unité du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ mené par le centre d'attraction, φ l'anomalie réelle et E l'anomalie excentrique, trouver l'expression du vecteur vitesse orbitale de ce point écrite dans les systèmes de coordonnées lorbitale et inertielle.

Rép. $\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\boldsymbol{e}_r e \sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)]$;

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\boldsymbol{e}_1\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} + \boldsymbol{e}_2\frac{(1-e^2)\cos E}{1-e\cos E}\right],$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le vecteur unité dirigé du pôle vers le périgée, et $\boldsymbol{e}_2$ le vecteur unité de la direction perpendiculaire à $\boldsymbol{e}_1$.

50.34. En quel point d'une orbite elliptique l'angle d'inclinaison de a trajectoire à l'horizon local (au plan perpendiculaire au rayon vecteur) atteint-il sa valeur maximale?

Rép. $E = \pm\frac{\pi}{2}$.

50.35. Un satellite se déplace suivant une orbite circulaire de rayon r effectuant une révolution pendant un temps T. Ayant obtenu une impulsion radiale de vitesse u il passe sur une orbite elliptique. Calculer la période de révolution sur l'orbite elliptique.

Rép. $T_1 = \dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$.

50.36. Un satellite se déplace suivant une orbite circulaire de rayon r effectuant une révolution pendant le temps T. Ayant reçu une impulsion tangentielle de vitesse u il passe sur une orbite elliptique. Calculer la période de révolution T_1 sur l'orbite elliptique.

Rép. $T_1 = \dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2-\dfrac{uT}{\pi r}\right]^{3/2}}$.

50.37. Un satellite se déplace autour de la Terre suivant une orbite circulaire de rayon r. Calculer l'impulsion radiale de vitesse qu'il faut donner au satellite pour qu'il passe sur une orbite elliptique de périgée r_1.

Rép. $u = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_1}} - \sqrt{\frac{r_1}{r}}\right)$.

50.38. Un vaisseau spatial se déplace à la vitesse $v = 30$ km/s suivant l'orbite de la Terre de rayon $r_1 = 150 \cdot 10^6$ km. Quelle impulsion tangentiel-

le de vitesse u faut-il lui donner pour qu'il atteigne l'orbite de Mars ($r_2 = 228 \cdot 10^6$ km) ou l'orbite de Vénus ($r_3 = 108 \cdot 10^6$ km) à l'aphélie de sa nouvelle orbite?

Rép. Pour atteindre l'orbite de Mars: $u = 2{,}95$ km/s; pour atteindre l'orbite de Vénus: $u = 2{,}55$ km/s.

50.39. Un satellite se déplace autour de la Terre suivant une orbite elliptique de périgée r_1 et d'apogée r_2. Calculer la valeur de l'accroissement tangentiel de la vitesse u au périgée, pour laquelle l'apogée croît de H.

$$\textit{Rép.}\quad u = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r_2+H}{r_1+r_2+H}} - \sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}\right).$$

50.40. Un vaisseau spatial, se déplaçant suivant une orbite circulaire de satellisation, doit quitter celle-ci en recevant une impulsion tangentielle et passer sur une orbite hyperbolique avec la valeur donnée de la vitesse à l'infini v_∞. Pour quelle valeur du rayon r_0 de l'orbite circulaire initiale la grandeur de l'impulsion nécessaire u sera-t-elle minimale?

$$\textit{Rép.}\quad r_0 = \frac{2\mu}{v_\infty^2}.$$

§ 51. Problèmes divers

51.1. Deux points libres de masses m_1 et m_2 se déplacent sous l'action des forces d'attraction réciproque. Déterminer la loi du mouvement du premier point par rapport au second.

Rép. Le mouvement relatif a lieu suivant les mêmes lois que le mouvement absolu de paramètre de gravitation $\mu = f(m_1 + m_2)$.

51.2. Quelle est la forme de la relation entre les périodes T_i de révolution des planètes autour du Soleil et les demi grands axes a_i de leurs orbites elliptiques si l'on tient compte du mouvement du Soleil dû à l'attraction de la planète correspondante?

Rép. $\dfrac{a_1^3}{T_1^2} : \dfrac{a_2^3}{T_2^2} = \dfrac{M+m_1}{M+m_2}$, où m_1, m_2, M sont respectivement les masses des planètes et du Soleil (comp. avec la réponse du problème 50.26).

51.3. Deux boules homogènes de masses m_1 et m_2 et de rayons R_1 et R_2 ont commencé à se mouvoir à partir de l'arrêt sous l'action des forces d'attraction réciproque. Déterminer la vitesse relative v_r de collision de ces boules si la distance initiale entre leurs centres était L.

$$\textit{Rép.}\quad v_r = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{L}\right)},\quad \text{où}\quad \mu = f(m_1+m_2).$$

51.4. Deux points de masses m_1 et m_2 ont commencé à se mouvoir à partir de l'arrêt sous l'action des forces d'attraction réciproque. Calculer le temps T au bout duquel les points se heurtent, si la distance initiale entre eux était L.

Rép. $T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2\mu}}$, où $\mu=f(m_1+m_2)$.

51.5. Deux points libres de masses m_1 et m_2 se déplacent sous l'action des forces d'attraction réciproque. Déterminer la loi du mouvement des points par rapport à leur centre des masses C.

Rép. Le mouvement relatif au centre des masses a lieu suivant les mêmes lois que le mouvement absolu dont les paramètres de gravitation sont:

$$\mu_1=f\,\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \text{ et } \mu_2=f\,\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}\,.$$

51.6. La projection d'une force centrale sur le rayon vecteur est $-\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$, où $\mu>0$ et ν sont des constantes quelconques. Déterminer la trajectoire du point mobile.

Rép. 1) $\nu<c^2$, $r=\frac{p}{1+e\cos k(\varphi-\varepsilon)}$, où $c=r^2\dot\varphi=\text{const}$, $p=\frac{c^2-\nu}{\mu}$,

$k^2=1-\frac{\nu}{c^2}$, e et ε étant des constantes arbitraires;

2) $\nu=c^2$, $\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c^2}\,\frac{\varphi^2}{2}+C_1\varphi+C_2$, C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration;

3) $\nu>c^2$, $r=\frac{p}{1+e\,\mathrm{ch}\,k(\varphi-\varepsilon)}$, où $p=-\frac{\nu-c^2}{\mu}$, $k^2=\frac{\nu}{c^2}-1$,

e et ε étant des constantes arbitraires.

51.7. Un vaisseau cosmique de masse m s'approche d'une planète suivant une droite passant par le centre de celle-ci. A quelle hauteur H de la surface de la planète faut-il actionner la rétrofusée pour que la force constante de freinage mT créée assure un atterrissage en douceur (à vitesse nulle)? La vitesse du vaisseau cosmique à l'instant d'allumage de la rétrofusée est v_0, le paramètre de gravitation de la planète μ, son rayon R; négliger l'attraction des autres corps célestes, la résistance de l'atmosphère et la variation de la masse de la rétrofusée.

Rép. $H=\frac{1}{2T}\left\{\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\right)^2-4\mu T}\right\}-R$,

on prend le signe plus si $T>\mu/R^2$ et le signe moins si $T<\mu/R^2$.

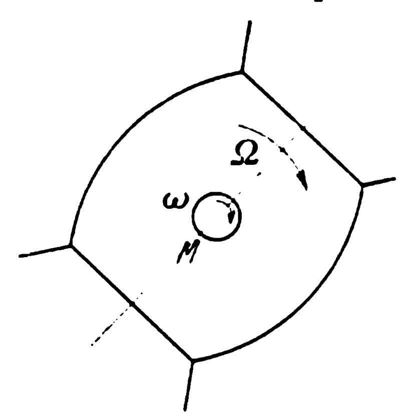
51.8. Déterminer le travail utile que doit fournir le moteur d'une fusée pour élever un vaisseau cosmique à une hauteur H au-dessus de la surface de la planète et lui communiquer à cette hauteur les vitesses cosmiques circulaire et parabolique. Le poids du vaisseau cosmique à la surface de la planète est G, le rayon de la planète est R; négliger la résistance atmosphérique.

Calculer ce travail pour la seconde vitesse cosmique pour la Terre, si le poids du vaisseau cosmique est de 5 t .

Rép. $A_1 = GR \dfrac{R+2H}{2(R+H)}$;

$A_2 = GR$, $A_2 = 31\,850$ tkm $= 31{,}85 \cdot 10^9$ kgfm.

51.9. Un appareil cosmique tourne avec la vitesse angulaire Ω_0. Calculer le travail total que doit effectuer le moteur du volant M pour arrêter sa rotation. Cette rotation a lieu autour d'un axe animé d'un mouvement de translation et passant par son centre des masses. L'axe de rotation du volant est confondu avec l'axe de rotation de l'appareil; J et J_0 sont les moments d'inertie du volant et de l'appareil (avec le volant) par rapport à l'axe commun de rotation.



Probl. 51.9

Rép. $A = \dfrac{1}{2} \dfrac{J_0(J_0-J)}{J} \Omega_0^2$.

51.10. Supposant que le stator de l'électromoteur du système décrit dans le problème précédent crée un couple moteur $M_{rot} = M_0 - \varkappa\omega$, où M_0 et $\varkappa$ sont des constantes positives, trouver la condition nécessaire pour que le freinage de la rotation de l'appareil cosmique soit accompli dans un intervalle de temps fini. Supposant cette condition remplie calculer le temps T de freinage. que

Rép. $M_0 > \alpha(J_0-J)\Omega_0$, $T = \dfrac{1}{\alpha} \operatorname{Log} \dfrac{M_0}{M_0 - \alpha(J_0-J)\Omega_0}$,

où $\alpha = \varkappa \dfrac{J_0}{J(J_0-J)}$.

51.11. Calculer sous quel angle ψ tournera l'appareil cosmique pendant le freinage de la rotation s'il est accompli par les procédés décrits dans les problèmes 51.9 et 51.10.

Rép. $\psi = \dfrac{\Omega_0}{\alpha} - \dfrac{M_0 - \alpha(J_0-J)\Omega_0}{\alpha^2(J_0-J)} \operatorname{Log} \dfrac{M_0}{M_0-\alpha(J_0-J)\Omega_0}$.

51.12. Pour faire tourner un appareil spatial on utilise un volant électromoteur dont l'équation du mouvement sur l'appareil en rotation est

$\dot{\omega}+\omega/T=u$, où ω est la vitesse angulaire relative du volant, T sa constante de temps, u la tension de commande prenant les valeurs $\pm u_0$.

Calculer la durée t_1 de l'accélération ($u=u_0$) et du freinage t_2 ($u=-u_0$) du volant, s'il faut faire tourner l'appareil sans rotation initiale, le volant étant fixe, d'un angle donné φ et l'arrêter. L'axe de rotation du volant passe par le centre des masses de l'appareil spatial; supposer le mouvement plan. Les moments d'inertie du volant et de l'appareil par rapport à l'axe commun de rotation sont respectivement J et J_0.

Rép. $t_1=\tau+T\,\text{Log}\,(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}})$;

$t_2=T\,\text{Log}\,(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}})$, où $\tau=\dfrac{J_0\varphi}{Ju_0T}$.

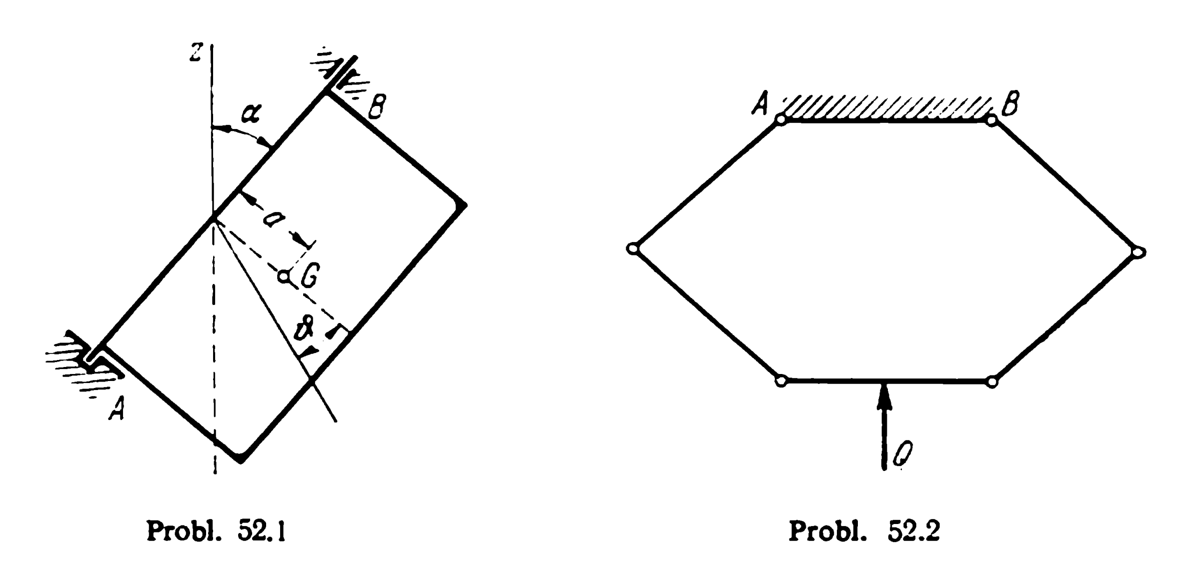
CHAPITPE XIII

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME. THÉORIE DES OSCILLATIONS, STABILITÉ DU MOUVEMENT

§ 52. Détermination des conditions d'équilibre d'un système. Stabilité de l'équilibre

52.1. L'axe de rotation AB d'une plaque rectangulaire est incliné sous un angle α par rapport à la verticale. Calculer le moment des forces M par rapport à l'axe AB qu'il faut appliquer à la plaque pour la faire tourner d'un angle ϑ. Le poids de la plaque est P; la distance du centre de gravité G de la plaque à l'axe AB est a.

Rép. $M = Pa \sin\alpha \sin\vartheta$.



Probl. 52.1 Probl. 52.2

52.2. Un hexagone articulé, composé de six éléments identiques homogènes de poids p chacun, est situé dans le plan vertical. Le côté supérieur AB de l'hexagone est fixé dans une position horizontale; les autres côtés sont disposés symétriquement par rapport à la verticale passant par le point médian de AB. Calculer la force verticale Q qu'il faut appliquer au milieu du côté horizontal opposé à AB pour que le système soit en équilibre indifférent.

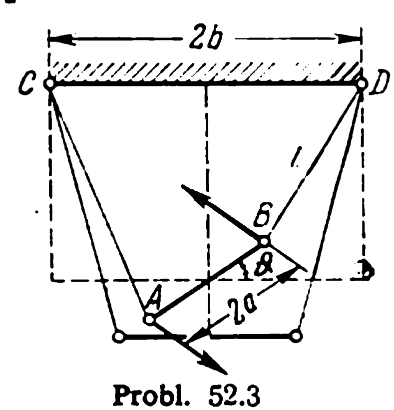
Rép. $Q = 3p$.

52.3. Un couple de moment M est appliqué à une barre homogène AB de longueur $2a$ et de poids Q suspendue à deux fils de longueur l chacun. La distance entre les points de suspension des fils, situés sur la même ho-

rizontale, est $2b$. Trouver l'angle ϑ déterminant la position d'équilibre de la barre.

Rép. Dans la position d'équilibre l'angle ϑ est défini par l'équation

$$M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\vartheta}{2}}=Qab\sin\vartheta.$$



Probl. 52.3

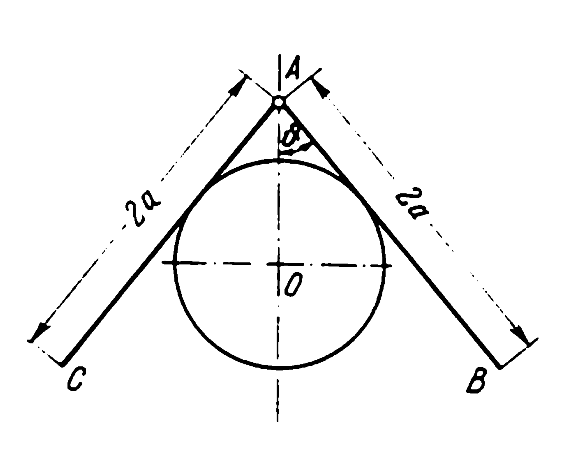
Probl. 52.4

52.4. L'extrémité inférieure A d'une barre rectiligne homogène AB de longueur $2l$ s'appuie sur un mur vertical et forme avec ce dernier un angle φ. La barre repose également sur un clou C parallèle au mur et situé à une distance a de ce dernier. Calculer l'angle φ pour la position d'équilibre de la barre.

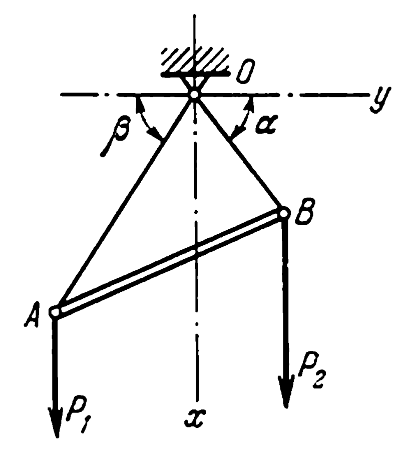
Rép. $\sin\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

52.5. Deux barres pesantes homogènes articulées en A s'appuient sur un cylindre lisse de rayon r. La longueur de chaque barre est $2a$. Calculer l'angle 2ϑ d'ouverture des barres correspondant à la position d'équilibre.

Rép. L'angle ϑ est défini par l'équation $a\,\mathrm{tg}^3\vartheta-r\,\mathrm{tg}^2\vartheta-r=0$.



Probl. 52.5



Probl. 52.6

52.6. Une barre non pesante de longueur l est suspendue à un fil inextensible de longueur L passant par une poulie infiniment petite. Deux char-

ges P_1 et P_2 sont fixées aux extrémités de cette barre. Déterminer les positions d'équilibre du système.

Rép. Dans une position d'équilibre $\alpha=\beta$ et $\frac{OA}{OB}=\frac{P_2}{P_1}$, dans une autre position d'équilibre $y_1=y_2=0$, $x_1=\frac{1}{2}(L+l)$, $x_2=\frac{1}{2}(L-l)$, et enfin dans une troisième position d'équilibre $y_1=y_2=0$, $x_1=\frac{1}{2}(L-l)$, $x_2=\frac{1}{2}(L+l)$.

52.7. Les extrémités d'une barre pesante homogène de longueur l peuvent glisser sans frottement sur une courbe d'équation $f(x, y)=0$. Déterminer la position d'équilibre de la barre. (L'axe des y est dirigé verticalement vers le haut, l'axe des x horizontalement vers la droite.)

Rép. Les coordonnées des extrémités de la barre correspondant aux positions d'équilibre sont les solutions du système:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0,\quad f(x_1, y_1)=0,\quad f(x_2, y_2)=0,$$

$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=(x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

52.8. Les extrémités d'une barre pesante homogène de longueur l peuvent glisser sans frottement sur la parabole $y=ax^2$. Déterminer les positions d'équilibre possibles. (L'axe des y est dirigé verticalement vers le haut, l'axe des x horizontalement vers la droite.)

Rép. La première position d'équilibre

$$x_2=-x_1=\frac{l}{2},\quad y_1=y_2=a\frac{l^2}{4};$$

la seconde position d'équilibre est définie de l'équation $\operatorname{ch}\xi=\sqrt{al}$ d'après les formules

$$x_1=-\frac{1}{2a}e^{-\xi},\quad y_1=\frac{1}{4a}e^{-2\xi},\quad x_2=\frac{1}{2a}e^{\xi},\quad y_2=\frac{1}{4a}e^{2\xi}.$$

52.9. Résoudre le problème 52.7 en supposant que la courbe est une ellipse $\left(f(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right)$ et que la longueur de la barre vérifie la condition $l<2a$. Déterminer les positions d'équilibre possibles.

Indication. Au lieu des coordonnées cartésiennes il importe d'introduire la coordonnée φ (l'anomalie excentrique) à l'aide des relations $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$.

Rép. Les positions d'équilibre correspondent aux valeurs des anomalies excentriques, définies par les équations:

a) $\varphi_1=2\pi-\varphi_2$, $\sin\varphi_2=\sqrt{\frac{l}{2b}}$ (elle existe pour $l\leqslant 2b$);

b) $\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\sqrt{\frac{l}{2a}}$, $\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{l}{2a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}}$ (elle existe pour $a>b$ et $l<2a$).

52.10. Une rondelle A peut glisser sans frottement sur un anneau lisse en fil de fer de rayon R situé dans le plan vertical, une charge de poids P étant suspendue à cette rondelle par un fil. Une autre charge Q est fixée à l'extrémité C d'un autre fil, passant sur une poulie infiniment petite B, située au bout du diamètre horizontal du grand anneau. Déterminer les positions d'équilibre de la rondelle A et étudier le caractère de leur stabilité.

Indication. Il faut définir la position de la rondelle A par l'angle $\varphi = \widehat{DOA}$. Etudier séparément l'équilibre de la rondelle sur les demi-circonférences supérieure et inférieure.

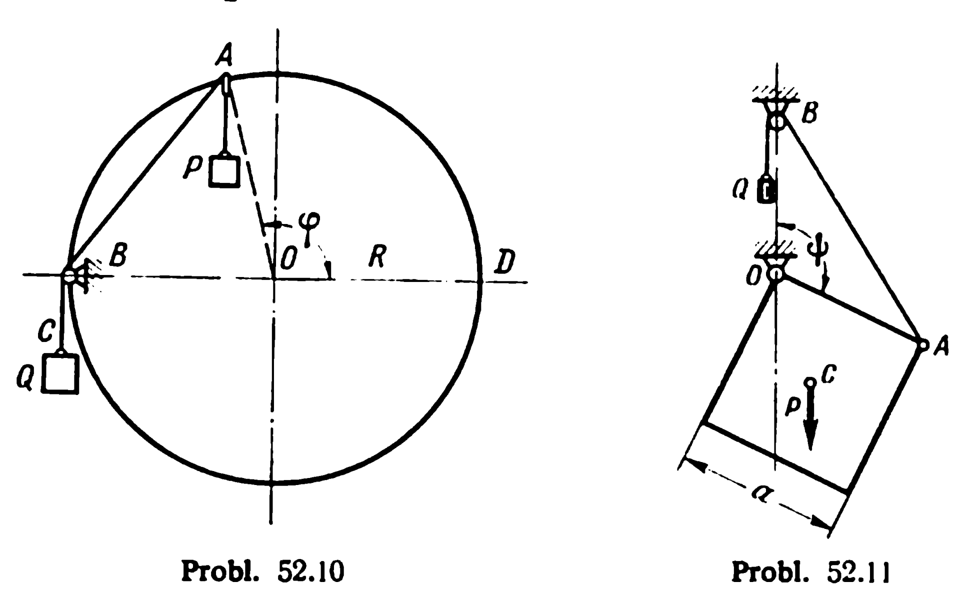
Rép. Sur la demi-circonférence supérieure $(0 < \varphi < \pi)$ il existe une position d'équilibre instable

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+8} - \frac{Q}{P}\right),$$ pour n'importe quelles valeurs de Q/P, de plus $0 < \varphi_0 < \pi/2$.

Sur la demi-circonférence inférieure $(\pi < \varphi < 2\pi)$ il existe une position d'équilibre stable

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+8} + \frac{Q}{P}\right),$$ pour $Q/P \leqslant 1$, de plus

$$\pi < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}.$$



Probl. 52.10 Probl. 52.11

52.11. Une plaque carrée homogène de poids P et de côté a peut tourner dans le plan vertical autour d'un axe passant par le sommet O; on attache au sommet A de la plaque un fil de longueur l passant sur une petite poulie B à une distance a suivant la verticale du point O. Un poids $Q = \frac{\sqrt{2}}{2} P$ est fixé à ce fil. Déterminer les positions d'équilibre du système et étudier leur stabilité.

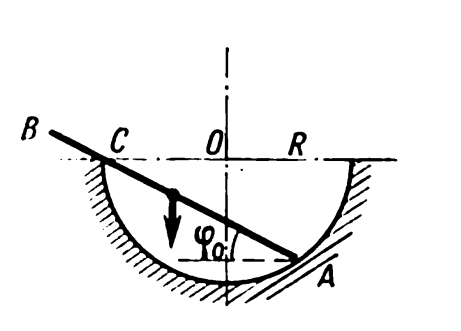
Rép. Les positions d'équilibre correspondent aux valeurs suivantes de l'angle ψ (cf. schéma): $\psi_1=\frac{\pi}{6}$, $\psi_2=\frac{\pi}{2}$, $\psi_3=\frac{3\pi}{2}$. La seconde et la troisième position d'équilibre sont stables.

52.12. Une barre pesante homogène AB de longueur $2a$ s'appuie sur une demi-circonférence de rayon R. Négligeant le frottement, déterminer la position d'équilibre et étudier sa stabilité.

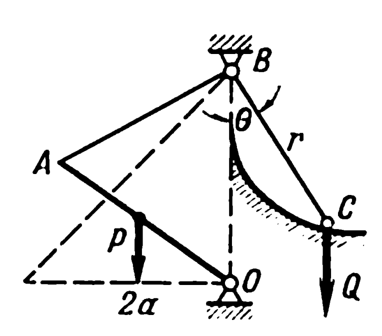
Rép. Dans la position d'équilibre la barre est inclinée par rapport à l'horizontale sous un angle φ_0 défini par l'équation

$$\cos\varphi_0=\frac{1}{8R}\left[a+\sqrt{a^2+32R^2}\right]$$

$\left(\text{on suppose que } \sqrt{\frac{2}{3}}\,R<a<2R\right)$. Cette position d'équilibre est stable.



Probl. 52.12



Probl. 52.13

52.13. Un pont-levis OA est schématisé (cf. figure) par une plaque homogène de poids P et de longueur $2a$. Un câble de longueur l passant sur une petite poulie située sur la verticale à une distance $2a$ au-dessus du point O est fixé au milieu du bord de la plaque. L'autre extrémité C du câble est reliée à un contrepoids glissant sans frottement sur un guide curviligne. Déterminer la forme de ce guide et le poids du contrepoids Q de sorte que le système soit en équilibre indifférent. Dans la position horizontale du pont-levis le contrepoids C se trouve sur la droite OB.

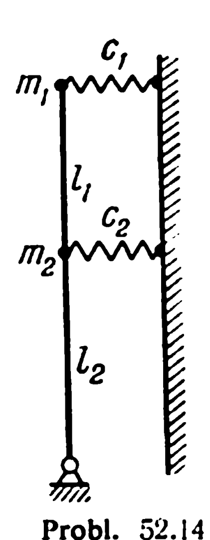
Rép. $Q=\frac{P}{\sqrt{2}}$; l'équation du guide en coordonnées polaires r, ϑ est:

$$r^2=2\,(l-2\sqrt{2}\,a\cos\vartheta)\,r+4\sqrt{2}\,al-l^2-8a^2.$$

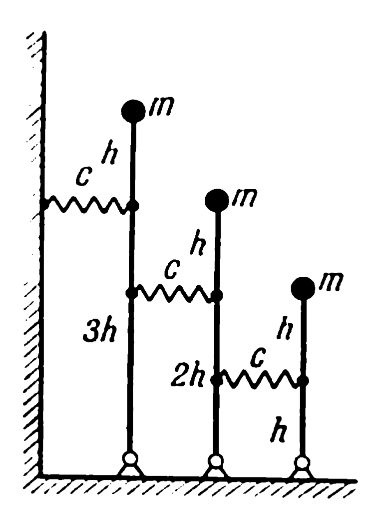
52.14. Etudier la stabilité de la position verticale d'équilibre d'un pendule double « inversé » (cf. schéma). Le pendule peut être schématisé sous la forme de deux points matériels de masses m_1 et m_2 reliés par des barres de longueurs l_1 et l_2. Dans la position verticale d'équilibre les ressorts (de rigidités c_1 et c_2) ne sont pas déformés.

Rép. Les conditions de stabilité sont:

$$c_1 l_1>m_1 g;\quad [(c_1+c_2)\,l_2-(m_1+m_2)\,g]\cdot[c_1 l_1-m_1 g]>c_1^2 l_1 l_2.$$



Probl. 52.14



Probl. 52.15

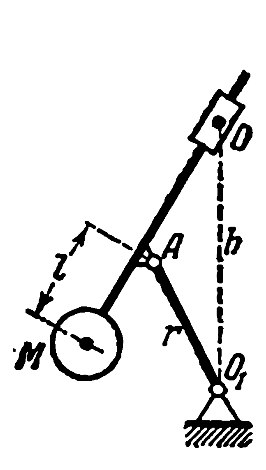
52.15. Etudier la stabilité de la position verticale d'équilibre d'un système de pendules (cf. schéma); la longueur de la barre du premier pendule est $4h$, du second $3h$ et du troisième $2h$. Les masses de tous les pendules et les rigidités des ressorts sont identiques et valent respectivement m et c. Les distances des points de fixation des ressorts aux centres de gravité sont égales à h. Négliger la masse des barres et assimiler les masses m à des points matériels; les ressorts ne sont pas déformés lorsque les pendules occupent la position verticale.

Rép. Les conditions de stabilité sont:

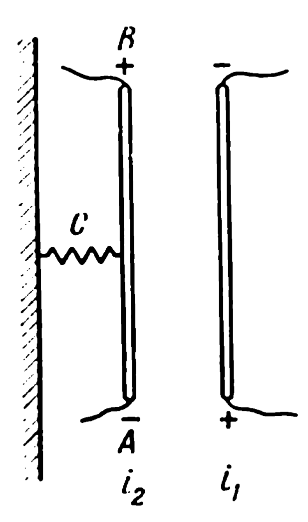
$$13\,ch^2 - 4\,mgh > 0;\quad 49\,c^2h^4 - 59\,mgch^3 + 12\,m^2g^2h^2 > 0;$$

$$36\,c^3h^6 - 153\,mgc^2h^5 + 130\,m^2g^2\,ch^4 - 24\,m^3g^3h^3 > 0.$$

52.16. Dans un pendule du pallographe la charge M est fixée à la barre OM passant librement à travers le cylindre tournant O et articulée au point A avec la bielle oscillante AO_1 de longueur r et d'axe O_1. La distance



Probl. 52.16



Probl. 52.17

du centre de gravité de la charge à l'articulation A est l; la distance $OO_1 = h$. Etudier la stabilité de la position verticale d'équilibre du pendule. Négliger les dimensions de la charge et les poids des barres.

Rép. Pour $\sqrt{rl} > h - r$ la position d'équilibre est stable;

pour $\sqrt{rl} < h - r$ elle est instable.

52.17. Un conducteur rectiligne parcouru par un courant d'intensité i_1 attire un conducteur AB qui lui est parallèle, parcouru par un courant d'intensité i_2. La masse du conducteur AB est m, il est relié à un ressort de rigidité c; la longueur de chacun des conducteurs est l. En l'absence du courant dans le conducteur AB, la distance entre les conducteurs est a. Déterminer les positions d'équilibre du système et étudier leur stabilité. (Voir fig. p. 451.)

Indication. La force d'interaction de deux conducteurs parallèles de longueur l parcourus par des courants d'intensités i_1 et i_2 et distants de d est définie par la formule

$$F = \frac{2i_1 i_2}{d}\, l.$$

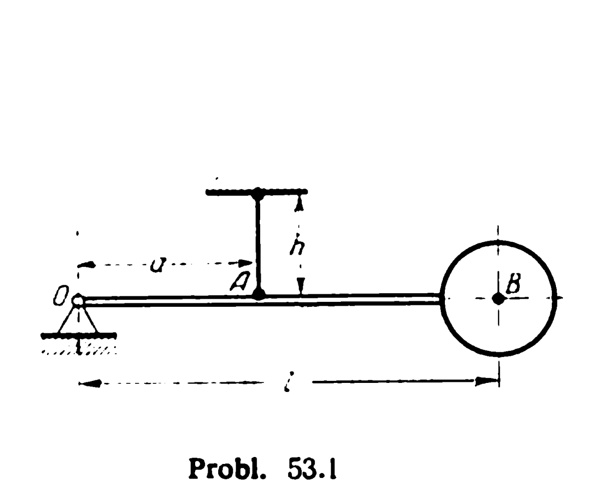
Rép. Pour $\alpha = \frac{2i_1 i_2 l}{c} < \frac{a^2}{4}$ on a deux positions d'équilibre:

$$x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha};$$

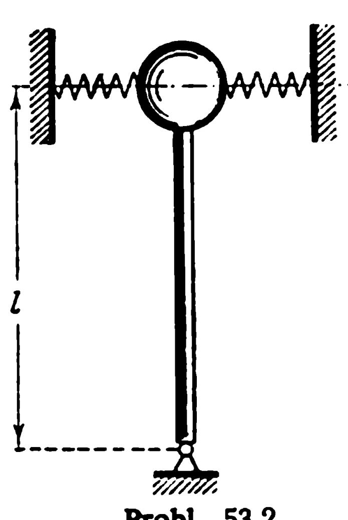
x_1 correspond à la position d'équilibre stable, x_2 à la position instable. Pour $\alpha > a^2/4$ il n'y a pas de positions d'équilibre. Pour $\alpha = a^2/4$ on a une seule position d'équilibre instable.

§ 53. Petites oscillations d'un système à un degré de liberté

53.1. Une barre rigide OB de longueur l peut osciller librement autour d'une articulation sphérique à son extrémité O et supporte une boule de poids Q à l'autre extrémité. La barre est maintenue en position horizontale par un fil vertical inextensible de longueur h; $OA = a$. Si on dévie



Probl. 53.1



Probl. 53.2

la boule perpendiculairement au plan du schéma et qu'on l'abandonne, le système commence à osciller. Négligeant la masse de la barre, déterminer la période des petites oscillations du système.

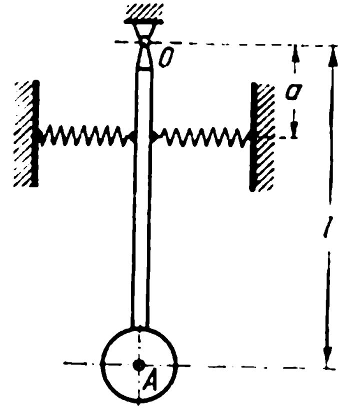
Rép. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{hl}{ag}}$.

53.2. Calculer la période des petites oscillations d'un pendule astatique utilisé dans certains sismographes. Le pendule est composé d'une barre rigide, de masse négligeable et de longueur l, supportant à son extrémité une masse m située entre deux ressorts horizontaux de rigidité c dont les extrémités sont fixées. Dans la position d'équilibre les ressorts ne sont pas déformés.

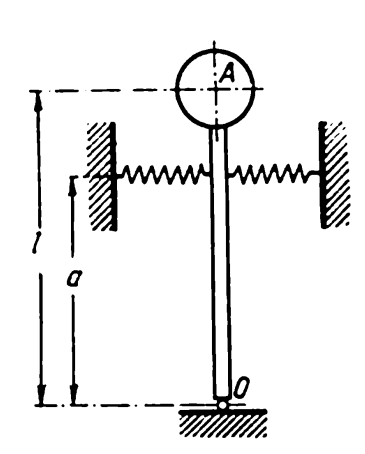
Rép. $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$.

53.3. Un pendule est composé d'une barre rigide de masse négligeable et de longueur l supportant à son extrémité une masse m. Deux ressorts de rigidité c sont attachés à cette barre à une distance a de son extrémité supérieure; les extrémités opposées des ressorts sont fixées. Déterminer la période des petites oscillations du pendule.

Rép. $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.



Probl. 53.3



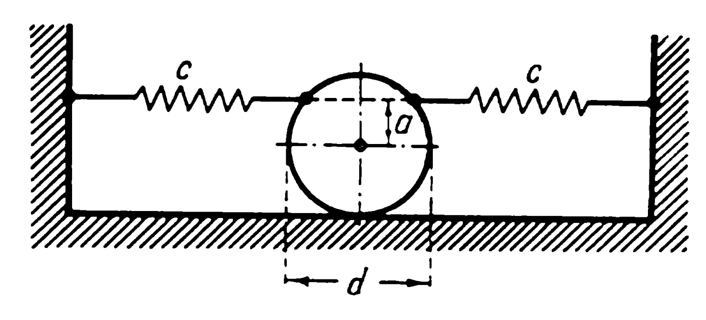
Probl. 53.4

53.4. Le pendule décrit dans le problème précédent est installé de manière à ce que la masse m soit située plus haut que le point de suspension. Trouver la condition pour laquelle la position verticale d'équilibre du pendule est stable et calculer la période de ses petites oscillations.

Rép. $a^2 > \dfrac{mgl}{2c}$; $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}}}$.

53.5. Un cylindre de diamètre d et de masse m peut rouler sans glissement sur un plan horizontal. Deux ressorts identiques de rigidité c sont fixés au milieu de sa longueur à une distance a de son axe, les extrémités opposées des ressorts étant fixées. Calculer la période des petites oscillations du cylindre.

Rép. $T = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{1+2\dfrac{a}{d}}\sqrt{\dfrac{m}{c}}.$

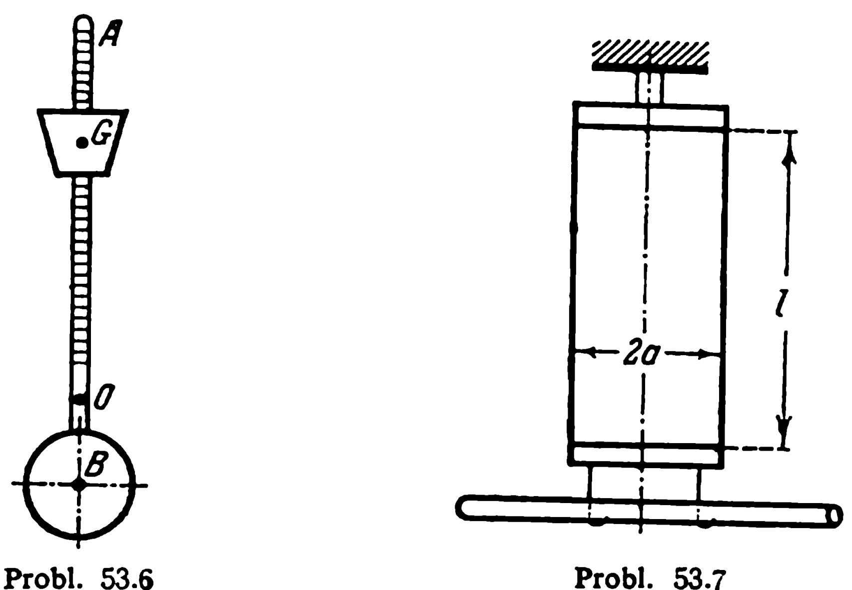


Probl. 53.5

53.6. Trouver la période des petites oscillations d'un métronome constitué par un pendule et par une charge supplémentaire mobile G de masse m. Le moment d'inertie du système entier par rapport à l'axe horizontal de rotation varie par déplacement de la charge mobile G. La masse du pendule est M; la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de rotation O est s_0; $OG=s$; le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation est J_0.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J_0+ms^2}{(Ms_0-ms)g}}.$

53.7. Un corps, suspendu par deux fils verticaux de longueur l chacun et distants de $2a$, est soumis à une torsion autour de l'axe vertical situé



Probl. 53.6 Probl. 53.7

dans le plan des fils, à égales distances de ces fils. Le rayon de giration du corps par rapport à l'axe de rotation est ρ. Calculer la période des petites oscillations.

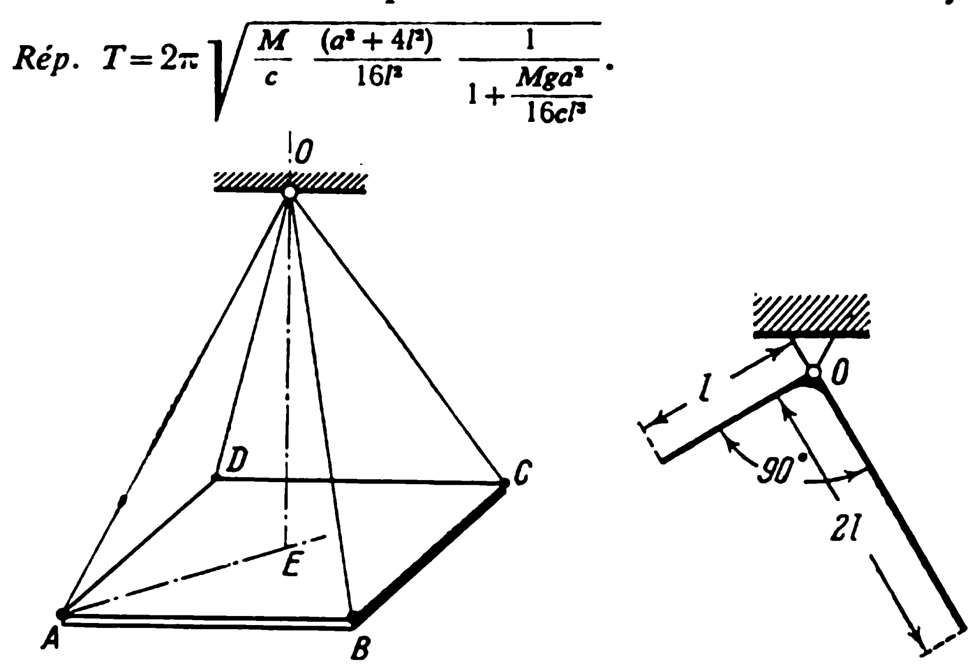
Rép. $T=2\pi\,\frac{\rho}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}.$

53.8. Un cerceau est suspendu à trois points fixes par trois fils identiques inextensibles de longueur l de manière à ce que le plan du cerceau soit horizontal. Dans sa position d'équilibre les fils sont verticaux et divisent la circonférence du cerceau en trois parties égales. Déterminer la période des petites oscillations du cerceau autour de l'axe passant par son centre.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$

53.9. Une plate-forme carrée pesante $ABCD$ de masse M est suspendue par quatre cordes élastiques, de rigidité c chacune, au point fixe O situé à une distance l (suivant la verticale) du centre E de la plate-forme dans la position d'équilibre de cette dernière. La longueur de la diagonale de la plate-forme est a. Calculer la période des oscillations verticales du système.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{M}{c}\,\frac{(a^2+4l^2)}{16l^2}\,\frac{1}{1+\frac{Mga^2}{16cl^3}}}.$



Probl. 53.9 Probl. 53.10

53.10. Une cornière composée de barres minces homogènes de longueurs l et $2l$, formant un angle droit, peut tourner autour du point O. Calculer la période des petites oscillations de la cornière autour de sa position d'équilibre.

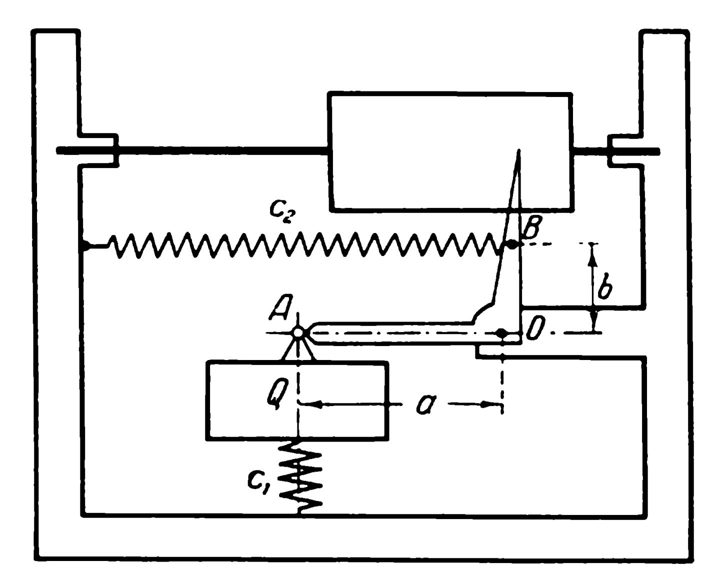
Rép. $T=2\pi\,\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\sqrt{17}}\sqrt{\frac{l}{g}}=7{,}53\sqrt{\frac{l}{g}}.$

53.11. Calculer la période des petites oscillations libres d'un pendule de poids Q dont l'axe de rotation forme un angle β avec le plan horizontal. Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation est J, la distance du centre de gravité à l'axe de rotation est s.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\beta}}$.

53.12. Dans un instrument destiné à enregistrer les oscillations verticales des fondements des machines le poids Q est fixé à un ressort vertical de rigidité c_1 et s'articule à une flèche statiquement équilibrée ayant la forme d'un levier coudé dont le moment d'inertie est J par rapport à l'axe de rotation O; la flèche est ramenée à la position d'équilibre par un ressort horizontal de rigidité c_2. Calculer la période des oscillations libres de la flèche autour de sa position verticale d'équilibre, si $OA=a$ et $OB=b$. Négliger les dimensions du poids et l'action de la tension initiale des ressorts.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Jg+Qa^2}{g(c_1a^2+c_2b^2)}}$.

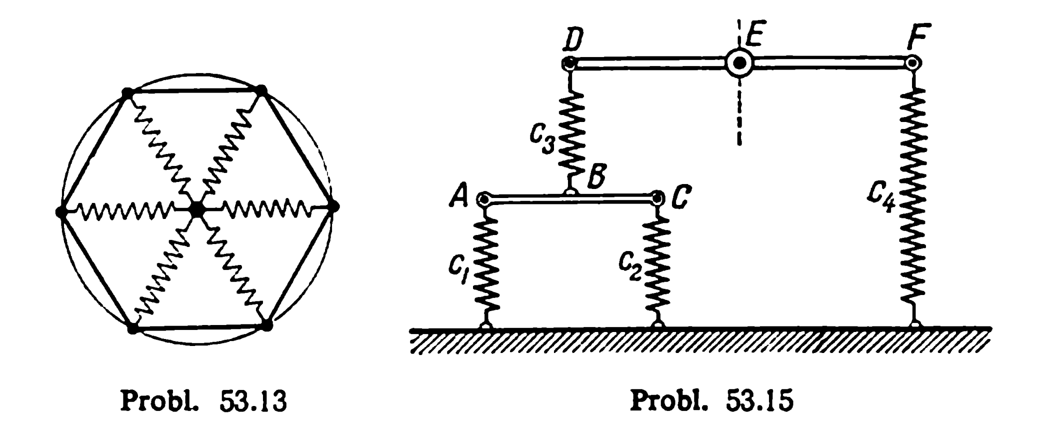


Probl. 53.12

53.13. Un dispositif amortisseur peut être schématisé par un point matériel de masse m, relié aux sommets d'un polygone régulier par n ressorts de rigidité c. La longueur de chaque ressort à l'état non déformé est a, le rayon de la circonférence circonscrite au polygone étant b. Déterminer la fréquence des oscillations libres horizontales du système situé dans le plan horizontal.

Indication. Pour calculer l'énergie potentielle, aux quantités du deuxième ordre près, il faut déterminer l'allongement des ressorts avec le même degré de précision.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{nc}{2m}\,\dfrac{2b-a}{b}}$.



Probl. 53.13 Probl. 53.15

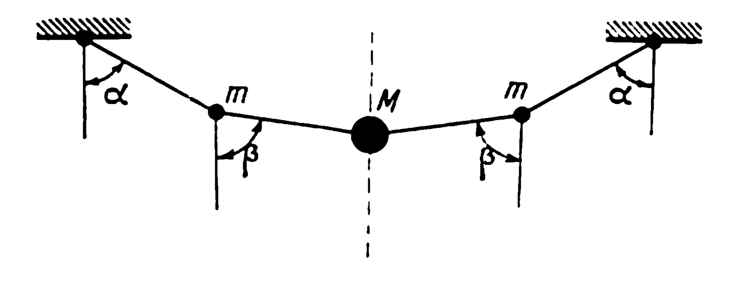
53.14. Calculer, d'après les données du problème précédent, la fréquence des oscillations perpendiculaires au plan du polygone. Négliger la pesanteur.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{nc\,(b-a)}{mb}}$.

53.15. Calculer la fréquence des petites oscillations verticales du point matériel E de masse m (cf. schéma); $AB=BC$ et $DE=EF$, les rigidités des ressorts sont c_1, c_2, c_3, c_4. Les barres AC et DF sont rigides et de masses négligeables.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{4}{m\left(\dfrac{1}{4c_1}+\dfrac{1}{4c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\dfrac{1}{c_4}\right)}}$.

53.16. Trois charges de masses m, M, m sont situées sur un fil inextensible de longueur $4a$. Le fil est suspendu symétriquement par ses extrémités de manière à ce que son tronçon initial et son tronçon final forment



Probl. 53.16

des angles α avec la verticale et ses tronçons moyens des angles β. La charge M effectue de petites oscillations verticales. Calculer la fréquence des oscillations libres verticales de la charge M.

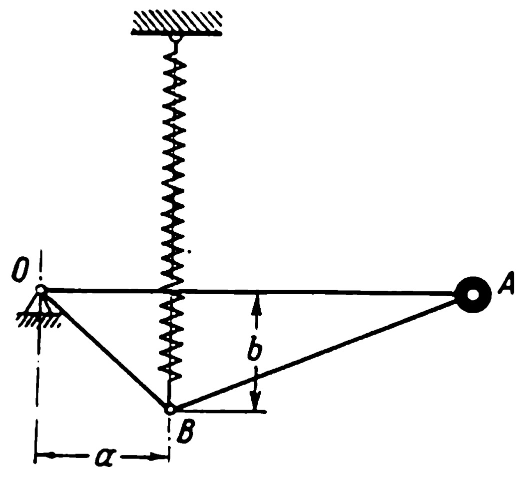
Rép. $k=\sqrt{\dfrac{g\,(\cos^2\beta\sin\beta+\cos^2\alpha\sin\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}}$;

de plus $2m=\dfrac{M\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

53.17. Un sismographe vertical de G. Golitsyne comporte un cadre AOB supportant une charge de poids Q. Le cadre peut tourner autour de l'axe horizontal O. Un ressort de rigidité c travaillant en traction est fixé au point B du cadre à une distance a du point O. Dans la position d'équilibre la barre OA est horizontale. Le moment d'inertie du cadre et de la charge par rapport à O est J, la hauteur du cadre b. Négligeant la masse du ressort et supposant que le centre de gravité de la charge et du cadre se trouve au point A à une distance l du point O, trouver la période des petites oscillations du pendule.

Rép. $k=\sqrt{\dfrac{ca^2-F_0 b\left(1-\dfrac{b}{L}\right)}{J}}$,

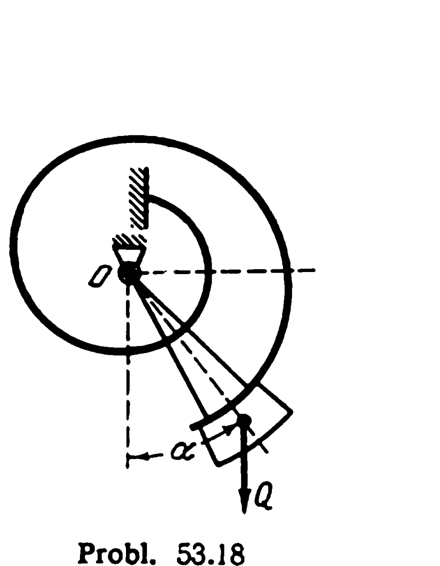
où $F_0=Q\dfrac{l}{a}$ est la tension du ressort dans la position d'équilibre, L étant la longueur du ressort dans cette position.



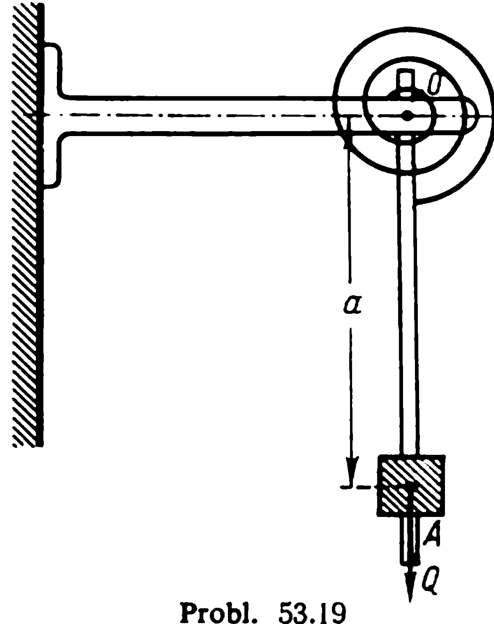
Probl. 53.17

53.18. Dans un vibrographe destiné à enregistrer des oscillations des fondements, des éléments de machines, etc., le pendule de poids Q est retenu sous un angle α par rapport à la verticale par un ressort spiral de rigidité c; le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation O est J; la distance du centre de gravité du pendule à l'axe de rotation est s. Calculer la période des oscillations libres du vibrographe.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\alpha+c}}$.



Probl. 53.18

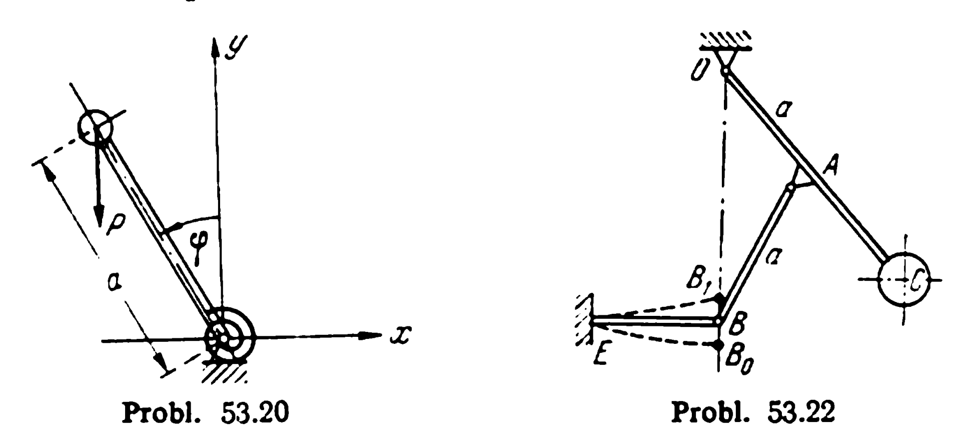


Probl. 53.19

53.19. Dans un vibrographe enregistreur des oscillations horizontales, le pendule OA, composé d'un levier et d'une charge, peut osciller autour de l'axe horizontal O autour de sa position verticale d'équilibre stable qu'il conserve grâce à la pesanteur et au ressort spiral. Sachant que le moment statique maximal du poids du pendule est $Qa=4{,}5$ kgf cm, le moment d'inertie par rapport à l'axe O $J=0{,}03$ kgf cm s² et la rigidité du ressort $c=$ $=4{,}5$ kgf/cm, calculer la période des oscillations propres du pendule pour de petites déviations.

Rép. $T=0{,}364$ s.

53.20. Déterminer la condition de stabilité de la position verticale supérieure d'un pendule de poids P, si sa rotation libre est empêchée par un ressort spiral de rigidité c. Dans la position verticale supérieure du pendule le ressort est non déformé. La distance de son centre de gravité au point de suspension est a.



Probl. 53.20 Probl. 53.22

Trouver aussi la période des petites oscillations du pendule, si son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est J_0.

Rép. $c>Pa$; $T=2\pi\sqrt{\frac{J_0}{c-Pa}}$.

53.21. Montrer que pour $c<Pa$ le pendule considéré dans le problème précédent aura au moins trois positions d'équilibre. Calculer aussi la période des petites oscillations.

Rép. Pour $\varphi=0$ la position d'équilibre est instable. La position d'équilibre est stable pour $\varphi=\varphi_0>0$, $\varphi=\varphi_0<0$, où φ_0 est la racine de l'équation $\sin\varphi=\frac{c}{Pa}\varphi$.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_0\varphi_0}{Pa\cos\varphi_0(\operatorname{tg}\varphi_0-\varphi_0)}}.$$

53.22. La barre OA d'un pendule est reliée au moyen d'une bielle AB à un petit ressort d'acier EB de rigidité c. A l'état non déformé le ressort occupe la position EB_1; on sait que pour amener le ressort à la position EB_0 correspondant à l'équilibre du pendule, il faut lui appliquer une force F_0 dirigée suivant OB; $OA=AB=a$; la masse des barres est négligeable; la

distance du centre de gravité du pendule à l'axe de rotation $OC=l$; son poids est Q. Pour obtenir le meilleur isochronisme (indépendance de la période des oscillations de l'angle de déviation initiale) le système est réglé de manière à ce que dans l'équation du mouvement du pendule

$$\ddot{\varphi}=f(\varphi)=-\beta\varphi+\ldots$$

le premier des termes négligés soit de l'ordre de φ^5. Etablir la relation qui doit alors avoir lieu entre les constantes Q, F_0, c, a, l et calculer la période des petites oscillations du pendule.

Rép. $Ql-2aF_0=12a^2c$; $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}$.

53.23. Montrer que dans les hypothèses du problème précédent l'accroissement de la période des oscillations lorsqu'on dévie le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\varphi_0=45°$ n'excède pas 0,4%. Quelle est, dans ces conditions, la variation de la période du pendule simple?

Rép. En conservant dans l'équation du mouvement le terme φ^5 on obtient

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2aF_0}{Ql}}}\left(1+\frac{\varphi_0^4}{96}\right);$$

pour le pendule simple la variation de la période pour une déviation d'un angle de 45° est de 4%.

53.24. Le pendule (cf. problème 53.22) est réglé de manière que $Ql=2aF_0$. Calculer la période de ses petites oscillations lorsqu'on le dévie de sa position d'équilibre d'un angle φ_0.

Rép. $T=\frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=5{,}24\,\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}$.

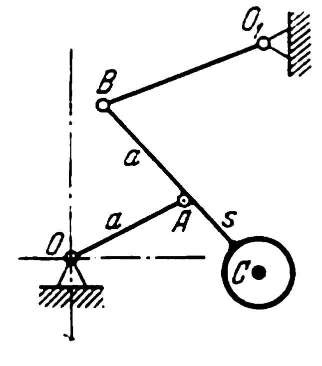
53.25. Dans le pendule du pallographe la charge M est suspendue à une barre passant librement à travers un cylindre tournant O et s'articulant au point A avec la bielle AO_1 oscillant elle-même autour de l'axe fixe O_1. Pour quelle condition la position verticale de la barre OM du pendule sera-t-elle stable? Calculer la période de ses petites oscillations autour de cette position. Négliger les dimensions de la charge et les poids des barres. (Les dimensions des barres sont indiquées sur le schéma du problème 52.16.)

Rép. $h-r<\sqrt{rl}$; $T=2\pi(h-r+l)\sqrt{\frac{r}{[rl-(h-r)^2]g}}$.

53.26. Négligeant les masses des barres, calculer la période des petites oscillations du pendule (cf. schéma). Le centre de gravité de la charge se trouve sur le prolongement de la bielle du quadrilatère articulé $OABO_1$

du mécanisme. Dans la position d'équilibre les barres OA et BC sont verticales, la barre O_1B est horizontale; $OA=AB=a$; $AC=s$.

Rép. $T=2\pi \frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$.



Probl. 53.26

53.27. Calculer la période des oscillations de la charge de poids P, suspendue à un ressort de rigidité c et de poids P_0, dont l'extrémité supérieure est fixe.

Rép. $T=2\pi \sqrt{\frac{P+\frac{1}{3}P_0}{cg}}$.

53.28: Un disque horizontal de moment d'inertie J par rapport à l'axe vertical passant par son centre est fixé en ce centre à l'extrémité inférieure d'une barre élastique, cylindrique et verticale dont l'extrémité supérieure est encastrée; le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe est J_0; la rigidité de la barre en torsion, autrement dit, le moment nécessaire pour tourner l'extrémité inférieure de la barre d'un radian, est égale à c. Calculer la période des oscillations du système.

Rép. $T=2\pi \sqrt{\frac{J+\frac{1}{3}J_0}{c}}$.

53.29. Une charge de poids Q est fixée au milieu d'une poutre reposant librement à ses extrémités; la longueur de la poutre est l, le moment d'inertie de la section droite est J, le module d'élasticité du matériau E. Calculer le nombre d'oscillations effectuées par la charge en 1 minute. Négliger le poids de la poutre.

Rép. $n=2\,080 \sqrt{\frac{EJ}{Ql^3}}$, l'unité de longueur étant le centimètre.

53.30. Une charge de poids Q est fixée au milieu d'une poutre de longueur l reposant librement à ses extrémités; le moment d'inertie de sa section droite est J, le module d'élasticité du matériau E, le poids de la poutre Q_1. Calculer (approximativement) le nombre d'oscillations libres effectuées par la charge en 1 minute.

Rép. $n=2\,080 \sqrt{\frac{EJ}{\left(Q+\frac{17}{35}\right)l^3}}$,

l'unité de longueur étant le centimètre.

53.31. Une poutre de section rectangulaire prenant appui à ses extrémités est chargée en son milieu par un poids $Q=600$ kgf. Le moment d'inertie de la section droite de la poutre $J=210$ cm^4, son poids spécifique linéique $q=11$ kgf/m, sa longueur $l=200$ cm; le module d'élasticité du matériau

de la poutre $E=2 \cdot 10^6$ kgf/cm². Calculer la fréquence des oscillations de la poutre en prenant sa masse en considération et en la négligeant.

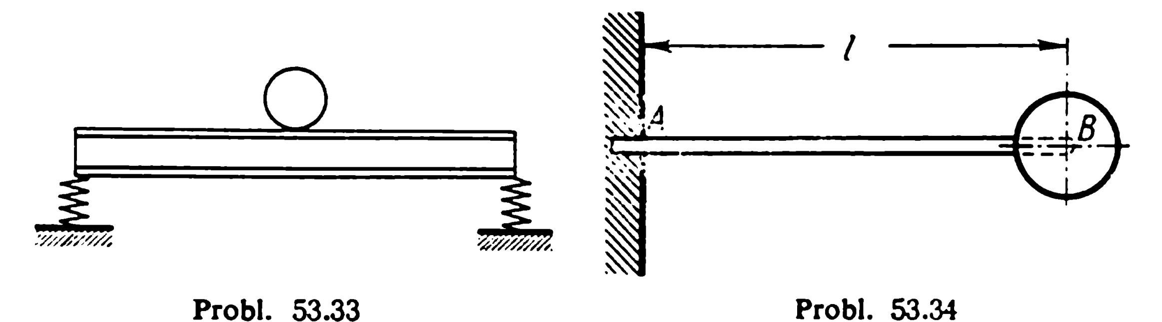
Rép. $k_1=63{,}4\ s^{-1}$; $k_2=64{,}0\ s^{-1}$.

53.32. Une poutre prenant appui à ses extrémités, de poids spécifique linéique $q=49$ kgf/m, de longueur $l=10$ m, dont le moment d'inertie de la section droite $J=8\,360$ cm⁴, est chargée en son milieu par un poids $Q=700$ kgf; le module d'élasticité de la poutre $E=2 \cdot 10^6$ kgf/cm². Calculer la fréquence de ses oscillations en prenant sa masse en considération et en la négligeant.

Rép. $k_1=4{,}56\ s^{-1}$; $k_2=5{,}34\ s^{-1}$.

53.33. Une poutre en double T, dont le moment d'inertie de la section droite $J=180$ cm⁴ et la longueur $l=4$ m, est posée sur deux ressorts d'appui identiques de rigidité $c=150$ kgf/cm; elle porte en son milieu un poids $Q=$ $=200$ kgf. Négligeant le poids de la poutre calculer la période des oscillations libres du système. Le module d'élasticité du matériau de la poutre $E=2 \cdot 10^6$ kgf/cm².

Rép. $T=0{,}238$ s.



Probl. 53.33 Probl. 53.34

53.34. Une charge de poids Q, fixée à l'extrémité B d'une barre horizontale AB de longueur l encastrée en son autre extrémité A, effectue des oscillations de période T. Le moment d'inertie de la section droite de la barre par rapport à l'axe central de la section perpendiculaire au plan des oscillations est J. Calculer le module d'élasticité du matériau de la barre.

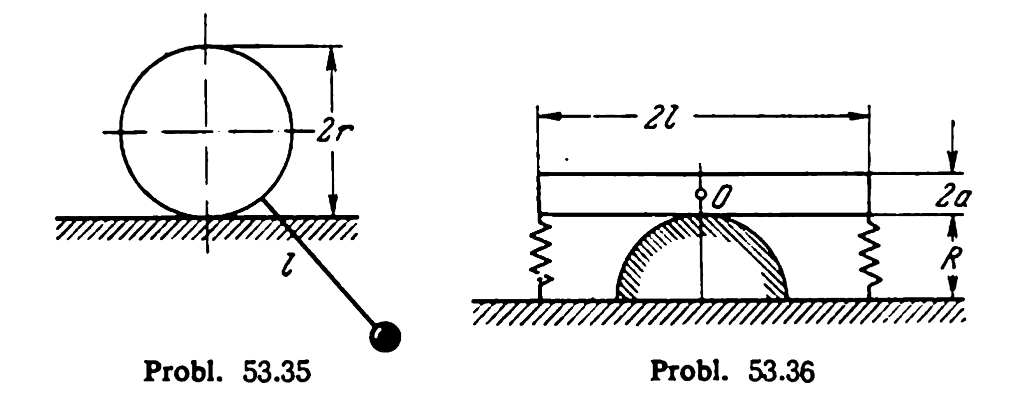
Rép. $E=\frac{4\pi^2 Ql^3}{3JgT^2}$.

53.35. Un disque de masse M et de rayon r peut rouler sans glissement sur une droite horizontale. Le disque est solidaire d'une barre non pesante de longueur l à l'extrémité de laquelle se trouve une masse ponctuelle m.

Calculer la période des petites oscillations du système.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\frac{3Mr^2+2ml^2}{2mg(r+l)}}$.

53.36. Une poutre prismatique de masse M et de section droite rectangulaire est posée sur un demi-cylindre circulaire rugueux de rayon R. L'axe longitudinal de la poutre est perpendiculaire à l'axe du cylindre, sa



Probl. 53.35 Probl. 53.36

longueur est $2l$, sa hauteur $2a$. Ses extrémités sont reliées au plancher par des ressorts de même rigidité c. Supposant que la poutre ne glisse pas sur le cylindre, calculer la période de ses petites oscillations. Le moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe transversal horizontal passant par le centre de gravité est J_0.

Rép. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{Ma^2+J_0}{Mg(R-a)+2cl^2}}$.

53.37. L'effilement du pic de la courbe de résonance d'un système à un degré de liberté en présence d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse est caractérisé par la largeur à demi-amplitude, c'est-à-dire par la différence entre deux fréquences pour lesquelles les amplitudes des oscillations sont égales à la demi-amplitude correspondant à la résonance. Exprimer la largeur à demi-amplitude de la courbe de résonance Δ en fonction du « coefficient d'accord » $z=\omega/k$ et du coefficient d'amortissement réduit $\delta=n/k$. Etablir la formule approchée pour le cas $\delta\ll 1$ (ω est la fréquence de la force perturbatrice, k celle des oscillations libres; dans le cas de résonance $z=1$).

Rép. La largeur à demi-amplitude de la courbe de résonance est égale à

$$\Delta=z_2-z_1=\sqrt{1-2\delta^2+2\delta\sqrt{3+\delta^2}}-\sqrt{1-2\delta^2-2\delta\sqrt{3+\delta^2}}$$

ou, si $\delta\ll 1$, $\Delta\approx 2\sqrt{3}\delta$.

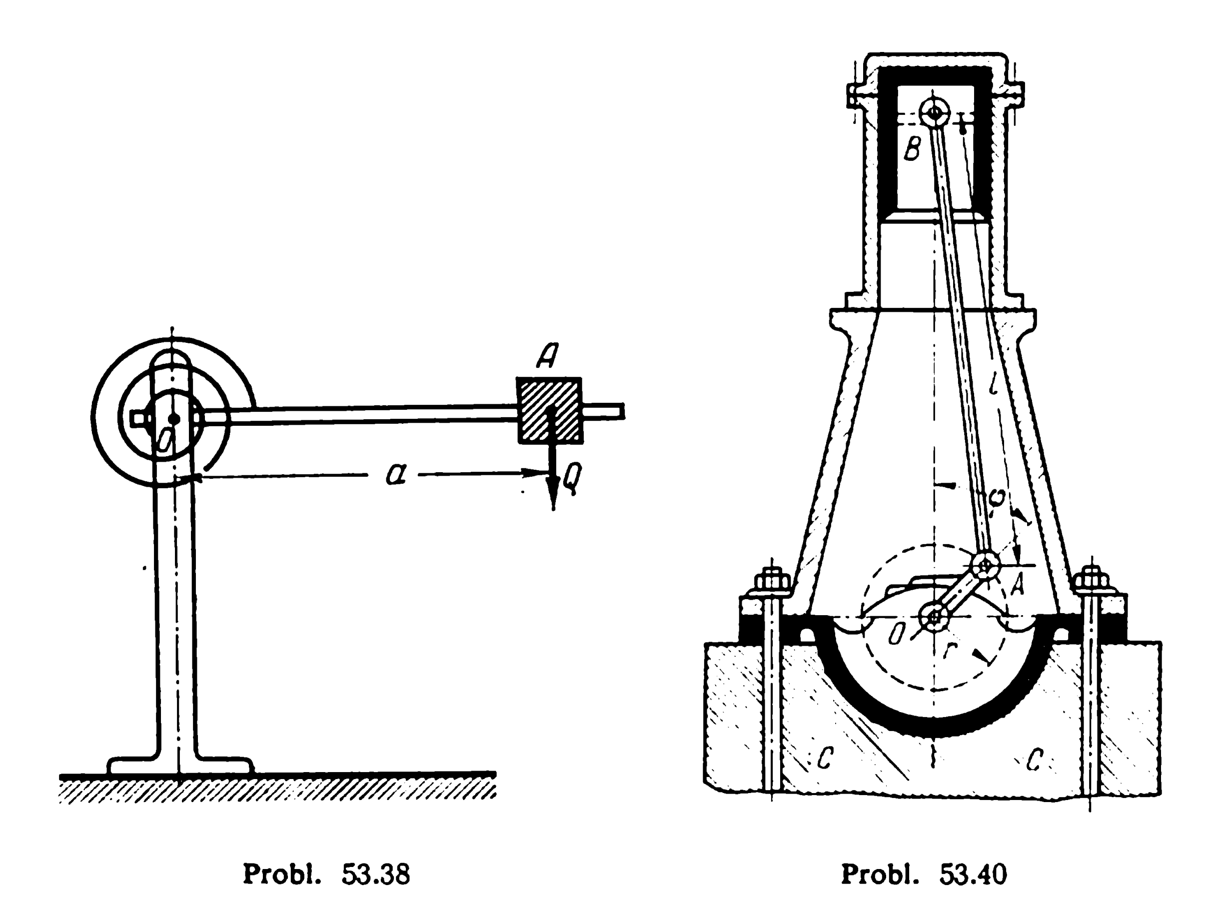
53.38. Dans un vibrographe utilisé pour enregistrer des oscillations verticales, la barre OA, reliée au stylo d'enregistrement de l'instrument, peut tourner autour de l'axe horizontal O. La barre OA porte en son extrémité A une charge Q; elle est maintenue dans la position horizontale d'équilibre par un ressort spiral. Déterminer le mouvement relatif de la barre OA, si le vibrographe est fixé sur un fondement effectuant des oscillations verticales suivant la loi $z=2\sin 25t$ mm. La rigidité du ressort $c=0{,}1$ kgf/cm, le moment d'inertie de la barre OA avec la charge Q par rapport au point O est $J=0{,}4$ kgf cm s^2, $Qa=10$ kgf cm.

Négliger les oscillations propres de la barre.

Rép. $\varphi=0{,}005\,1\sin 25t$.

53.39. La barre du vibrographe décrit dans le problème 53.38 est munie d'un frein électromagnétique formé d'une plaque en aluminium oscillant entre les pôles d'aimants fixes. Les courants de Foucault apparaissant dans la plaque créent une force de freinage proportionnelle au premier degré de la vitesse de son mouvement et poussée à la limite d'apériodicité. Déterminer les oscillations forcées du stylo de l'instrument, si ce dernier est fixé à un fondement effectuant des oscillations verticales suivant la loi $z = h \sin pt$.

Rép. $x = a\varphi = \dfrac{Qah}{Jg\left[1 + \dfrac{c}{Jp^2}\right]} \sin(pt - \varepsilon)$; $\operatorname{tg} \varepsilon = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{J}{c}}\,p}{1 - \dfrac{J}{c}p^2}$.



Probl. 53.38 Probl. 53.40

53.40. Un moteur vertical de poids Q est fixé à un fondement dont l'aire de la base est S; la rigidité spécifique du sol est λ. La longueur de la manivelle du moteur est r, celle de la bielle est l, la vitesse angulaire de l'arbre est ω, le poids du piston et des parties non équilibrées effectuant un mouvement de translation alterné est P, le poids du fondement est G; supposer que la manivelle est équilibrée à l'aide d'un contrepoids. Négliger la masse de la bielle. Déterminer les oscillations forcées du fondement.

Indication. Négliger dans les calculs tous les termes contenant les puissances du rapport r/l supérieures à la première.

Rép. Le déplacement du centre de gravité du fondement par rapport à la position d'équilibre

$$\xi = \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-\omega^2)} \cos \omega t + \frac{r}{l} \frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-4\omega^2)} \cos 2\omega t,$$

où

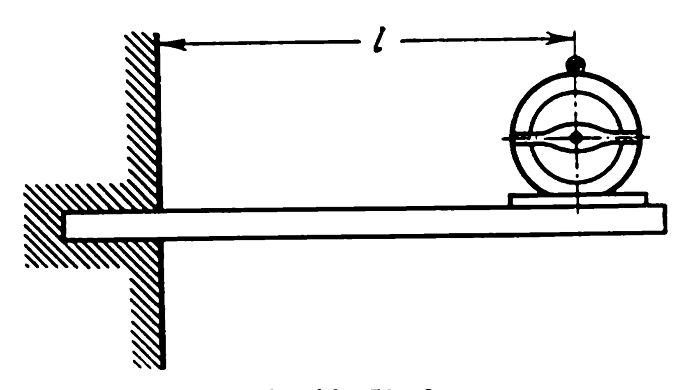
$$k = \sqrt{\frac{\lambda S g}{Q+G}}\ .$$

53.41. Calculer le poids du fondement d'un moteur vertical de 10 t de sorte que l'amplitude des oscillations forcées verticales du fondement n'excède pas 0,25 mm. L'aire de la base du fondement $S=100$ m², la rigidité spécifique du sol sous le fondement $\lambda=50$ t/m³. La longueur de la manivelle du moteur $r=30$ cm, celle de la bielle $l=180$ cm, la vitesse angulaire de l'arbre $\omega=240$ tr/mn, le poids du piston et des autres parties non équilibrées effectuant un mouvement de translation alterné $P=250$ kgf; supposer que la manivelle est équilibrée à l'aide d'un contrepoids. Négliger la masse de la bielle.

Indication. Utiliser le résultat obtenu dans le problème précédent et se borner à la solution approchée en négligeant le terme renfermant r/l. Vérifier la légitimité de cette approximation.

Rép. $G=366{,}6$ t.

53.42. Un moteur électrique de poids $Q=1\,200$ kgf est installé sur les extrémités libres de deux poutres horizontales parallèles encastrées dans un mur. La distance de l'axe du moteur au mur $l=1{,}5$ m. Le rotor du moteur tourne à la vitesse $n=1\,500$ tr/mn, le poids du rotor $p=200$ kgf, son



Probl. 53.42

centre de gravité est à 0,05 mm de l'axe de l'arbre. Le module d'élasticité du matériau des poutres $E=2\cdot10^6$ kgf/cm² (acier doux). Calculer le moment d'inertie de la section droite pour lequel l'amplitude des oscillations forcées n'excède pas 0,5 mm. Négliger le poids des poutres.

Rép. $J=8\,740$ cm⁴ ou $J=8\,480$ cm⁴.

53.43. Un mécanisme à came actionnant une soupape peut être schématisé par une masse m fixée d'une part à l'aide d'un ressort de rigidité c à un point immobile et encaissant d'autre part, par l'intermédiaire d'un ressort de rigidité c_1, le mouvement de translation de la came dont le profil est tel que le déplacement vertical est donné par les formules

$$x_1 = a[1-\cos\omega t] \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega},$$

$$x_2 = 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad t > \frac{2\pi}{\omega}.$$

Déterminer le mouvement de la masse m.

Rép. Pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega}$

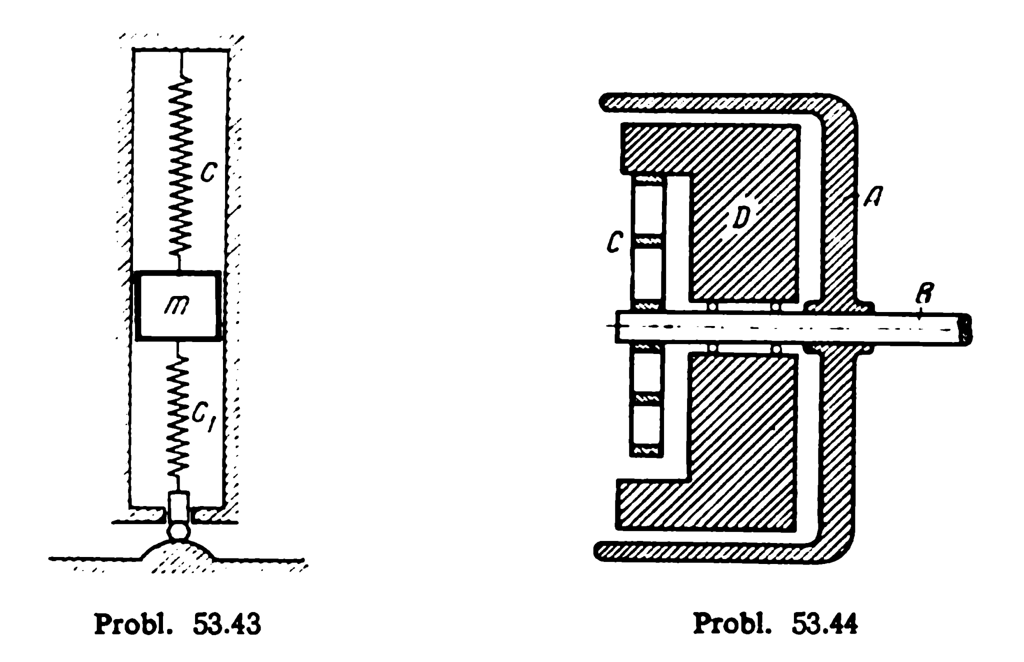
$$x = \frac{c_1 a}{m(k^2-\omega^2)}[\cos kt - \cos\omega t] + \frac{c_1 a}{mk^2}[1-\cos kt],$$

où

$$k = \sqrt{\frac{c+c_1}{m}}.$$

Pour $t > \frac{2\pi}{\omega}$ la charge effectue des oscillations libres:

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2-\omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$



Probl. 53.43 Probl. 53.44

53.44. Pour enregistrer des oscillations de torsion on utilise un torsiographe qui est composé d'une poulie légère en aluminium A montée sur un arbre B et d'un volant lourd D pouvant tourner librement par rapport

à cet arbre. L'arbre est relié au volant D par l'intermédiaire d'un ressort spiral de rigidité c et tourne suivant la loi

$$\varphi=\omega t+\varphi_0 \sin \omega t$$

(une rotation uniforme avec superposition d'oscillations harmoniques). Le moment d'inertie du volant par rapport à l'axe de rotation est J.

Etudier les oscillations forcées du volant du torsiographe.

Rép. L'angle de rotation relative du volant

$$\psi=\frac{\varphi_0\omega^2}{\frac{c}{J}-\omega^2}\sin \omega t.$$

53.45. Pour amortir les oscillations du vilebrequin d'un moteur d'avion on pratique dans le contrepoids du vilebrequin une rainure en forme d'arc de rayon r, le centre étant déplacé de $AB=l$ de l'axe de rotation; un contrepoids supplémentaire schématisé par un point matériel se déplace librement dans la rainure. La vitesse angulaire de rotation de l'arbre est ω. Négligeant l'effet de la pesanteur, calculer la fréquence des petites oscillations du contrepoids supplémentaire.

Rép. $k=\omega\sqrt{\frac{l}{r}}$.

Probl. 53.45

53.46. Une force constante F est appliquée à l'instant initial à un poids P suspendu à un ressort de rigidité c. Cette force cesse d'agir après un temps τ. Déterminer le mouvement du poids.

Rép. Pour $0\leqslant t\leqslant\tau$,

$$x=\frac{F}{c}\left[1-\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right];$$

pour $\tau\leqslant t$,

$$x=\frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,(t-\tau)-\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right].$$

53.47. Déterminer la déviation maximale par rapport à la position d'équilibre du système décrit dans le problème précédent lorsque la durée d'action de la force est: 1) $\tau=0$, $\lim\limits_{\tau\to 0} F\tau=S$ (choc); 2) $\tau=T/4$; 3) $\tau=T/2$, où T est la période des oscillations libres du système.

Rép. 1) $x_{max}=\sqrt{\frac{g}{cP}}\,S$;

2) $x_{max}=\sqrt{2}\,\frac{F}{c}=\sqrt{2}\,x_{st}$;

3) $x_{max}=2\,\frac{F}{c}=2\,x_{st}$.

53.48. Trouver la loi du mouvement d'un pendule constitué par un point matériel suspendu à un fil inextensible de longueur l. Le point de suspension du pendule se déplace suivant une loi donnée $\xi=\xi(t)$ sur une droite horizontale.

Rép. L'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale φ varie selon la loi

$$\varphi=c_1 \sin kt+c_2 \cos kt-\frac{\xi(t)}{l}+\frac{k}{l}\int_0^t \xi(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau,$$

où $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$.

53.49. Une force perturbatrice donnée par les conditions:

$$F=0 \quad \text{pour } t<0,$$

$$F=\frac{t}{\tau}F_0 \quad \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\tau,$$

$$F=F_0 \quad \text{pour } t>\tau$$

agit sur un point matériel de poids P suspendu à un ressort de rigidité c. Déterminer le mouvement du point et trouver l'amplitude des oscillations pour $t>\tau$.

Rép. $x=\frac{F_0}{c}\left[1-\frac{2}{k\tau}\cos k\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{k\tau}{2}\right]$;

$$k=\sqrt{\frac{cg}{P}};\quad A=\frac{2F_0}{kc\tau}\sin\frac{k\tau}{2}.$$

53.50. Un poids P suspendu à un ressort de rigidité c est soumis à l'action d'une force perturbatrice variant suivant la loi $Q(t)=F|\sin\omega t|$. Déterminer les oscillations du système de fréquence égale à celle de la force perturbatrice.

Rép. Pour $0<t<\pi/\omega$

$$x=\frac{F\omega}{mk(\omega^2-k^2)}\left[\sin kt+\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2\omega}\cos kt\right]-\frac{F}{m(\omega^2-k^2)}\sin\omega t;$$

$$k=\sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

53.51. Calculer la vitesse angulaire critique (par rapport aux oscillations transversales) d'un arbre léger supportant en son milieu un disque de poids P. Considérer les cas suivants: 1) les deux extrémités de l'arbre reposent sur de longs paliers (les extrémités sont supposées encastrées); 2) l'une des extrémités de l'arbre repose sur un palier long (est encastrée) et l'autre sur un palier court (repose librement). La rigidité de l'arbre à la flexion est EJ, sa longueur est l.

Rép. 1) $\omega_{cr}=\sqrt{\frac{192\,EJg}{Pl^3}}$; 2) $\omega_{cr}=\sqrt{\frac{768\,EJg}{7Pl^3}}$.

53.52. Calculer la vitesse critique de rotation d'un arbre léger de longueur l, si l'arbre est posé sur deux paliers courts; sa partie saillante de longueur a porte un disque de poids P. La rigidité de l'arbre à la flexion est EJ.

Rép. $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{3EJg}{Pla^2}}$.

53.53. Calculer la vitesse critique de rotation d'un arbre lourd dont l'une des extrémités est posée sur un palier court et l'autre sur un palier long. La longueur de l'arbre est l, sa rigidité à la flexion EJ, son poids spécifique linéique q.

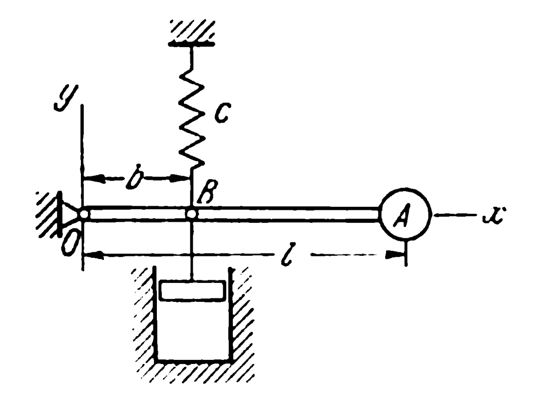
Rép. $\omega_{cr} = 15{,}4\sqrt{\frac{EJg}{ql^4}}$.

53.54. Ecrire l'équation différentielle des petites oscillations du point A, de poids P, situé à l'extrémité d'une barre non pesante de longueur l articulée en O. La résistance du milieu est proportionnelle au premier degré de la vitesse, le coefficient de proportionnalité étant α. Calculer la fréquence des oscillations amorties. La rigidité du ressort est c, la distance $OB=b$. La masse de la barre est négligeable. Dans la position d'équilibre la barre est horizontale. Calculer la valeur du coefficient α pour laquelle le mouvement est apériodique.

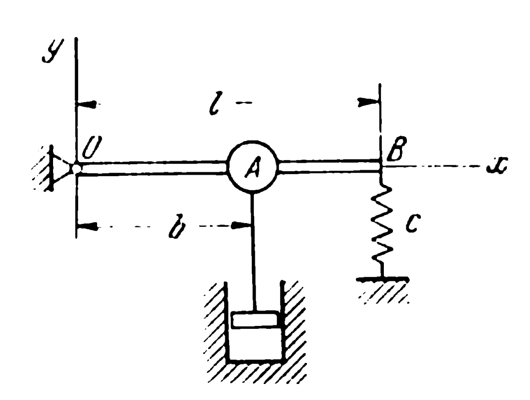
Rép. 1) $\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y} + c\frac{b^2}{l^2}y = 0$;

2) $k = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}$ s^{-1};

3) $\alpha \geqslant \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.



Probl. 53.54



Probl. 53.55

53.55. Ecrire l'équation différentielle des petites oscillations du point matériel A et calculer la fréquence des oscillations amorties. Le poids du point A est P, la rigidité du ressort c, les distances $OA=b$, $OB=l$. La résistance du milieu est proportionnelle au premier degré de la vitesse, le coefficient de proportionnalité étant α. La masse de la barre OB articulée en O est négligeable. Dans la position d'équilibre la barre est horizontale.

Calculer la valeur du coefficient α pour laquelle le mouvement est apériodique.

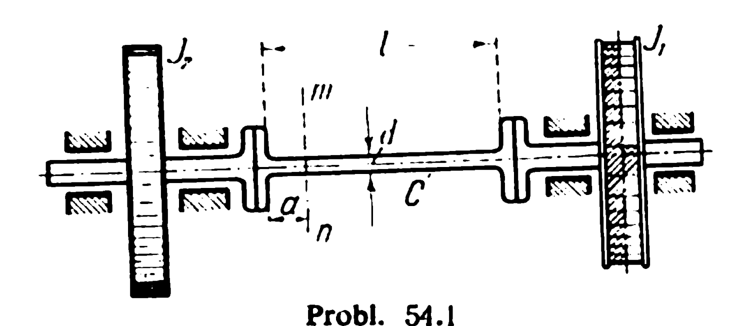
Rép. 1) $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\frac{cl^2}{b^2}y=0$;

2) $k_1=\sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2}-\frac{\alpha^2g^2}{4P^2}}$ s^{-1};

3) $\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

§ 54. Petites oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté

54.1. Pour étudier expérimentalement le réglage des turbines hydrauliques on a construit un dispositif composé d'une turbine, dont le moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation $J_1=5$ kgf cm s^2, d'un volant de moment d'inertie $J_2=150$ kgf cm s^2 et d'un arbre élastique C reliant le rotor de la turbine au volant; la longueur de l'arbre $l=1\ 552$ mm, son diamètre $d=25{,}4$ mm; le module d'élasticité transversal de l'arbre $G=$ $=880\ 000$ kgf/cm^2.



Probl. 54.1

Négligeant la masse de l'arbre et la torsion de ses tronçons épais, trouver la section mn de l'arbre qui reste fixe (section nodale) lors des oscillations libres du système considéré, et calculer la période T de ces oscillations.

Rép. $a=50$ mm; $T=0{,}09$ s.

54.2. Calculer les fréquences des oscillations libres de torsion d'un système composé d'un arbre fixé à l'une de ses extrémités et des disques homogènes montés en son milieu et à son autre extrémité. Le moment d'inertie de chaque disque par rapport à l'axe de l'arbre est J; la rigidité des tronçons de l'arbre à la torsion $c_1=c_2=c$. Négliger la masse de l'arbre.

Rép. $k_1=0{,}62\sqrt{\frac{c}{J}}$; $k_2=1{,}62\sqrt{\frac{c}{J}}$.

54.3. Calculer les fréquences fondamentales des oscillations de torsion d'un système composé d'un arbre et de trois disques identiques. Deux d'entre eux sont fixés aux extrémités de l'arbre, le troisième en son milieu.

Le moment d'inertie de chaque disque par rapport à l'axe de l'arbre est J; la rigidité des tronçons de l'arbre à la torsion $c_1 = c_2 = c$. Négliger sa masse.

Rép. $k_1 = \sqrt{\frac{c}{J}}$; $k_2 = \sqrt{3\frac{c}{J}}$.

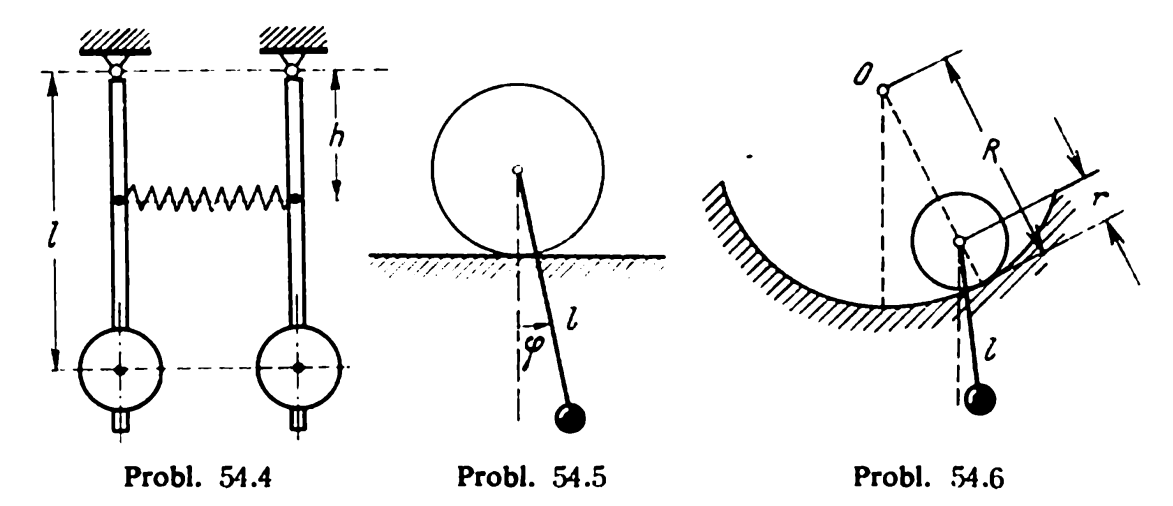
54.4. Deux pendules identiques de longueur l et de masse m chacun sont reliés à une distance h des axes de suspension par un ressort de rigidité c. Déterminer les petites oscillations du système dans le plan de la position d'équilibre des pendules, si on a dévié l'un des pendules de sa position d'équilibre d'un angle α; les vitesses initiales des pendules sont nulles. Négliger les masses des barres et du ressort.

Rép. $\varphi_1 = \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_2 - k_1}{2} t$,

$\varphi_2 = \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t$.

où φ_1 et φ_2 sont les déviations des pendules de la verticale et

$k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}$.



Probl. 54.4 Probl. 54.5 Probl. 54.6

54.5. Un disque de masse M roule sans glisser sur un rail rectiligne. Une barre non pesante de longueur l portant à son extrémité une masse ponctuelle m est articulée au centre de ce disque. Calculer la période des petites oscillations du pendule.

Rép. $T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{3M + 2m} \frac{l}{g}}$.

54.6. Remplaçant dans le problème précédent le rail rectiligne par un arc de circonférence de rayon R, calculer les fréquences des petites oscillations du système considéré.

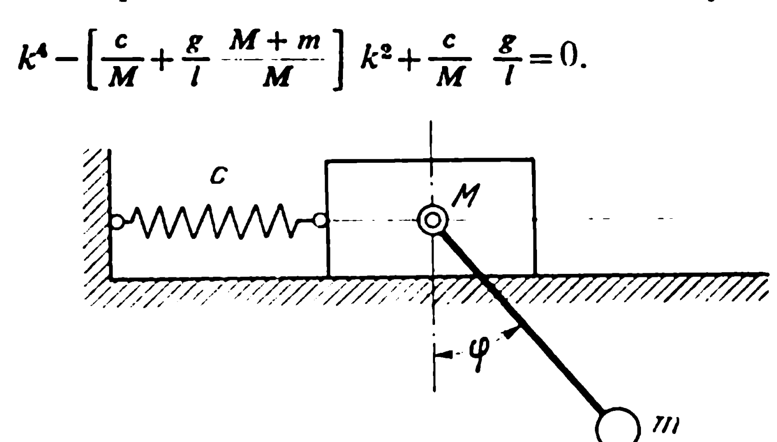
Rép. Les fréquences fondamentales sont les racines de l'équation

$$\frac{3M}{3M + 2m} k^4 - \left[\frac{2(M+m)g}{(3M+2m)(R-r)} + \frac{g}{l}\right] k^2 + \frac{2(M+m)g^2}{(3M+2m)(R-r)l} = 0.$$

54.7. Un pendule est composé d'un coulisseau de masse M glissant sans frottement sur un plan horizontal et d'une bille de masse m reliée au coulisseau par une barre de longueur l pouvant tourner autour d'un axe relié au coulisseau. Le coulisseau est relié à un ressort de rigidité c dont l'autre extrémité est fixe. Déterminer les fréquences des petites oscillations du système.

Rép. Les fréquences cherchées sont les racines de l'équation

$$k^4-\left[\frac{c}{M}+\frac{g}{l}\,\frac{M+m}{M}\right]k^2+\frac{c}{M}\,\frac{g}{l}=0.$$



Probl. 54.7

54.8. Deux pendules physiques identiques sont suspendus à des axes parallèles horizontaux, situés dans un même plan horizontal, et reliés par un ressort élastique dont la longueur à l'état non déformé est égale à la distance entre les axes des pendules. Négligeant les résistances au mouvement et la masse du ressort, calculer les fréquences et les rapports des amplitudes des oscillations fondamentales du système pour de petites déviations de la position d'équilibre. Le poids de chaque pendule est P; son rayon de giration par rapport à l'axe passant par le centre de gravité parallèlement à l'axe de suspension est ρ; la rigidité du ressort est c; les distances du centre de gravité du pendule et des points de fixation du ressort à l'axe de suspension sont respectivement l et h (cf. schéma du problème 54.4).

$$Rép.\ k_1^2=\frac{gl}{\rho^2+l^2};\quad k_2^2=\frac{(Pl+2ch^2)g}{P(\rho^2+l^2)};\quad \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=+1;\quad \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-1.$$

54.9. Une barre homogène AB de longueur L est suspendue à un point fixe à l'aide d'un fil de masse négligeable et de longueur $l=0,5L$. Calculer les fréquences des oscillations fondamentales du système et le rapport des déviations de la barre et du fil par rapport à la verticale pour les première et seconde oscillations fondamentales.

$$Rép.\ k_1=0,677\sqrt{\frac{g}{l}};\quad k_2=2,558\sqrt{\frac{g}{l}};$$

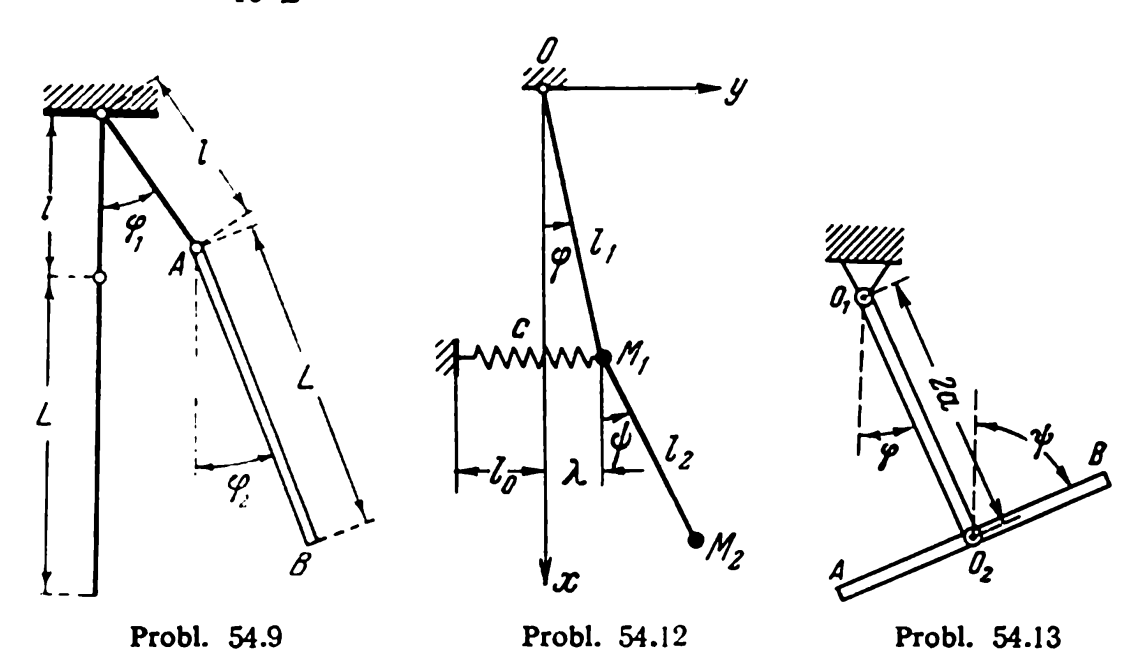
pour la première oscillation fondamentale $\varphi_1=0,847\varphi_2$, pour la seconde $\varphi_1=-1,180\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont les amplitudes des angles formés par le fil et la barre avec la verticale.

54.10. Dans le problème précédent supposer la longueur du fil très grande devant celle de la barre et, négligeant le carré du rapport L/l, calculer le rapport de la plus basse fréquence des oscillations libres du système à la fréquence des oscillations libres d'un pendule mathématique de longueur l.

Rép. $1-\frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

54.11. En supposant dans le problème 54.9. que la longueur du fil est très courte devant celle de la barre et négligeant le carré du rapport l/L, calculer le rapport de la plus basse fréquence des oscillations libres du système à la fréquence des oscillations d'un pendule physique, si l'axe de rotation est situé à l'extrémité de la barre.

Rép. $1-\frac{9}{16}\frac{l}{L}$.



Probl. 54.9　　Probl. 54.12　　Probl. 54.13

54.12. Calculer les fréquences des oscillations fondamentales d'un pendule mathématique double, si les masses des charges M_1 et M_2 sont respectivement m_1 et m_2. $OM_1=l_1$, $M_1M_2=l_2$, un ressort de masse négligeable étant relié à la charge M_1. La longueur du ressort à l'état non déformé est l_0, sa rigidité étant c.

Rép. $k_{1,2}^2=\frac{n_1^2+n_2^2\mp\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$,

où $n_1^2=\frac{(m_1+m_2)g+cl_1}{(m_1+m_2)l_1}$, $n_2^2=\frac{g}{l_2}$, $\gamma_{12}^2=\frac{m_2}{m_1+m_2}$.

54.13. Un pendule physique double est composé d'une barre rectiligne homogène O_1O_2 de longueur $2a$ et de poids P_1 tournant autour d'un axe horizontal fixe O_1 et d'une barre rectiligne homogène AB de poids P_2 articulée en son centre de gravité à l'extrémité O_2 de la première barre.

Déterminer le mouvement du système, si à l'instant initial la barre O_1O_2 est déviée de la verticale sous un angle φ_0, et la barre AB est verticale, sa vitesse angulaire initiale étant ω_0.

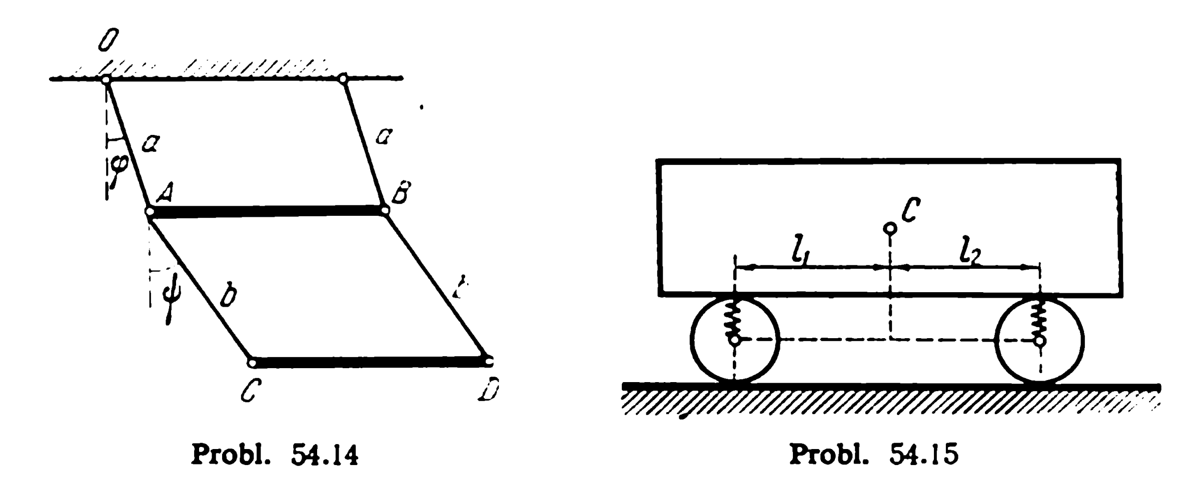
Rép. $\varphi=\varphi_0 \cos \sqrt{\frac{3}{4}\frac{P_1+2P_2}{P_1+3P_2}\frac{g}{a}}\,t$; $\psi=\omega_0 t$,

où ψ est l'angle formé par la barre AB avec la direction verticale.

54.14. Une barre AB de poids P est suspendue au plafond par ses extrémités A et B au moyen de deux fils identiques non pesants et inextensibles de longueur a. Une poutre CD de poids Q est suspendue à cette barre AB au moyen de deux fils identiques non pesants et inextensibles de longueur b. Supposant que les oscillations ont lieu dans le plan vertical, calculer les fréquences des oscillations fondamentales.

Rép. $k_{1,2}^2=\frac{n_1^2+n_2^2\mp\sqrt{(n_1^2+n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$,

où $n_1^2=\frac{g}{a}$, $n_2^2=\frac{g}{b}$, $\gamma_{12}^2=\frac{Q}{P+Q}$.



Probl. 54.14 Probl. 54.15

54.15. Etudier les oscillations d'un wagon dans son plan vertical médian, si le poids de la partie du wagon reposant sur les ressorts est Q et les distances du centre de gravité aux plans verticaux menés par les essieux $l_1=l_2=l$; le rayon de giration par rapport à l'axe central parallèle aux essieux du wagon est ρ; la rigidité des ressorts des deux essieux est identique: $c_1=c_2=c$.

Rép. $x=A\sin(k_1t+\alpha)$, $\psi=B\sin(k_2t+\beta)$, où x est le déplacement vertical du centre de gravité du wagon, ψ l'angle formé par le plancher du wagon avec l'horizontale; A, B, α, β sont des constantes d'intégration;

$$k_1=\sqrt{\frac{2cg}{Q}}\ ;\quad k_2=\sqrt{\frac{2cgl^2}{Q\rho^2}}\ .$$

54.16. Etudier les petites oscillations libres d'une plate-forme chargée, de poids P, reposant aux points A et B sur deux ressorts identiques de rigi-

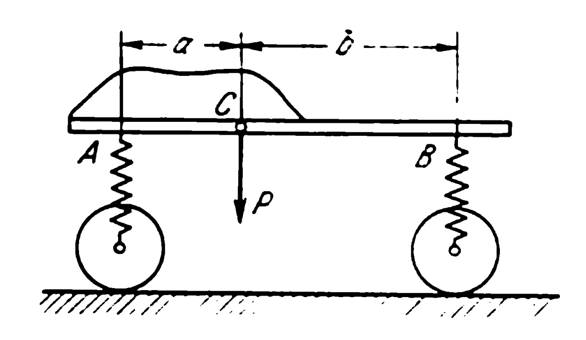
dité c. Le centre de gravité C de la plate-forme avec sa charge est sur la droite AB, $AC=a$ et $CB=b$. La position d'équilibre de la plate-forme est rompue si l'on communique au centre de gravité une vitesse initiale v_0 dirigée verticalement vers le bas sans déviation initiale. Négliger les masses des ressorts et les forces de frottement. Le moment d'inertie de la plate-forme par rapport à l'axe transversal horizontal passant par son centre de gravité est $J_C=0{,}1\,(a^2+b^2)\frac{P}{g}$. Les oscillations ont lieu dans le plan vertical. Prendre en tant que coordonnées généralisées la déviation du centre de gravité à partir de la position d'équilibre vers le bas y et l'angle de rotation de la plate-forme autour du centre de gravité ψ.

Rép. $$y=\frac{v_0}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1 t-\frac{\alpha_1}{\alpha_2 k_2}\sin k_2 t\right),$$

$$\varphi=\frac{v_0\alpha_1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1 t-\frac{1}{k_2}\sin k_2 t\right),$$

$$k_{1,2}^2=\frac{6cg}{P}\left(1\mp\sqrt{1-0{,}278\,\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}\right),$$

$$\alpha_1=\frac{2c-\frac{P}{g}k_1^2}{c(b-a)},\quad \alpha_2=\frac{2c-\frac{P}{g}k_2^2}{c(b-a)}.$$



Probl. 54.16

54.17. La plate-forme d'un chariot, de poids Q, repose aux points A et B sur deux ressorts identiques de rigidité c, dont la distance des axes $AB=l$, le centre de gravité C de la plate-forme est sur la droite AB, qui est son axe de symétrie, à une distance $AC=a=\frac{l}{3}$ du point A (cf. schéma du problème 54.16). Le rayon de giration de la plate-forme par rapport à l'axe passant par son centre de gravité perpendiculairement à la droite AB et situé dans le plan de la plate-forme est $0{,}2l$.

Etudier les petites oscillations de la plate-forme engendrées par un choc en son centre de gravité perpendiculairement à son plan. L'impulsion du choc est S.

Rép. Soient z le déplacement vertical du centre de gravité de la plate-forme, φ son angle de rotation autour de l'axe indiqué dans les hypothèses du problème (l'une et l'autre coordonnées sont calculées à partir de la position d'équilibre du centre de gravité de la plate-forme); on a:

$$z = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\, S\left(0{,}738 \sin 1{,}330 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t + \right.$$

$$\left. + 0{,}00496 \sin 3{,}758 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t\right);$$

$$l\varphi = \sqrt{\frac{g}{cQ}}\, S\left(0{,}509 \sin 1{,}330 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t - \right.$$

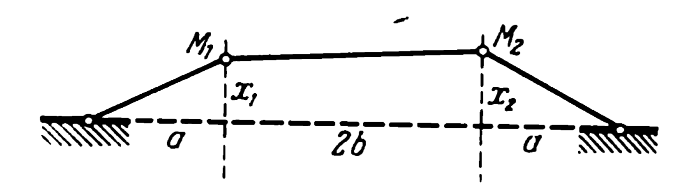
$$\left. - 0{,}180 \sin 3{,}758 \sqrt{\frac{cg}{Q}}\, t\right).$$

54.18. Deux points matériels identiques M_1 et M_2 de poids Q chacun sont fixés symétriquement à un fil tendu de longueur $2(a+b)$ à des distances égales de ses extrémités; la tension du fil est p. Calculer les périodes des oscillations fondamentales et déterminer les coordonnées fondamentales.

Rép. $k_1 = \sqrt{\frac{pg}{Qa}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{pg}{Q}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]}$.

Les coordonnées fondamentales sont:

$\theta_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\theta_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.



Probl. 54.18

54.19. Calculer les fréquences des petites oscillations d'un point matériel pesant oscillant autour de sa position d'équilibre sur une surface lisse concave; les rayons de courbure principaux de la surface au point correspondant à la position d'équilibre sont ρ_1 et ρ_2.

Rép. $k_1 = \sqrt{\frac{g}{\rho_1}}$; $k_2 = \sqrt{\frac{g}{\rho_2}}$.

54.20. Calculer les fréquences des petites oscillations d'un point matériel pesant autour de sa position d'équilibre confondue avec le plus bas point d'une surface tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical passant par ce point. Les rayons de courbure principaux de la surface à son plus bas point sont ρ_1 et ρ_2.

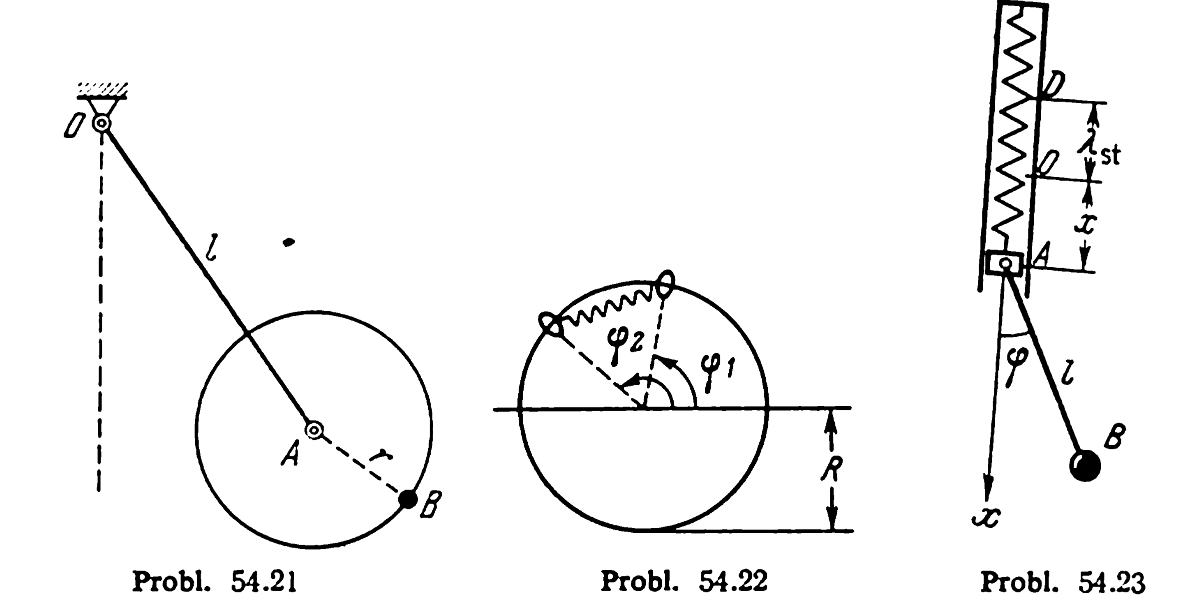
Rép. Les fréquences des petites oscillations sont les racines de l'équation

$$k^4-\left[2\omega^2+\frac{g}{\rho_1}+\frac{g}{\rho_2}\right]k^2+\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_2}\right)=0.$$

54.21. Un disque circulaire homogène de rayon r et de masse M est articulé à une barre OA de longueur l pouvant tourner autour d'un axe horizontal fixe. Un point matériel B de masse m est fixé sur la circonférence du disque. Calculer les fréquences des oscillations libres du système. La masse de la barre est négligeable. Le disque peut tourner dans le plan des oscillations de la barre OA.

Rép. Les fréquences des oscillations libres sont les racines de l'équation

$$k^4-\frac{M+m}{M+3m}\left[1+2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2+\frac{2m(M+m)g^2}{M(M+3m)lr}=0.$$



Probl. 54.21 Probl. 54.22 Probl. 54.23

54.22. Deux rondelles identiques reliées par un ressort de rigidité c, dont la longueur à l'état non déformé est l_0 sont enfilées sur une circonférence en fil de fer de rayon R située dans le plan horizontal. Déterminer le mouvement des rondelles en les assimilant à des points matériels de masse m, si à l'instant initial la distance entre elles était $l>l_0$, la vitesse étant nulle.

Rép. $\varphi_1=\beta\left(1-\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\right)$, $\varphi_2=2\alpha+\beta\left(1+\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}\,t\right)$,

$$\alpha=\arcsin\frac{l_0}{2R},\quad \beta=\arcsin\frac{l-l_0}{2R}.$$

54.23. Déterminer les petites oscillations du pendule mathématique de longueur l et de poids P_2 suspendu à un coulisseau A de poids P_1 se déplaçant verticalement et fixé à un ressort de rigidité c. Le coulisseau subit

une résistance à son mouvement proportionnelle à la vitesse (b étant le coefficient de proportionnalité).

Trouver les conditions pour lesquelles, dans le cas où $b=0$, les fréquences fondamentales du système considéré sont égales.

Rép. 1) $x = A_1 e^{-ht} \sin(\sqrt{k_1^2 - h^2}\,t + \varepsilon_1)$, $\varphi = A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2)$,

où A_1, A_2, ε_1, ε_2 sont des constantes d'intégration,

$$h = \frac{bg}{2(P_1+P_2)}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

2) Les fréquences fondamentales sont les mêmes (pour $b=0$) si

$$c = \frac{P_1+P_2}{l}.$$

54.24. Deux barres rigides identiques de longueur R sont suspendues à un même point O. Les barres peuvent tourner dans le plan vertical autour du point de suspension indépendamment l'une de l'autre. Deux charges identiques A et B, de poids P chacune, reliées par un ressort de rigidité c sont fixées aux extrémités des barres. La longueur du ressort à l'état non déformé est l_0. Négligeant le poids des barres, écrire l'équation pour déterminer les fréquences fondamentales des oscillations autour de la position d'équilibre stable des charges.

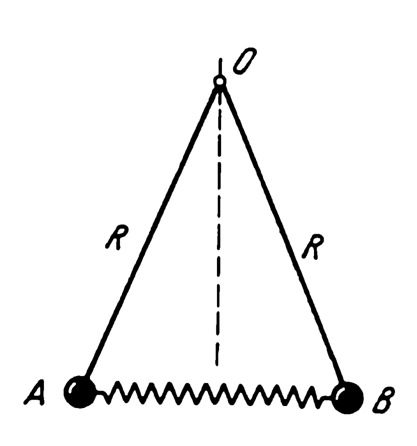
Rép. $k^4 - (n_1^2 + n_2^2)\,k^2 + n_1^2 n_2^2 - \gamma_{12}^2 = 0$;

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2}\,\frac{g}{R}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{gc}{P}\cos^2\alpha;$$

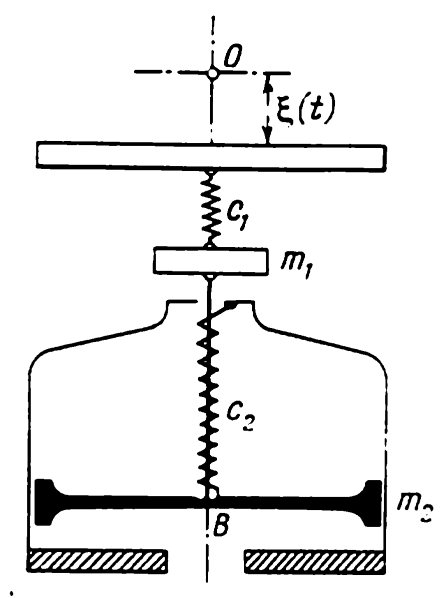
$$\gamma_{12}^2 = \frac{lg^2}{P^2R^4}\left(cR^2\cos^2\alpha + \frac{PR}{2}\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2;$$

$\alpha = \arcsin\frac{l}{2R}$, l est définie par l'équation

$$l_0 = l\left[1 + \frac{P}{c\sqrt{4R^2 - l^2}}\right].$$



Probl. 54.24



Probl. 54.25

54.25. Un système mécanique constitué par une masse m_1, solidaire au point B du piston d'un damper, est suspendu par un ressort de rigidité c_1 à une plate-forme qui se déplace suivant une loi donnée $\xi=\xi(t)$. La chambre du damper, de masse m_2, repose sur un ressort de rigidité c_2 dont l'extrémité opposée est fixée au piston. Le frottement visqueux dans le damper est proportionnel à la vitesse relative du piston et de la chambre; β est le coefficient de résistance. Ecrire l'équation du mouvement du système.

Rép. $m_1\ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1-\beta\dot{x}_2+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=c_1\xi(t)$;

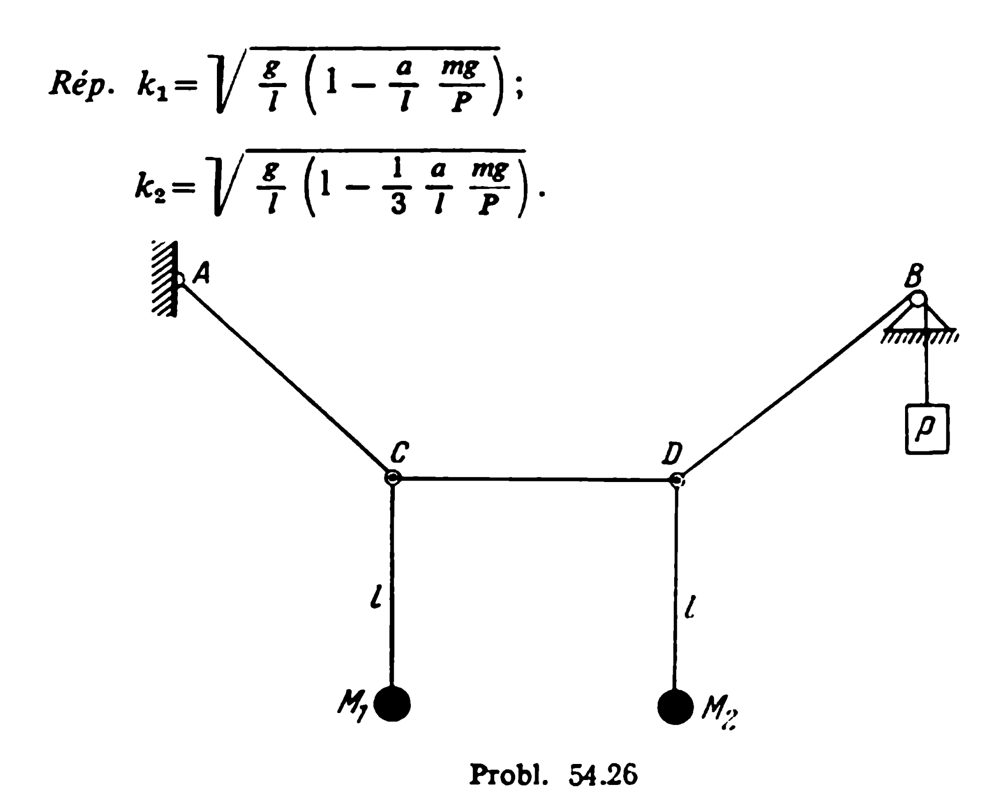
$$m_2\ddot{x}_2-\beta\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0.$$

54.26. Un fil élastique est tendu entre deux appuis fixes A et B, la tension étant créée par une charge P suspendue à l'extrémité pendante du fil. Deux pendules M_1 et M_2 pouvant osciller dans des plans perpendiculaires au plan du dessin sont suspendus aux points C et D du fil. Les distances $AC=$ $=CD=DB=a$. Les masses des fils sont négligeables. Assimiler chaque pendule à un point matériel de masse m pendu par un fil de longueur l. Calculer les fréquences des petites oscillations libres du système.

Indication. Supposer le rapport $\frac{a}{l}\frac{mg}{P}$ petit.

Rép. $k_1=\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$;

$$k_2=\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{1}{3}\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}.$$



Probl. 54.26

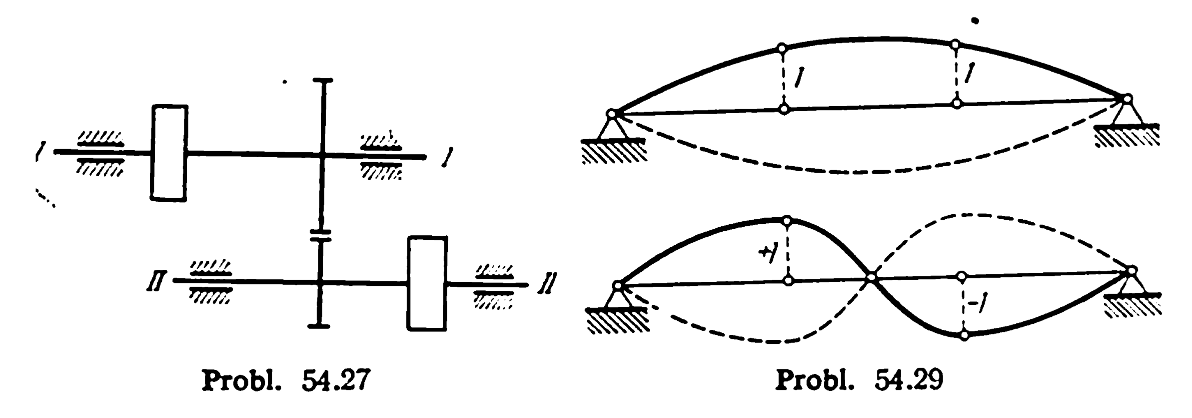
54.27. Calculer les fréquences des oscillations libres de torsion d'un système de deux arbres reliés par un engrenage. Les moments d'inertie des masses montées sur les arbres et les moments d'inertie des pignons par rapport à l'axe des arbres sont $J_1=87\,500$ kgf cm s², $J_2=56\,000$ kgf cm s²,

$i_1=302$ kgf cm s², $i_2=10{,}5$ kgf cm s², le rapport de transmission $k=z_1/z_2=$ $=5$; les rigidités des arbres à la torsion $c_1=316 \cdot 10^6$ kgf cm, $c_2=$ $=115 \cdot 10^6$ kgf cm; négliger les masses des arbres.

Rép. $k_1=54{,}8$ s^{-1}; $k_2=2{,}38 \cdot 10^3$ s^{-1}.

54.28. Calculer, en négligeant les masses des pignons, la fréquence des oscillations libres de torsion du système décrit dans le problème précédent.

Rép. $k=58{,}7$ s^{-1}.



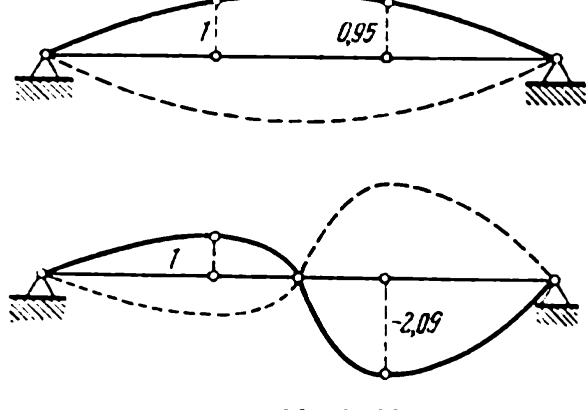
Probl. 54.27   Probl. 54.29

54.29. Calculer les fréquences et les formes des oscillations transversales fondamentales d'une poutre de longueur l reposant sur deux appuis et chargée aux points $x=\frac{1}{3}l$ et $x=\frac{2}{3}l$ de deux poids égaux Q. Le moment d'inertie de la section droite de la poutre est J, le module d'élasticité E. Négliger la masse de la poutre.

Rép. $k_1=5{,}69\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=22{,}04\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=1; \qquad \frac{A_2^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-1;$$

les formes des oscillations fondamentales sont indiquées sur le schéma.



Probl. 54.30

54.30. Calculer les fréquences et les formes des oscillations transversales fondamentales d'une poutre de longueur l reposant à ses extrémités et soumise à des charges $Q_1=Q$ et $Q_2=0,5Q$ distantes des appuis de $\frac{1}{3}\,l$. Négliger la masse de la poutre.

Rép. $k_1=6,55\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=27,2\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

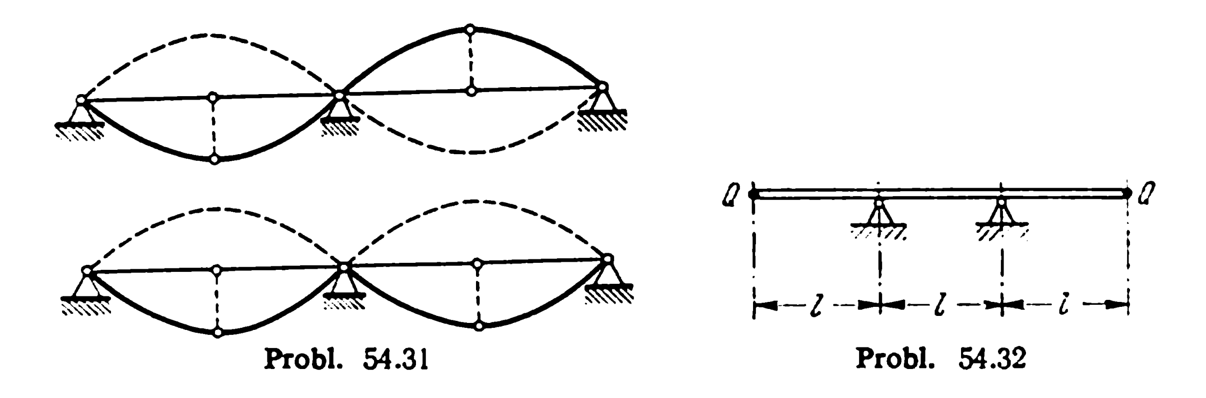
$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=0,95$; $\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-2,09$;

les formes des oscillations fondamentales sont indiquées sur le schéma.

54.31. Calculer les fréquences et les formes des oscillations fondamentales d'une poutre à deux travées égales $l_1=l_2=l$ supportant au milieu de chaque travée des charges égales $Q_1=Q_2=Q$. Négliger la masse de la poutre.

Rép. $k_1=6,93\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=10,46\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$;

les formes des oscillations fondamentales sont indiquées sur le schéma.



Probl. 54.31 Probl. 54.32

54.32. Calculer les fréquences et les formes des oscillations fondamentales de deux charges identiques Q fixées aux extrémités d'une poutre console horizontale à des distances égales de ses appuis. La poutre de longueur $3l$ repose sur deux appuis distants de l; le moment d'inertie de la section droite de la poutre est J, le module de Young du matériau de la poutre est E. Négliger la masse de la poutre.

Rép. $k_1=\sqrt{\frac{6}{5}\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=\sqrt{2\,\frac{EJg}{Ql^3}}$.

54.33. Une plaque homogène rectangulaire de masse m est fixée à l'extrémité A d'une poutre de longueur l; l'autre extrémité de la poutre est encastrée. Le système est situé dans le plan horizontal et effectue dans ce plan des oscillations libres autour de sa position d'équilibre.

Déterminer les fréquences et les formes de ces oscillations. Les dimensions de la plaque sont: $a=0{,}2l$, $b=0{,}1l$. Négliger la masse de la poutre.

Indication. La force Q et le moment M qui doivent être appliqués à l'extrémité A de la poutre pour provoquer en ce point un déplacement vertical f et une rotation φ de la tangente à l'axe courbé de la poutre sont définis par les formules

$$f=pQ+sM,\quad \varphi=sQ+qM;$$

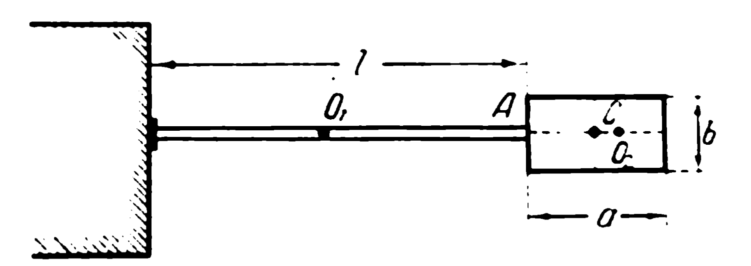
dans le cas considéré d'une poutre homogène encastrée à l'une des extrémités

$$p=\frac{l^3}{3EJ},\quad q=\frac{l}{EJ},\quad s=\frac{l^2}{2EJ}.$$

Rép. Les fréquences des oscillations fondamentales sont respectivement

$$0{,}804\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}};\quad 20{,}7\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}};$$

la première oscillation fondamentale peut être considérée comme une oscillation de rotation autour du point O_1, situé sur l'axe de la poutre à gauche du point A à une distance $O_1A=0{,}612\,l$, la seconde comme une oscillation de rotation autour du point O_2, situé sur le prolongement de l'axe de la poutre à une distance $O_2A=0{,}106l$ à droite du point A.



Probl. 54.33

54.34. Un couple constant M est appliqué brusquement à l'un des deux disques initialement au repos reliés par un arbre élastique de rigidité c; les moments d'inertie des disques sont J. Négligeant la masse de l'arbre, déterminer le mouvement du système.

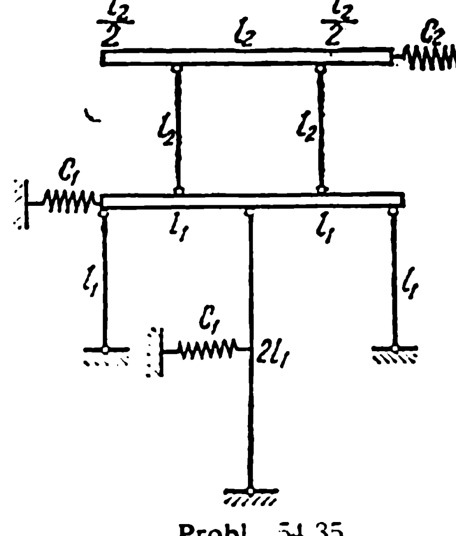
Rép. $\varphi_1=\frac{M}{4J}t^2+\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right);$

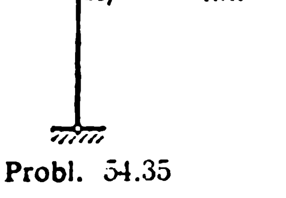
$$\varphi_2=\frac{M}{4J}t^2-\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right).$$

54.35. Un système de barres articulées à deux étages est retenu dans la position verticale par trois ressorts (cf. schéma). Les barres sont parfaitement rigides et homogènes; le poids par une longueur l est G. Les rigidités des ressorts étant $c_1=c_2=\frac{10G}{l}$, déterminer la stabilité de l'équilibre du sys-

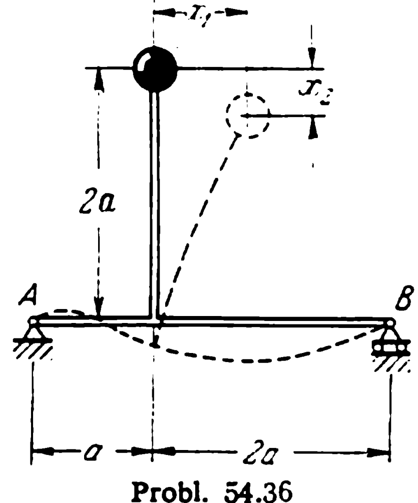
tème ainsi que les fréquences et les formes f_1 et f_2 des oscillations fondamentales du système. Négliger les masses des ressorts; $l_1 = l_2 = l$.

Rép. L'équilibre est stable; $k_1 = 0{,}412\sqrt{\frac{g}{l}}$, $k_2 = 1{,}673\sqrt{\frac{g}{l}}$; $f_1 = -1{,}455$, $f_2 = 3{,}495$.





Probl. 54.35



Probl. 54.36

54.36. Une charge de poids G est fixée au sommet d'un montant solidaire d'une poutre AB reposant sur deux appuis. Le moment d'inertie de la section droite est J, les modules d'élasticité E de la poutre et du montant sont identiques; calculer les fréquences des oscillations de flexion fondamentales du système. Négliger les poids de la poutre et du montant.

Rép. $k_1 = 0{,}497\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$; $\quad k_2 = 1{,}602\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$.

54.37. Le fondement d'une machine pesant $P_1 = 100$ t, posé sur un sol élastique, effectue des oscillations forcées verticales sous l'action d'une force perturbatrice verticale variant suivant la loi $F = 10 \sin \omega t$. Pour éliminer la résonance qui apparaît lorsque la vitesse angulaire de rotation de la machine $\omega = 100\ \text{s}^{-1}$, on installe sur le fondement, sur des ressorts, un amortisseur formant un cadre pesant. Choisir le poids P_2 de ce cadre et la rigidité totale c_2 de l'amortisseur de manière à ce que l'amplitude des oscillations forcées du fondement pour la vitesse de l'arbre susmentionnée soit nulle et que l'amplitude des oscillations de l'amortisseur ne dépasse pas $A = 2$ mm.

Rép. $P_2 = 4{,}9$ t; $c_2 = 5 \cdot 10^3$ t/m.

54.38. Ecrire les équations des oscillations forcées du système de disques décrit dans le problème 54.2, lorsque le disque moyen est soumis à un moment perturbateur $M = M_0 \sin pt$.

Rép. $\varphi_1 = \frac{M_0 (c - Jp^2)}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt$,

$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt$,

où k_1 et k_2 sont les fréquences des oscillations fondamentales du système.

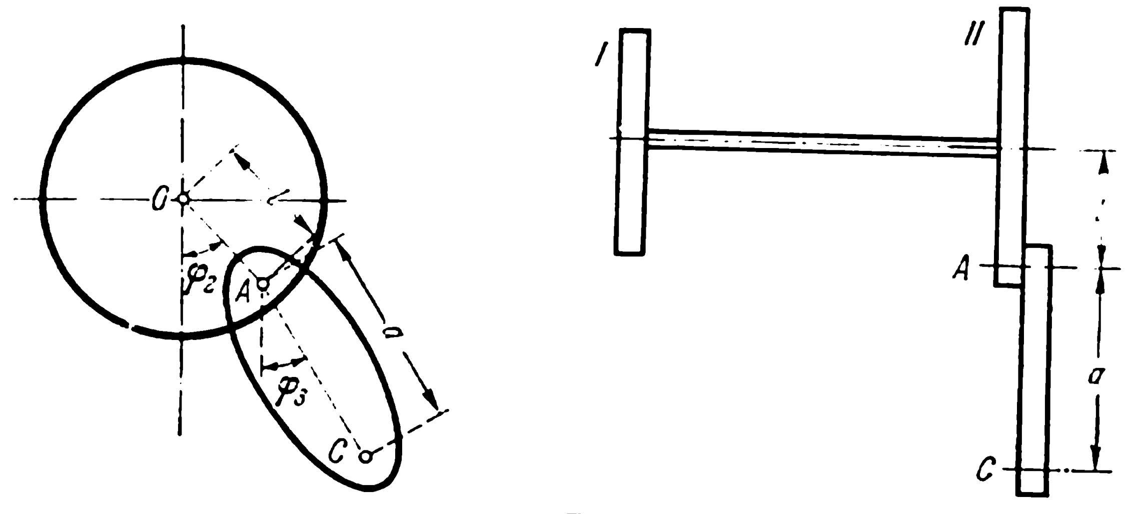
54.39. Un moteur électrique de poids Q_1 est fixé sur un fondement élastique en béton (formant un parallélépipède continu) de poids Q_2 et de rigidité c_2, posé sur un sol rigide. Le rotor de poids P est monté sur un arbre élastique horizontal dont la rigidité à la flexion est c_1; l'excentricité du rotor par rapport à l'arbre est r; la vitesse angulaire de l'arbre ω. Déterminer les oscillations forcées verticales du stator du moteur électrique. Prendre en considération la masse du fondement en ajoutant le tiers de sa masse à la masse du stator.

Rép. $$y = \frac{c_1 P g r \omega^2 \sin \omega t}{c_1 c_2 g^2 - \left[(c_1+c_2) P + c_1 \left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right)\right] g\omega^2 + P\left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right)\omega^4},$$

où y désigne la déviation du stator par rapport à la position d'équilibre.

54.40. Une force $F = F_0 \sin pt$ (F_0 et p étant des constantes) est appliquée au point A de la poutre AB (cf. problème 54.14); elle est située dans le plan du mouvement de la poutre et forme un angle droit avec le fil OA. Quelle doit être la longueur b des fils qui soutiennent la poutre CD, pour que l'amplitude des oscillations forcées de la poutre AB soit nulle?

Rép. $b = g/p^2$.



Probl. 54.41

54.41. Pour absorber les oscillations de torsion on fixe un pendule à l'une des masses oscillantes d'un système. Le système est composé de deux masses I et II (cf. schéma) tournant avec une vitesse angulaire constante ω. Le pendule est fixé à la seconde masse. Les moments d'inertie de ces masses par rapport à l'axe de rotation sont J_1 et J_2; le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe parallèle à l'axe de rotation du système et passant par le centre de gravité du pendule est J_3. La distance entre l'axe de rotation du système et l'axe de suspension du pendule $OA = l$; la distance entre l'axe de suspension et l'axe parallèle passant par le centre de gravité du pendule $AC = a$; la masse du pendule est m. La rigidité à la torsion du

tronçon de l'arbre situé entre les masses est c_1. On applique à la seconde masse un moment extérieur $M=M_0 \sin \omega t$. Ecrire les équations différentielles du mouvement des deux masses du système et du pendule. Dans l'expression de l'énergie potentielle du système négliger l'énergie potentielle du pendule dans le champ de pesanteur.

Rép. $J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$

$$(J_2 + ml^2)\ddot{\varphi}_2 + mal\,\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + mal\,\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0 \sin \omega t;$$

$$(J_3 + ma^2)\ddot{\varphi}_3 + mal\,\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\,\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

54.42. Les quatre sommets inférieurs d'un réservoir de forme cubique reposent sur quatre ressorts identiques; la longueur du côté du cube est $2a$. Les rigidités des ressorts suivant les directions des axes parallèles aux arêtes du cube sont c_x, c_y, c_z; le moment d'inertie du cube par rapport aux axes centraux principaux est J. Ecrire les équations des petites oscillations et calculer leurs fréquences dans le cas où $c_x = c_y$. Le poids du réservoir est P.

Rép. $m\ddot{x} + c_x x - c_x a \varphi_2 = 0,$

$$m\ddot{y} + c_y y + c_y a \varphi_1 = 0,$$

$$m\ddot{z} + c_z z = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_1 + c_y ay + c_y a^2 \varphi_1 + c_z a^2 \varphi_1 = 0,$$

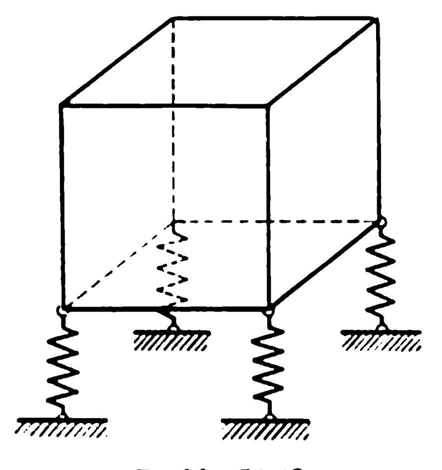
$$J\ddot{\varphi}_2 + c_x a^2 \varphi_2 - c_x ax + c_z a^2 \varphi_2 = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_3 + c_x a^2 \varphi_3 + c_y a^2 \varphi_3 = 0,$$

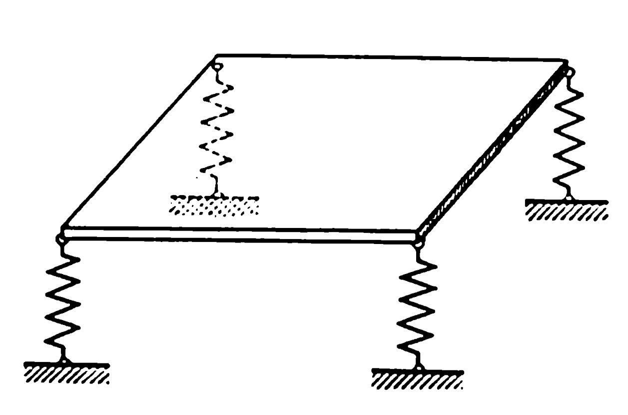
où x, y, z sont les coordonnées du centre du cube, φ_1, φ_2, φ_3 les angles de rotation du cube par rapport aux axes de coordonnées. Si $c_x = c_y$, alors

$$k_z = \sqrt{\frac{c_z g}{P}}, \quad k_{\varphi_3} = \sqrt{\frac{2c_x a^2}{J}},$$

$$k^4 - \frac{m(c_x + c_z)a^2 + c_z J}{mJ} k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{mJ} = 0.$$



Probl. 54.42



Probl. 54.43

54.43. Les quatre sommets d'une plaque homogène rectangulaire horizontale de côtés a et b reposent sur quatre ressorts identiques de rigidité c; la masse de la plaque est M. Calculer les fréquences de ses oscillations libres (voir fig. p. 485).

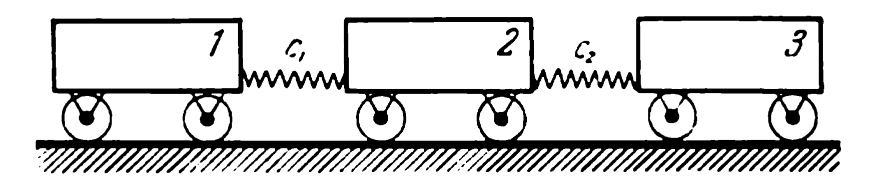
Rép. $k_1 = \sqrt{4\frac{c}{M}}$; $k_2 = k_3 = \sqrt{12\frac{c}{M}}$.

54.44. Trois wagons chargés de poids Q_1, Q_2, et Q_3 sont attelés entre eux. Les rigidités des attelages sont c_1 et c_2. A l'instant initial deux wagons sont dans la position d'équilibre, le wagon d'extrême droite est déplacé de x_0 par rapport à sa position d'équilibre. Trouver les fréquences des oscillations fondamentales du système.

Rép. $k_1=0$, k_2 et k_3 sont les racines de l'équation

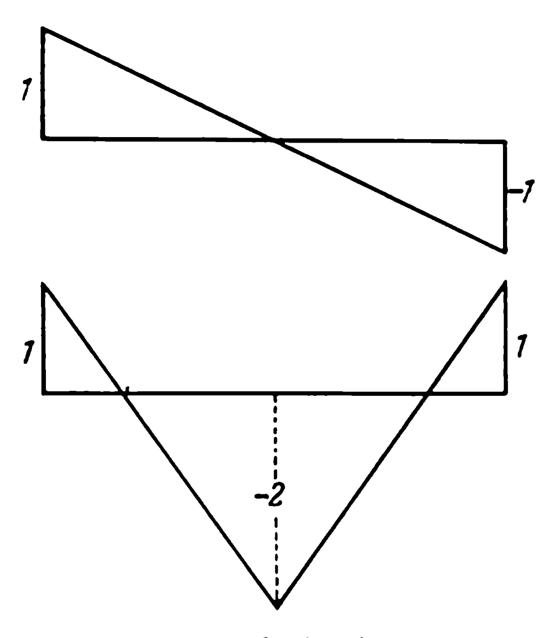
$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1+c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right]k^2 + g^2\left[\frac{c_1c_2}{Q_1Q_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_2c_1}{Q_2Q_3} + \frac{c_1c_2}{Q_3Q_1}\right] = 0.$$



Probl. 54.44

54.45. Ecrire, dans les hypothèses du problème précédent, les équations du mouvement des wagons et construire les formes des oscillations fonda-



Probl. 54.45

mentales pour le cas de wagons de même poids $Q_1=Q_2=Q_3=Q$ et dont les rigidités des attelages sont identiques $c_1=c_2=c$.

Rép. $x_1=\frac{x_0}{3}-\frac{x_0}{2}\cos k_2 t+\frac{x_0}{6}\cos k_3 t,$

$$x_2=\frac{x_0}{3}-\frac{x_0}{3}\cos k_3 t,$$

$$x_3=\frac{x_0}{3}+\frac{x_0}{2}\cos k_2 t+\frac{x_0}{6}\cos k_3 t;$$

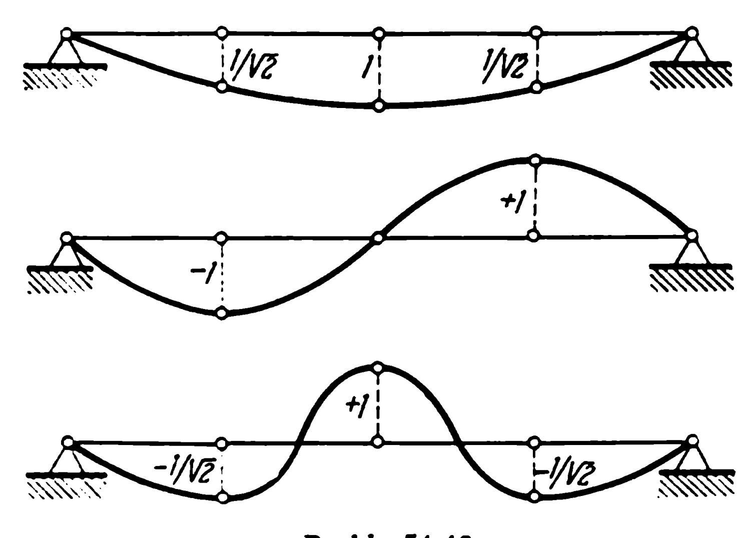
$$k_2=\sqrt{\frac{cg}{Q}},\quad k_3=\sqrt{3\frac{cg}{Q}}.$$

Les formes des oscillations fondamentales sont indiquées sur le schéma.

54.46. Calculer les fréquences et les formes des oscillations fondamentales d'un système composé de trois masses identiques m fixées sur une poutre à des distances égales l'une de l'autre ainsi que des appuis. La poutre est posée sur les appuis, sa longueur est l, le moment d'inertie de sa section droite J, le module de Young du matériau de la poutre E.

Rép. $k_1=4{,}93\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}};\quad k_2=19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}};\quad k_3=41{,}8\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$

Les formes des oscillations fondamentales sont indiquées sur le schéma.



Probl. 54.46

54.47. Un système de n masses identiques reliées par des ressorts de rigidité c forme un filtre mécanique pour oscillations longitudinales.

Connaissant la loi du mouvement de translation de la masse gauche $x=x_0\sin\omega t$, montrer que le système est un filtre de basses fréquences, c'est-à-dire qu'après le passage de la fréquence ω par une limite définie, les ampli-

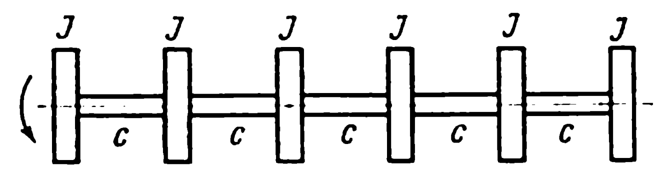
tudes des oscillations forcées des masses isolées varient selon le numéro de la masse suivant une loi exponentielle, et jusqu'au passage de cette limite suivant une loi harmonique.

Probl. 54.47

Rép. Le filtre laisse passer les oscillations de fréquence $0<\omega<2\sqrt{\frac{c}{m}}$.

54.48. Un filtre d'oscillations de torsion est schématisé par un arbre long et muni de disques.

Connaissant la loi du mouvement du disque gauche $\vartheta=\vartheta_0 \sin \omega t$, déterminer les oscillations forcées du système et calculer les amplitudes des oscillations des disques.



Probl. 54.48

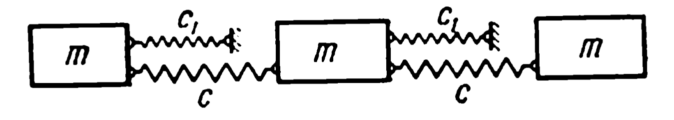
Les moments d'inertie des disques sont J, les rigidités, à la torsion des tronçons de l'arbre entre les disques, sont identiques et valent c. Etudier la solution obtenue et montrer que le système est un filtre de basses fréquences.

Rép. $\vartheta_k=(\vartheta_0 \cos \mu k+c_1 \sin \mu k) \sin \omega t$,

$$\sin \frac{\mu}{2}=\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{J}{c}},$$

où ϑ_k est l'angle de rotation du k-ième disque, c_1 étant une constante définie d'après la condition aux limites à la seconde extrémité de l'arbre; le numéro du premier disque est zéro; la fréquence ω doit être comprise dans les limites

$$0<\omega<2 \sqrt{\frac{c}{J}}.$$



Probl. 54.49

54.49. Un système mécanique formant un filtre à bande pour oscillations longitudinales est composé d'éléments dont chacun est constitué par une masse m reliée à la masse de l'élément suivant par un ressort de

rigidité c. Parallèlement à ce ressort un autre ressort de rigidité c_1 relie cette masse à un point fixe.

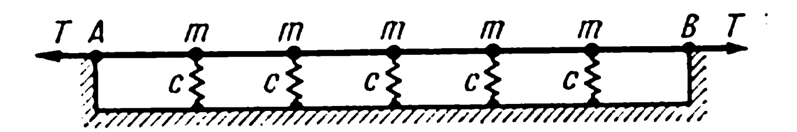
La loi des oscillations longitudinales de la masse gauche est $x = x_0 \sin \omega t$.

Montrer que pour des valeurs de ω se trouvant dans des limites données les amplitudes des oscillations des masses isolées varient avec la distance suivant une loi harmonique. Trouver les fréquences limites correspondantes.

Rép. La bande passante est définie par l'inégalité

$$\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m}} .$$

54.50. Un système composé d'un grand nombre de masses m fixées à une distance a l'une de l'autre sur une corde AB, tendue par un effort T, et soutenues par des ressorts de rigidité c forme un filtre mécanique à bande d'oscillations transversales.



Probl. 54.50

Calculer les fréquences correspondant aux limites de la bande passante.

Rép. La bande passante est définie par l'inégalité

$$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{4T}{ma}} .$$

54.51. Un fil de longueur nl est suspendu verticalement par l'une des extrémités et est chargé à des distances égales a par n points matériels de masses m. Ecrire les équations du mouvement. Calculer pour $n = 3$ les fréquences des oscillations transversales du système.

Rép. Les équations du mouvement sont:

$$\ddot{x}_k = \frac{g}{l} \left[(n-k)\, x_{k-1} - (2n - 2k + 1)\, x_k + (n - k + 1)\, x_{k+1} \right],$$

où x_k est le déplacement transversal du k-ième point (le numérotage s'effectuant depuis le haut);

$$k_1 = 0{,}646 \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad k_2 = 1{,}515 \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad k_3 = 2{,}505 \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

54.52. Déterminer les fréquences des oscillations transversales libres d'un fil tendu dont les extrémités sont fixées et qui supporte n masses m distantes de l l'une de l'autre. La tension du fil est P.

Rép. $k = 2 \sqrt{\frac{P}{ml}} \sin \frac{\pi s}{2n}; \quad 1 \leqslant s \leqslant n - 1.$

55.1. Un pendule double formé par deux barres de longueur l et par deux points matériels de masse m est suspendu à un axe horizontal tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Etudier la stabilité de la position verticale d'équilibre du pendule. Négliger la masse des barres.

Rép. Pour $\frac{g}{l\omega^2} > 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$ la position verticale d'équilibre du pendule est stable.

55.2. Une bille pesante est située dans un tube lisse courbé suivant l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tournant autour de l'axe vertical Oz avec une vitesse angulaire constante ω (l'axe Oz est dirigé vers le bas). Déterminer les positions d'équilibre relatif de la bille et étudier leur stabilité.

Rép. Pour $\omega^2 \leqslant \frac{gc}{a^2}$ il existe deux positions d'équilibre:

a) $x=0$, $z=c$ (stable); b) $x=0$, $z=-c$ (instable). Pour $\omega^2 > \frac{gc}{a^2}$ il existe trois positions d'équilibre:

a) $x=0$, $z=+c$ (instable); b) $x=0$, $z=-c$ (instable); c) $z=\frac{gc^2}{\omega^2 a^2}$ (stable).

55.3. Une bille pesante est située dans un tube lisse courbé suivant la parabole $x^2=2pz$ tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz. (Le sens positif de l'axe Oz est de bas en haut.)

Déterminer la position d'équilibre relatif de la bille et étudier sa stabilité.

Rép. Il existe une seule position d'équilibre $z=0$; elle est stable pour $\omega^2 < g/p$ et instable pour $\omega^2 > g/p$; pour $\omega^2 = g/p$ l'équilibre est indifférent.

55.4. Un point matériel peut se déplacer sur une courbe plane lisse tournant autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω. L'énergie potentielle $V(s)$ du point est donnée et ne dépend que de sa position définie par l'arc s calculé le long de la courbe; $r(s)$ est la distance du point à l'axe de rotation.

Calculer la fréquence des petites oscillations du point autour de sa position d'équilibre relatif.

Rép. $k^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s=s_0}$,

où s_0 est déterminé de l'équation

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{s=s_0} = \omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}.$$

55.5. Un point matériel de masse m décrit une circonférence de rayon r_0 sous l'action d'une force centrale d'attraction proportionnelle à la n-ième puissance de la distance $F=ar^n$.

Trouver les conditions pour lesquelles la trajectoire du mouvement perturbé est proche de la circonférence initiale.

Rép. Pour $n < -3$ le mouvement est instable, pour $n > -3$ il est stable.

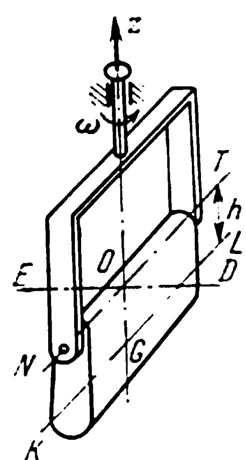
55.6. Un corps rigide oscille librement autour de l'axe horizontal NT tournant autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire ω. Le point G est le centre d'inertie du corps; le plan NTG est le plan de symétrie, l'axe OG l'axe principal d'inertie. L'axe KL est parallèle à NT, l'axe ED passant par le point O est perpendiculaire à NT et OG. Les moments d'inertie du corps par rapport aux axes OG, KL et ED sont respectivement C, A et B; h est la longueur du segment OG; M la masse du corps. Déterminer les positions possibles d'équilibre relatif et étudier leur stabilité.

Rép. Aux positions possibles d'équilibre relatif correspondent les valeurs suivantes de l'angle de déviation de la ligne OG par rapport à l'axe Oz;

a) $\varphi = 0$ (stable si $B < C$; pour $B > C$ elle est stable si $\omega^2 < \frac{Mgh}{B-C}$ et instable si $\omega^2 > \frac{Mgh}{B-C}$) ;

b) $\varphi = \pi$ (instable si $B > C$; pour $B < C$ elle est stable si $\omega^2 > \frac{Mgh}{C-B}$ et instable si $\omega^2 < \frac{Mgh}{C-B}$) ;

c) $\varphi = \arccos \frac{Mgh}{(B-C)\omega^2}$ (existe si $\omega^2 > \frac{Mgh}{|B-C|}$ (stable pour $B > C$ et instable pour $B < C$).

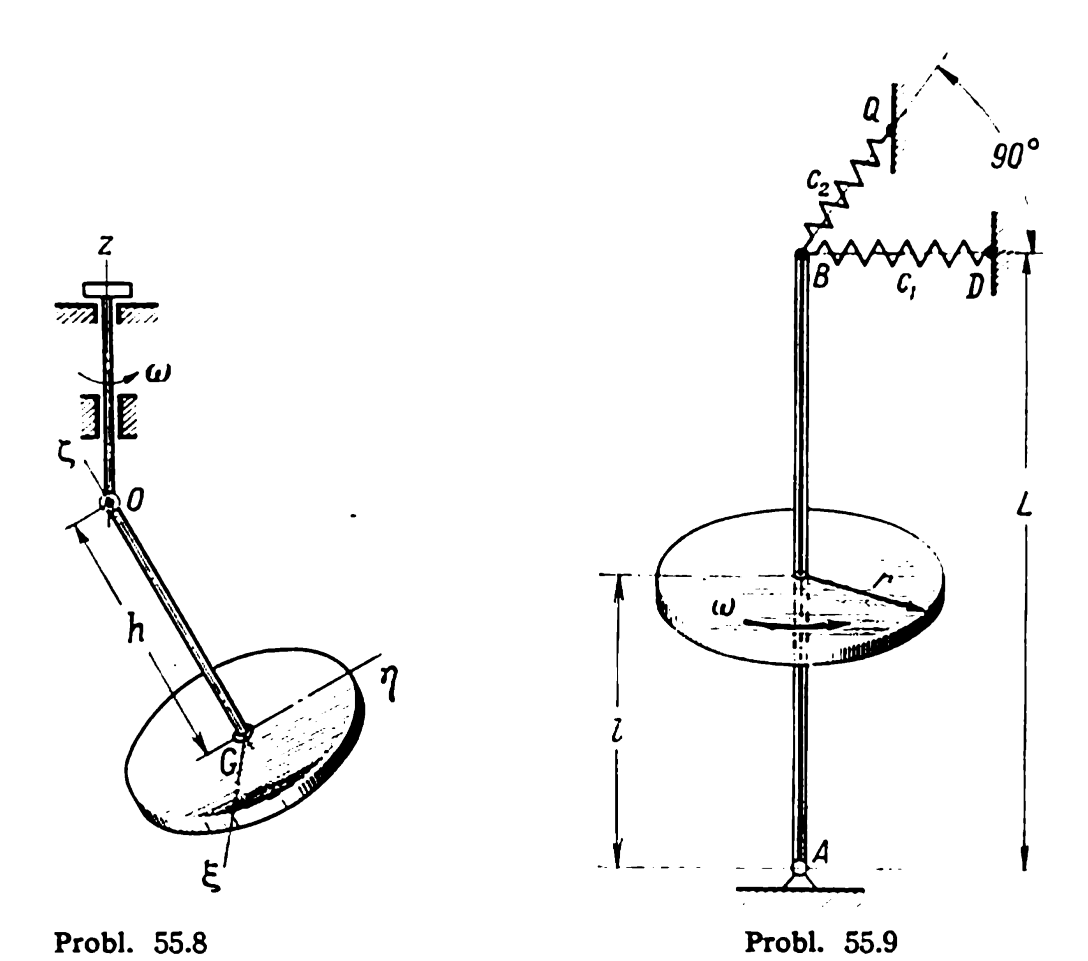


Probl. 55.6

55.7. Etudier, dans les hypothèses du problème 48.29 les petits mouvements du système près de la position d'équilibre $\alpha = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et la stabilité de cette position d'équilibre.

Rép. La position d'équilibre $\alpha = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est instable.

55.8. Déterminer les positions d'équilibre relatif d'un pendule suspendu à l'aide d'une articulation universelle O à un axe vertical tournant avec une vitesse angulaire constante ω; le pendule est symétrique par rapport à son axe longitudinal; A et C sont ses moments d'inertie par rapport aux axes principaux centraux d'inertie ξ, η et ζ; h est la distance du centre de gravité du pendule à l'articulation. Etudier la stabilité des positions d'équilibre du pendule et déterminer la période des oscillations autour de la position moyenne d'équilibre. (Voir fig. p. 492.)



Probl. 55.8 Probl. 55.9

Rép. Les positions d'équilibre et leur stabilité sont définies par les formules données dans la réponse du problème 55.6 (il faut y poser $B = A + Mh^2$). La période des oscillations

$$T = 2\pi\omega \sqrt{\frac{(A+Mh^2)(A+Mh^2-C)}{(A+Mh^2-C)^2\,\omega^4 - M^2 g^2 h^2}}\,.$$

55.9. L'axe vertical de symétrie d'un disque mince circulaire homogène de rayon r et de poids Q peut tourner librement autour du point A. Il est retenu au point B par deux ressorts. Les axes des ressorts sont horizontaux et orthogonaux, leurs rigidités sont respectivement c_1 et c_2, $c_2 > c_1$. Les ressorts sont fixés à l'axe du disque à une distance L de l'appui inférieur; la distance du disque à l'appui inférieur est l. Déterminer la vitesse angulaire ω qu'il faut communiquer au disque pour assurer la stabilité de rotation.

Rép. Pour $Ql < c_1 L^2$ le système est stable pour n'importe quelle vitesse angulaire; pour $Ql > c_2 L^2$ le système est stable si $\omega > \omega^*$, où

$$\omega^* = \frac{\sqrt{gl(r^2+4l^2)}}{r^2}\left\{\sqrt{1-\frac{c_1 L^2}{Ql}} + \sqrt{1-\frac{c_2 L^2}{Ql}}\right\}.$$

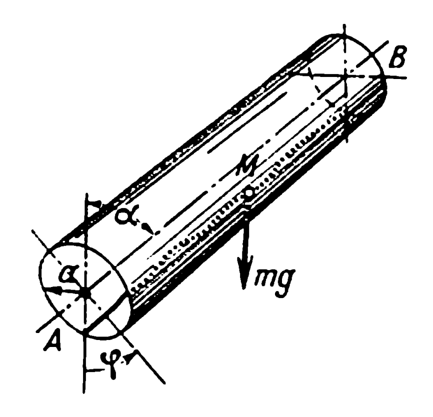
Pour $c_1 L^2 < Ql < c_2 L^2$ le système est instable pour n'importe quelle vitesse angulaire.

55.10. Un point matériel M se déplace sous l'action de la pesanteur sur la surface d'un cylindre circulaire de rayon a dont l'axe est incliné

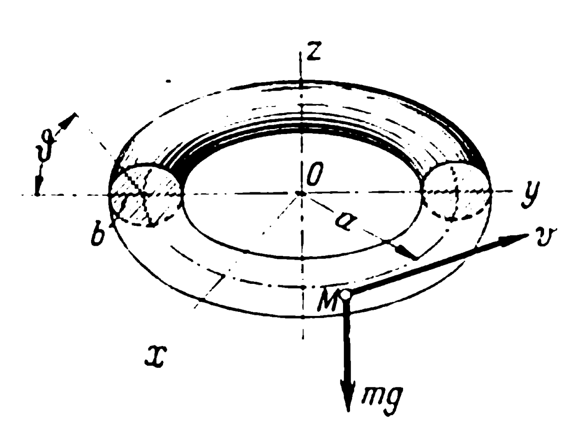
sous un angle α par rapport à la verticale. Etudier la stabilité du mouvement suivant la génératrice inférieure ($\varphi=0$) et supérieure ($\varphi=\pi$). Calculer la période des oscillations lors du mouvement suivant la génératrice inférieure.

Rép. Le mouvement suivant la génératrice supérieure est instable; la période des oscillations du mouvement perturbé le long de la génératrice inférieure

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a}{g\sin\alpha}}\,.$$



Probl. 55.10



Probl. 55.11

55.11. Un point matériel est assujetti à se mouvoir sur la surface lisse d'un tore défini par les équations paramétriques $x=\rho\cos\psi$; $y=\rho\sin\psi$; $z=b\sin\vartheta$; $\rho=a+b\cos\vartheta$ (l'axe des z est dirigé verticalement vers le haut). Déterminer les mouvements possibles du point caractérisés par la constance de l'angle ϑ et étudier leur stabilité.

Rép. Les valeurs $\vartheta=\vartheta_i=\text{const}$ sont déterminées par l'équation

$$(1+\alpha\cos\vartheta_i)=-\beta\operatorname{ctg}\vartheta_i,$$

où $\alpha=\frac{b}{a}$, $\beta=\frac{g}{a\omega^2}$; $\dot\psi=\omega=\text{const}$. Cette équation possède deux solutions essentiellement différentes :

$$-\frac{\pi}{2}<\vartheta_1<0,\quad \frac{\pi}{2}<\vartheta_2<\pi.$$

Le mouvement qui correspond à la première solution est stable, celui qui correspond à la seconde étant instable.

55.12. Etudier la stabilité du mouvement d'un cerceau roulant uniformément avec une vitesse angulaire ω sur un plan horizontal. Le plan du cerceau est vertical, son rayon est a.

Rép. Le mouvement est stable si $\omega^2>\frac{g}{4a}$.

55.13. Une roue à quatre rayons disposés symétriquement roule sur un plan rugueux. Le plan de la roue est vertical, ses jantes et ses rayons

sont faits de fil mince pesant. Le rayon de la roue est a, la vitesse initiale de son centre est v. Etudier la stabilité du mouvement.

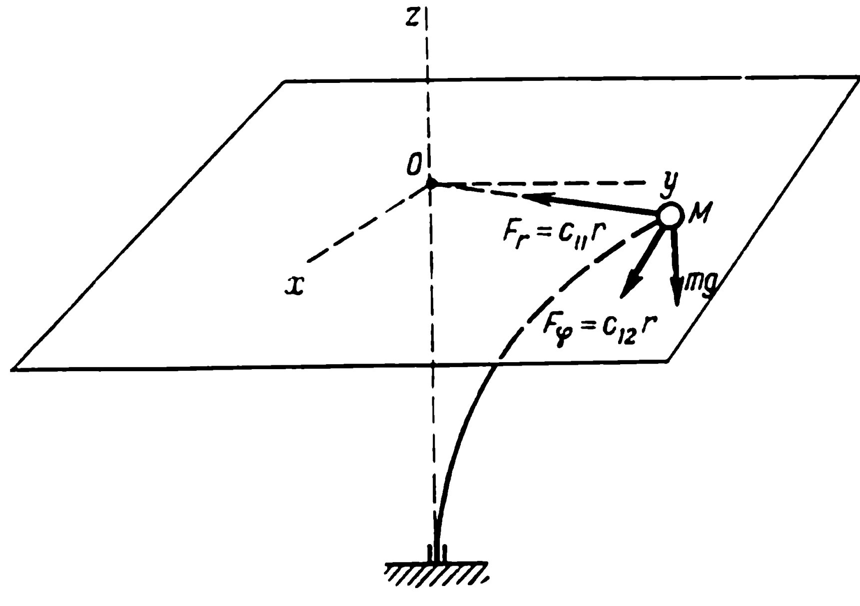
Rép. Le mouvement est stable si $v^2 > \dfrac{\pi+2}{4\left(\pi+\dfrac{4}{3}\right)}\, ag.$

55.14. Etudier la stabilité du mouvement d'un cerceau homogène de rayon a tournant autour du diamètre vertical avec la vitesse angulaire ω. Le point inférieur du cerceau est en contact avec un plan horizontal.

Rép. Le mouvement est stable si $\omega^2 > \dfrac{2}{3}\dfrac{g}{a}$.

55.15. Un point matériel de masse m dévié de sa position d'équilibre est soumis: 1) à une force F_r proportionnelle à la déviation $OM=r=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$ de cette position et dirigée vers elle; 2) à une force F_φ perpendiculaire à la première (force latérale) également proportionnelle à la déviation r: $|F_r|=c_{11}r$, $F_\varphi=c_{12}r$.

Etudier par la méthode des petites oscillations la stabilité de la position d'équilibre du point.



Probl. 55.15

Indication. De telles conditions sont réalisées pour une masse ponctuelle fixée à l'extrémité libre d'une barre comprimée et tordue (de mêmes rigidités principales à la flexion) dont l'extrémité inférieure est encastrée. La forme rectiligne de la barre correspond à l'état d'équilibre. Les coefficients c_{11}, c_{12} dépendent de la force compressive, du moment de torsion, de la longueur de la barre et des rigidités de la barre à la flexion et à la torsion.

Rép. L'équilibre est instable.

55.16. Lors de l'étude de la stabilité du mouvement du point envisagé dans le problème précédent, tenir compte de la force de résistance pro-

portionnelle à la première puissance de la vitesse: $R_x = -\beta\dot{x}$; $R_y = -\beta\dot{y}$ (β étant le coefficient de résistance).

Rép. L'équilibre est stable pour $\beta^2 c_{11} > mc_{12}^2$.

55.17. Si les rigidités à la flexion de la barre décrite dans le problème 50.15 ne sont pas égales, les réactions de l'extrémité de la barre agissant sur la masse m sont déterminées par les expressions

$$F_x = -c_{11}x = c_{12}y, \qquad F_y = c_{21}x - c_{22}y.$$

Etudier par la méthode des petites oscillations les conditions de la stabilité de l'équilibre.

Rép. Pour $(c_{11}-c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} > 0$ l'équilibre est stable.

55.18. L'équation du mouvement du manchon du régulateur centrifuge d'un moteur est

$$m\ddot{x} + \beta\ddot{x} + cx = A(\omega - \omega_0),$$

où x est le déplacement du manchon, m le coefficient d'inertie du système, β le coefficient de résistance, c la rigidité du ressort du régulateur, ω la vitesse angulaire instantanée et ω_0 la vitesse angulaire moyenne de la machine, A étant une constante. L'équation du mouvement de la machine est

$$J\frac{d\omega}{dt} = -Bx$$

(B est une constante, J est le moment d'inertie réduit des parties tournantes du moteur).

Etablir les conditions de stabilité du système composé par le moteur et le régulateur.

Rép. Le système est stable pour $AB < J\frac{c\beta}{m}$ (c, β, J, A, B sont supposées positives).

55.19. Une toupie symétrique, dont la pointe est placée dans un nid fixe, tourne autour de son axe vertical. Une seconde toupie symétrique placée sur celle-ci tourne également autour d'un axe vertical. La pointe de la seconde toupie est située dans un nid pratiqué dans l'axe de la première. M et M' sont les masses des toupies supérieure et inférieure; C et C' leurs moments d'inertie par rapport aux axes de symétrie; A et A' leurs moments d'inertie par rapport aux axes horizontaux passant par leurs pointes; c et c' les distances des centres de gravité des toupies aux pointes correspondantes; h la distance entre les pointes. Les vitesses angulaires des toupies sont Ω et Ω'. Etablir les conditions de stabilité du système.

Rép. Le système est stable si toutes les racines de l'équation du quatrième degré

$$[AA' + Mh^2(A - Mc^2)]\lambda^4 + [A'C'\Omega' + C\Omega(A' + Mh^2)]\lambda^3 +$$
$$+ [A(M'c' + Mh)g + (A' + Mh^2)Mcg + CC'\Omega\Omega']\lambda^2 +$$
$$+ [C\Omega(M'c' + Mh)g + C'\Omega' Mcg]\lambda + Mc(M'c' + Mh)g^2 = 0$$

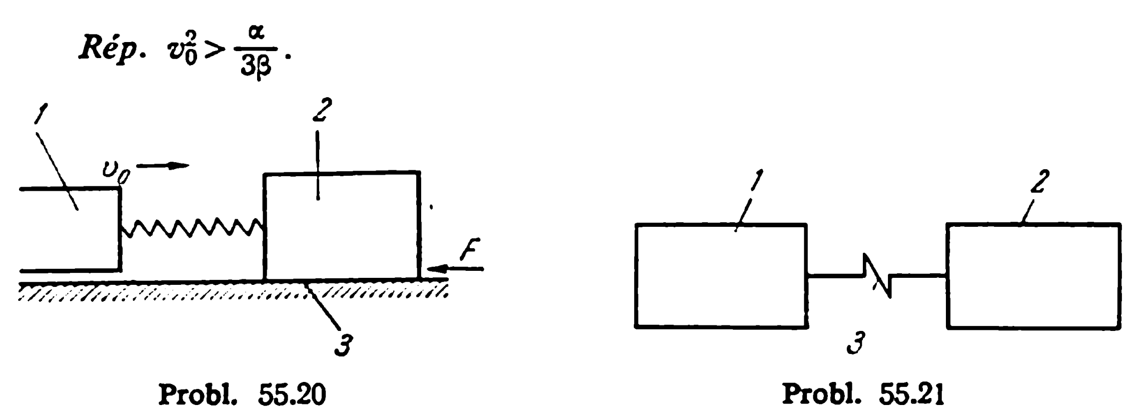
sont distinctes et réelles.

55.20. Une pièce *1* étant animée d'un mouvement de translation de vitesse constante v_0 transmet ce mouvement, par l'intermédiaire d'un ressort, au coulisseau *2*. La force de frottement entre le coulisseau et les guides *3* dépend de la vitesse v du coulisseau comme suit:

$$H = H_0 \operatorname{sign} v - \alpha v + \beta v^3,$$

où H_0, α, β sont des coefficients positifs. Déterminer les valeurs de v_0 pour lesquelles le mouvement uniforme du coulisseau est stable.

Rép. $v_0^2 > \frac{\alpha}{3\beta}$.



Probl. 55.20 — Probl. 55.21

55.21. Un groupe constitué par le moteur *1* branché à la machine *2* par un manchon élastique *3* de rigidité c est assimilé à un système à deux masses. Le rotor du moteur, de moment d'inertie J_1, est soumis à un couple M_1 qui dépend de la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ du rotor comme suit:

$$M_1 = M_0 - \mu_1 (\dot{\varphi} - \omega_0).$$

L'arbre de la machine, de moment d'inertie J_2, est soumis à un couple de forces de résistance M_2 dépendant de la vitesse angulaire de l'arbre $\dot{\psi}$:

$$M_2 = M_0 - \mu_2 (\dot{\psi} - \omega_0).$$

Les coefficients μ_1 et μ_2 sont positifs. Etablir les conditions pour lesquelles la rotation du système avec une vitesse angulaire ω_0 est stable.

Rép. $\mu_1 > \mu_2$; $\frac{J_2}{J_1} > \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

55.22. Les équations d'un mouvement perturbé sont:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \qquad \dot{x}_2 = x_1 - x_4,$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \qquad \dot{x}_4 = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4.$$

Déterminer les valeurs propres et la stabilité du système.

Rép. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; le mouvement est stable.

55.23. Les équations d'un mouvement perturbé sont:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_3 - 2x_4,$$

$$\dot{x}_4 = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4.$$

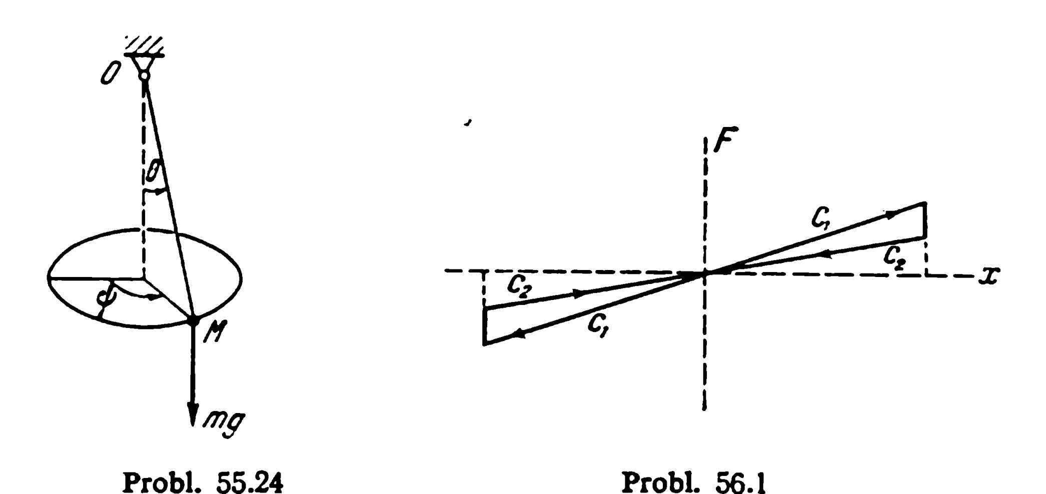
Déterminer les valeurs propres et la stabilité du système.

Rép. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; le mouvement est instable (comp. avec la réponse du problème 55.22).

55.24. Etudier la stabilité du mouvement stationnaire ($\theta = \text{const}$, $\dot{\psi} = \text{const}$) d'un pendule sphérique par rapport aux grandeurs θ, $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$.

I n d i c a t i o n. Utiliser la combinaison linéaire des intégrales.

Rép. Le mouvement est stable.



Probl. 55.24 Probl. 56.1

§ 56. Oscillations non linéaires

56.1. Les essais de ressorts ont montré que la variation de la force élastique était «triangulaire». La branche supérieure (c_1) de la caractéristique correspond à la déviation du ressort par rapport à sa position d'équilibre statique, la branche inférieure de la caractéristique (c_2) correspond à son retour à cette position. A l'instant initial la déviation du ressort par rapport à sa position d'équilibre statique est x_0, et sa vitesse initiale est nulle. La masse du ressort est m; ses coefficients de rigidité c_1 et c_2. Ecrire les équations des oscillations libres du ressort pour la première moitié d'une période complète des oscillations. Calculer la période complète des oscillations T.

Rép. Lorsque le ressort retourne à sa position d'équilibre statique, $x = x_0 \cos k_2 t$;
lorsqu'il dévie de sa position d'équilibre statique

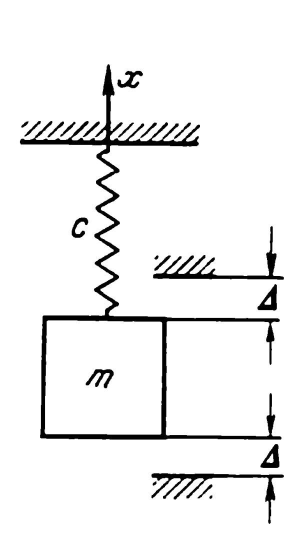
$$x = -x_0 \frac{k_2}{k_1} \sin\left(k_1 t - \frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}\right); \quad T = \pi\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right);$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

56.2. Déterminer la loi de décroissance des amplitudes des oscillations libres du ressort considéré dans le problème précédent. Lors de l'enregistrement des oscillations libres on a obtenu la succession suivante des amplitudes décroissantes: 13,0 mm, 7,05 mm, 3,80 mm, 2,05 mm, etc. Déterminer d'après les données du vibrogramme le rapport des rigidités c_1/c_2 correspondant aux branches supérieure et inférieure de la caractéristique « triangulaire ».

Rép. Les valeurs successives des amplitudes pour chaque demi-période des oscillations décroissent suivant une progression géométrique de raison k_2/k_1; $c_1/c_2 = 3{,}4$.

56.3. Une masse m oscille sur un ressort de rigidité c. Des appuis rigides sont placés à des distances égales Δ de la position d'équilibre. Supposant que le coefficient de restitution lors des chocs contre les appuis soit égal à 1, déterminer la loi du mouvement du système pour des oscillations périodiques de fréquence ω. Trouver les valeurs possibles de ω.



Probl. 56.3

Rép. $x = \dfrac{\Delta}{\sin\dfrac{k\pi}{2\omega}} \sin k\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ pour

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega} \quad \left(k^2 = \frac{c}{m}\right); \quad \omega \geqslant k.$$

56.4. Résoudre le problème précédent lorsqu'on a le seul appui inférieur.

Rép. $x = -\dfrac{\Delta}{\cos\dfrac{\pi k}{\omega}} \cos\left(\dfrac{\pi}{\omega} - t\right)$ pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega}$;

$$k \leqslant \omega \leqslant 2k.$$

56.5. Déterminer la dépendance de l'amplitude du premier harmonique des oscillations libres par rapport à leur fréquence dans un système dont l'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} + F_0 \operatorname{sign} x + cx = 0.$$

Rép. $a_1 = \dfrac{4F_0}{\pi(m\omega^2 - c)}$.

56.6. Le mouvement du système est donné par l'équation

$$\ddot{x}+(\dot{x}^2+k^2x^2-\alpha^2)\,\dot{x}+k^2x=0.$$

Calculer l'amplitude du processus auto-oscillatoire qui apparaît dans le système; étudier sa stabilité.

Rép. $a=\alpha/k$; les auto-oscillations sont stables dans le grand.

56.7. Etablir les conditions pour lesquelles dans le système considéré dans le problème 55.20 peuvent apparaître des auto-oscillations proches des oscillations harmoniques de fréquence $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$, où c est la rigidité du ressort et m la masse du coulisseau. Déterminer approximativement l'amplitude de ces auto-oscillations.

Rép. $0{,}8\,\frac{\alpha}{3\beta}<v_0^2<\frac{\alpha}{3\beta}$; $\quad a^2\approx\frac{4}{k^2}\left(\frac{\alpha}{3\beta}-v_0^2\right)$.

56.8. Supposant que dans le système considéré dans le problème 55.20 la force de frottement H soit constante et égale à H_2 pour $v\gtrless 0$ et à H_1 pour $v=0$ (adhérence), calculer la période des auto-oscillations. La masse du coulisseau est m, la rigidité du ressort c.

Rép. $T=t_1+\frac{1+\alpha^2}{k\alpha}\,(1-\cos kt_1)$, où $\alpha=\frac{(H_1-H_2)\,k}{cv_0}$, $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$, t_1 étant la plus petite racine de l'équation

$$\alpha\sin kt_1=\cos kt_1-1.$$

56.9. Une masse m est reliée à un fondement fixe par un ressort de rigidité c et par un damper de frottement à sec dont la force de résistance ne dépend pas de la vitesse et vaut H. Des appuis rigides sont installés à des distances égales Δ de la position d'équilibre. Supposant que le coefficient de restitution lors des chocs contre les appuis soit égal à 1, calculer la valeur de H pour laquelle la force perturbatrice $F\cos\omega t$ ne peut provoquer de résonance subharmonique de fréquence ω/s (s étant un entier).

Indication. Déterminer les conditions d'existence d'un régime périodique proche des oscillations libres du système de fréquence ω/s.

Rép. Pour s pair $H>0$; pour s impair

$$H>F\,\frac{\omega k}{|k^2-\omega^2|}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi sk}{2\omega}\,\left(\frac{\omega}{s}>k\right).$$

56.10. Le centre d'un cylindre circulaire homogène roulant sans glisser sur un plan horizontal est relié par un ressort à un point fixe O situé sur la même horizontale avec le centre de la section droite du cylindre. La masse du cylindre est m, la rigidité du ressort est c. Dans la position d'équilibre le ressort n'est pas déformé, et sa longueur est l.

Déterminer la dépendance de la période des petites oscillations du cylindre autour de la position d'équilibre de l'amplitude a, en retenant dans l'équation du mouvement les termes contenant la troisième puissance du déplacement.

Rép. $T=4l\sqrt{6\frac{m}{c}}\int\limits_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^4-x^4}}=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{l}{a}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

56.11. Calculer par la méthode du petit paramètre l'amplitude a et la période T des auto-oscillations apparaissant dans le système dont le mouvement est défini par l'équation

$$\ddot{x}+k^2x=\mu\{(a^2-x^2)\dot{x}-\gamma x^3\}.$$

Rép. $a=2\alpha$; $\quad T=\frac{2\pi}{k}\left(1-\frac{3\mu\gamma\alpha^2}{2k^2}\right)$.

56.12. Les équations du mouvement d'un pendule dans un milieu résistant et sous l'action d'un moment constant n'agissant que dans un seul sens sont:

$$\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}+k^2\varphi=M_0 \text{ pour } \dot{\varphi}>0,$$
$$\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}+k^2\varphi=0 \text{ pour } \dot{\varphi}<0,$$

où h, k et M_0 sont des grandeurs constantes.

Supposant $\frac{2h}{k}\ll 1$, $\frac{M_0}{k^2}\ll 1$, appliquer la méthode de variation lente des coefficients pour déterminer le mouvement stationnaire du pendule.

Rép. Des auto-oscillations stables. Le rayon ρ du cycle limite dans le plan $(\varphi, \dot{\varphi})$ est

$\frac{1}{hT}\frac{M_0}{k^2}$, où $T=\frac{\pi}{k}$.

56.13. Appliquant dans le problème précédent la méthode des transformations ponctuelles, trouver le point fixe de la transformation.

Rép. $\varphi_0=\frac{M_0}{k^2}\frac{1}{1-e^{-hT}}$; $\quad \dot{\varphi}=0$.

APPENDICE

SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS (SI)

Au mois de décembre 1960 la XI[e] Conférence Générale des poids et mesures a adopté le Système International unifié d'unités (SI).

L'introduction de ce système dans la pratique (et, en particulier, des unités qui ne sont pas encore largement utilisées) se réalise graduellement et exigera plusieurs années; évidemment, dans la période de transition les unités des systèmes traditionnels CGS et MKS utilisées dans ce Recueil sont conservées.

Nous donnons ci-dessous, en tant que référence, un extrait du tableau du Système International d'unités.

Définition des unités fondamentales

Mètre: unité de longueur équivalant à 1 650 763,73 de longueurs d'onde, dans le vide de radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86.

Kilogramme: unité de masse équivalant à la masse du prototype international du kilogramme.

Seconde: unité de temps équivalant à la fraction 1/31 556 925, 974 7 de l'année tropique pour 1900 janvier zéro, à 12 heures de temps éphémérides.

Ampère: unité d'intensité de courant électrique équivalant à l'intensité d'un courant non variable qui, parcourant deux conducteurs parallèles rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire infiniment petite, distants de 1 m l'un de l'autre, dans le vide, engendrerait entre ces conducteurs une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de longueur.

Quelques facteurs de transformation

1 kgf $=9{,}806\ 65$ N $\approx 9{,}81$ N	1 kgf m $=9{,}806\ 65$ J $\approx 9{,}81$ J
1 dyn $=10^{-5}$ N	1 erg $=10^{-7}$ J
1 kgf/cm^2 $=98\ 066{,}5$ N/m^2	1 cal $=4{,}186\,8$ J
1 dyn/cm^2 $=0{,}1$ N/m^2	1 Pa $=0{,}102$ kgf/m^2

Appellation de la grandeur	Unité de mesure	Symbole de l'unité
	Unités principales	
Longueur	**mètre**	m
Masse	**kilogramme**	kg
Temps	**seconde**	s
Intensité de courant électrique	**ampère**	A
	Unités secondaires	
Angle plan	**radian**	rd
Angle solide	**stéradian**	sr
Aire	**mètre carré**	m^2
Volume	**mètre cube**	m^3
Fréquence	**hertz**	Hz
Masse volumique	**kilogramme par mètre cube**	kg/m^3
Vitesse	**mètre par seconde**	m/s
Vitesse angulaire	**radian par seconde**	rd/s
Accélération	**mètre par seconde, par seconde**	m/s^2
Accélération angulaire	**radian par seconde, par seconde**	rd/s^2
Force	**newton** ($kg \cdot m/s^2$)	N
Pression et contrainte	**pascal** (N/m^2)	Pa
Viscosité dynamique	**poiseuille** ($N \cdot s/m^2$)	Pl
Viscosité cinématique	**l'unité SI n'a pas reçu de nom**	m^2/s
Travail, énergie, quantité de chaleur	**joule**	J
Puissance	**watt**	W
Quantité d'électricité	**coulomb**	C
Force électromotrice, différence de potentiels, tension	**volt**	V
Résistance électrique	**ohm**	Ω
Capacité électrique	**farad**	F
Flux magnétique	**weber**	Wb
Inductance électrique	**henry**	H
Induction magnétique	**tesla**	T

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

PREMIÈRE PARTIE

STATIQUE DU CORPS SOLIDE

Chapitre I. **Système plan de forces** 7
§ 1. Forces agissant suivant une droite 7
§ 2. Forces concourantes 8
§ 3. Forces parallèles 29
§ 4. Système plan arbitraire de forces 41
§ 5. Statique graphique 67
Chapitre II. **Système de forces dans l'espace** 74
§ 6. Forces concourantes 74
§ 7. Réduction d'un système de forces à son expression la plus simple 80
§ 8. Equilibre d'un système arbitraire de forces 84
§ 9. Centre de gravité 101

DEUXIÈME PARTIE

CINÉMATIQUE

Chapitre III. **Cinématique du point** 109
§ 10. Trajectoire et équations du mouvement du point 109
§ 11. Vitesse d'un point 114
§ 12. Accélération d'un point 119
Chapitre IV. **Mouvements élémentaires du corps solide** 128
§ 13. Rotation du corps solide autour d'un axe fixe 128
§ 14. Transformations des mouvements élémentaires d'un corps solide 131
Chapitre V, **Mouvement plan du corps solide** 138
§ 15. Equations du mouvement d'une figure plane 138
§ 16. Vitesses des points d'un corps solide en mouvement plan. Centre instantané des vitesses 142
§ 17. Centroïdes fixe et mobile 153
§ 18. Accélérations des points du corps solide lors d'un mouvement plan. Centre instantané des accélérations 156
Chapitre VI. **Mouvement plan du corps solide ayant un point fixe. Orientation spatiale** 165
§ 19. Mouvement du corps solide ayant un point fixe 165
§ 20. Orientation dans l'espace; les formules cinématiques d'Euler et leurs modifications; les axoïdes 169
Chapitre VII. **Mouvement composé du point** 178
§ 21. Equations du mouvement du point 178
§ 22. Addition des vitesses du point 183
§ 23. Addition des accélérations d'un point 189
Chapitre VIII. **Mouvement composé du corps solide** 206
§ 24. Composition des mouvements plans d'un corps 206
§ 25. Composition des mouvements d'un corps dans l'espace 212

TROISIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

Chapitre IX. **Dynamique d'un point matériel** 223
§ 26. Détermination des forces d'après le mouvement 223
§ 27. Equations différentielles du mouvement 230

§ 28. Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point matériel. Théorème de la variation du moment cinétique du point matériel ....
§ 29. Travail et puissance ....
§ 30. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du point matériel ....
§ 31. Problèmes mixtes ....
§ 32. Mouvement oscillatoire ....
§ 33. Mouvement relatif ....
Chapitre X. **Dynamique du système de points matériels** ....
§ 34. Géométrie des masses: centre des masses du système matériel, moments d'inertie des corps solides ....
§ 35. Théorème sur le mouvement du centre des masses du système matériel ....
§ 36. Théorème de la variation du vecteur résultant des quantités de mouvement du système matériel. Application aux milieux continus ....
§ 37. Théorème de la variation du moment cinétique résultant du système matériel. Equation différentielle de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe ....
§ 38. Théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système matériel ....
§ 39. Mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe ..
§ 40. Théorie approchée des gyroscopes ....
§ 41. Méthode de la cinétostatique ....
§ 42. Pression du corps solide tournant sur l'axe de rotation
§ 43. Problèmes mixtes ....
§ 44. Choc ....
§ 45. Dynamique du point et du système de masse variable (de composition variable) ....
Chapitre XI. **Mécanique analytique** ....
§ 46. Principe des déplacements virtuels ....
§ 47. Equation générale de la dynamique ....
§ 48. Equations de Lagrange de seconde espèce ....
§ 49. Intégrales du mouvement, transformation de Routh, équations canoniques de Hamilton, équations de Jacobi-Hamilton, principe de Hamilton-Ostrogradsky ....
Chapitre XII. **Dynamique du vol cosmique** ....
§ 50. Mouvement keplérien (mouvement sous l'action d'une force centrale) ....
§ 51. Problèmes divers ....
Chapitre XIII. **Stabilité de l'équilibre d'un système. Théorie des oscillations, stabilité du mouvement** ....
§ 52. Détermination des conditions d'équilibre d'un système. Stabilité de l'équilibre ....
§ 53. Petites oscillations d'un système à un degré de liberté
§ 54. Petites oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté ....
§ 55. Stabilité du mouvement ....
§ 56. Oscillations non linéaires ....
Appendice ....
Système international d'unités (SI) ....
Définition des unités fondamentales ....
Quelques facteurs de transformation ....

ERRATA

page	ligne	n° du problème	écrit	à lire
29	1re d'en haut	2.69	l'angle Θ	l'angle θ
42	1re » bas	4.6	$\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{ctg}2\alpha;\ \Theta=\dots$	$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}2\alpha;\ \theta=\dots$
	3e » »	»	l'angle Θ	l'angle θ
44	1re » haut	4.10	sr	sur
117	18e » »	11.11	$\dots\cos\Theta$, où $\Theta=\frac{\alpha}{2}$	$\dots\cos\theta$, où $\theta=\frac{\alpha}{2}$
126	4e » bas	12.35	$w_\Theta=\dots\sin\Theta\cos\Theta;$ $\dots\sqrt{4+\sin^2\Theta}$.	$w_\theta=\dots\sin\theta\cos\theta;$ $\dots\sqrt{4+\sin^2\theta}$
	5e » »		$\dots\cos^2\Theta\dots\sin\Theta$	$\dots\cos^2\theta\dots\sin\theta$
158	14e » haut	18.10	lbielle	bielle
	15e » »		ta	la
	16e » »		ournant	tournant
170	1re » bas	20.4	$\omega_z=\dot\psi\cos\theta-\dot\varphi$.	$\omega_z=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi$.
199	11e » haut	23.41	vitesse v	vitesse $\mathbf{v}$
222	2e » bas	25.29	v	$\mathbf{v}$
234	16e » »	27.25	$x=\{(637{,}5\ \mathrm{Log}\dots$	$x=\{637{,}5\ \mathrm{Log}(\dots$
239	12e » haut	27.49	l'obus v_0	l'obus $\mathbf{v}_0$
241	8e » »	27.59	$k_l m\cdot\overline{MC_l}$ est	est $k_l m\cdot\overline{MC_l}$
242	1re » »	27.65	la vitesse v_0	la vitesse $\mathbf{v}_0$
276	3e » haut	32.44	EI	EJ
288	10e » bas	32.97	force perturbatrice gf	force perturbatrice $S=0{,}2\sin 14t$ gf
330	11e » haut	38.5	$\sin^2\varphi$	$\sin 2\varphi$
332	10e » bas	38.15	ituées	situées
372	12e » »	44.11	la vitesse v	la vitesse $\mathbf{v}$
	1re » »	44.13	la vitesse v	la vitesse $\mathbf{v}$
376	3e » haut	44.24	la vitesse v	la vitesse $\mathbf{v}$
381	19e » »	45.25	l'allumage v	l'allumage $\mathbf{v}$
436	9e » bas	50.12	$\dots\lvert r\times v\rvert=\mathrm{const}$	$\dots\lvert\mathbf{r}\times\mathbf{v}\rvert=\mathrm{const}$
437	14e » haut	50.15	$c=r^2\dot\varphi\cdot\lvert r\times v\rvert$	$c=r^2\dot\varphi=\lvert\mathbf{r}\times\mathbf{v}\rvert$
441	8e » »	50.33	$V=\dots$	$\mathbf{v}=\dots$
	9e » haut		$V=\dots$	$\mathbf{v}=\dots$
458	1re » »	53.17	G.	B.

